

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Das Capital Asset Pricing Model (CAPM)	6
2.1	Portfolio-Selection	7
2.1.1	Die Beurteilung einzelner Anlageformen	7
2.1.2	Effiziente Portfolios	14
2.1.3	Die Ermittlung der effizienten Menge	23
2.2	Risikoloses Leihen und Verleihen	25
2.2.1	Die risikolose Anlageform A_f	25
2.2.2	Risikoloses Leihen	27
2.3	Ein Einfaktor-Marktmodell	33
2.3.1	Ein Marktmodell	33
2.3.2	Der EGP-Algorithmus	37
2.4	Der Gleichgewichtszustand	39
2.4.1	Das universelle Separationstheorem für vollkommene Kapitalmärkte	39
2.4.2	Das Marktportfolio und die Kapitalmarktlinie	40
2.5	Risikobehaftete Wertpapiere und die Fundamentalgleichung des CAPM	42
2.5.1	Die Fundamentalgleichung und die Wertpapiermarktgerade	42
2.5.2	Anlagestrategien	47
3	Arbitrage und elementare Derivatebewertung	49
3.1	Arbitrage und Beinahe-Arbitrage	49
3.1.1	Arbitrageportfolios	49
3.1.2	Beinahe-Arbitrage und die Arbitrage-Preistheorie	52
3.2	Elementare Derivate	57
3.2.1	Termingeschäfte	58
	Grundbegriffe	58
	Marktteilnehmer	60
	Kreditrisiken aus Derivaten	62
3.2.2	Futures	63
	Grundlegendes	63
	Clearingstellen und Market-Maker	65
	Margins	66
3.3	Arbitragefreie Terminpreise	69
3.3.1	Einige finanzmathematische Begriffe und Systemvoraussetzungen .	69
	Zinsen, insbesondere stetige Verzinsung	69
	Der Barwert einer Zahlungsreihe	71
	Leerverkauf und Wertpapierleihe	72
	Systemvoraussetzungen und Standardbezeichnungen	73
3.3.2	Forwardpreise	74
3.3.3	Bewertung von laufenden Termingeschäften	78

3.3.4	Futurepreis = Forwardpreis	79
3.3.5	Spezielle Terminkontrakte	81
	Futures auf Aktienindizes	81
	Devisentermingeschäfte	82
	Zinstermingeschäfte	83
3.3.6	Aspekte von Warentermingeschäften	83
	Cost-Of-Carry	84
3.3.7	Forwardpreis vs. Erwartungswert des zukünftigen Preises	84

4 Optionen

4.1	Grundlegendes zu Optionen	86
4.2	Eigenschaften von Optionspreisen	90
	4.2.1 Grundsätzliche Annahmen und Notationen	90
	4.2.2 Faktoren, die den Optionspreis beeinflussen	91
	4.2.3 Schranken für Optionspreise	94
	4.2.4 Optimaler Ausübungszeitpunkt und Preisgrenzen bei amerikani- schen Optionen	96
	4.2.5 Put-Call-Parität	100
4.3	Optionsstrategien	103
	4.3.1 Strategien mit einer Option und dem Underlying	103
	4.3.2 Spreads	105
	Bull-Spread	105
	Bear-Spread	106
	Butterfly-Spread	107
	Time-Spread	107
	Weitere Spreads	108
	4.3.3 Kombinationen	109
	Straddle	109
	Strangle	111
4.4	Fazit und Ausblick	112

5 Endliche arbitragefreie Systeme

5.1	Arbitragefreie Einperiodensysteme	114
	5.1.1 Das Einperioden-Binomialmodell	116
	5.1.2 Allgemeine Einperiodensysteme	121
5.2	Ein einfaches Mehrperiodensystem	128
5.3	Arbitragefreie Mehrperiodensysteme	132
	5.3.1 Der Systemrahmen	132
	5.3.2 Selbstfinanzierende Handelsstrategien	134
	5.3.3 Charakterisierung arbitragefreier Systeme	135
5.4	Vollständige arbitragefreie Mehrperiodensysteme	140
	5.4.1 Vollständigkeit	140
	5.4.2 Binomialmodelle	143
5.5	Mathematische Gestaltungsmöglichkeiten	143
	5.5.1 Die zugehörige Baumdarstellung	143
	5.5.2 Numeraire und Diskontierung	145
	Numerairewechsel	149

6	Binomialmodelle	151
6.1	Die Bewertung europäischer Optionen mit Binomialbäumen	151
6.1.1	Bewertung in Einperiodenmodellen	151
6.1.2	Bewertung in Mehrperiodenmodellen	155
6.2	Das Cox-Ross-Rubinstein-Modell	161
6.2.1	Einführung	161
6.2.2	Bewertungsformeln	163
6.2.3	Zur Praxistauglichkeit der Baummodelle	165
6.2.4	Grenzwertbetrachtungen zum CRR-Modell	169
6.2.5	Beweis der Sätze 137 und 140	174
6.2.6	Die Black-Scholes-Formel	176
7	Das Black-Scholes-Modell	181
7.1	Ein Modell für den Kursverlauf einer Aktie	182
7.1.1	Anforderungen	182
7.1.2	Der Wiener-Prozess und verwandte stochastische Prozesse	185
7.1.3	Die Itô-Formel	189
7.1.4	Schätzwerte der Parameter	195
7.2	Derivatebewertung	198
7.2.1	Die Black-Scholes-Differentialgleichung und die risikoneutrale Bewertung	198
7.2.2	Die Black-Scholes-Formel	203
	Grenzwerte	205
	Abhängigkeit von der Volatilität	207
	Die implizite Volatilität	208
7.2.3	Vorgehensweise bei Dividenden	210
7.3	Hedging und die griechischen Buchstaben	211
7.3.1	Gedeckter und ungedeckter Call, Stop-Loss-Strategie	212
7.3.2	Delta-Hedging	214
7.3.3	Weitere griechische Buchstaben	220
	Gamma	220
	Theta	222
	Beziehung zwischen Δ , Γ und Θ	224
	Lambda (Vega) und Rho	225
8	Amerikanische Optionen	228
8.1	Bewertung in Binomialmodellen	228
8.2	Der Zuschlag für das Recht der vorzeitigen Ausübung	236
8.3	Amerikanische Puts im Black-Scholes-Modell	242
8.4	Berücksichtigung von Dividenden	244
9	Das allgemeine Bewertungsprinzip	249
9.1	Die risikoneutrale Welt und das äquivalente Martingalmaß	249
9.2	Der Marktpreis des Risikos	252
9.3	Währungsderivate	253
9.4	Die Sicht des US-Investors - Numerairewechsel	255
9.5	Quantos	257

10 Zinsderivate	263
10.1 Die Zinsstruktur	263
10.1.1 Zerobonds	264
10.1.2 Forwardraten	265
10.2 Einige gebräuchliche Zinsderivate	267
10.2.1 Termingeschäfte	267
OTC-Zinsderivate	267
Zins-Futures	270
10.2.2 Optionsgeschäfte	274
10.2.3 Exotische Varianten	275
10.3 Die Bewertung von Zinsoptionen mit dem Black-Scholes-Modell	275
10.3.1 Optionen auf Zerobonds	275
10.3.2 Zinsoptionen	279
10.4 Diskrete Zinsmodelle	281
10.5 Stetige Modelle für den kurzfristigen Zinssatz	287
10.5.1 Das Modell von Ho und Lee	288
10.5.2 Das Modell von Vasicek / Hull und White	289
10.5.3 Das Modell von Cox-Ingersoll-Ross (CIR)	291
10.5.4 Das Modell von Black-Karasinski	292
10.5.5 Fazit	292
10.6 Das Heath-Jarrow-Morton-Modell (HJM)	293
10.6.1 Einfaktor-Modelle	294
10.6.2 Mehrfaktor-HJM-Modelle	297
Ein zweidimensionales HJM-Modell	298
Das LIBOR-Markt-Modell (BGM-Modell)	299
11 Exotische Optionen und strukturierte Produkte	302
11.1 Pfadunabhängige univariate exotische Optionen	303
11.1.1 Digitals	303
11.1.2 Power-Optionen	306
11.1.3 Compound-Optionen	308
11.1.4 Chooser-Optionen	310
11.2 Pfadabhängige exotische Optionen	311
11.2.1 Barrier-Optionen	311
Single-Barrier-Optionen	312
Double Barriers	318
Digitale Barrier-Optionen	319
11.2.2 Asiatische Optionen	321
Average-Price-Optionen	321
Average-Strike-Optionen	322
11.2.3 Lookback-Optionen	323
Floating-Strike-Lookbacks	324
Floating-Rate-Lookbacks	325
11.3 Multivariate Optionen	327
11.3.1 Bewertungsansatz im Black-Scholes-Modell	327
11.3.2 Tauschoptionen	330
11.3.3 Weitere multivariate Optionen	333

11.4	Strukturierte Produkte	335
11.4.1	DAX-Garantiefonds	336
11.4.2	Aktienanleihen	338
	Doppel-Aktienanleihen	341
	Aktienanleihen mit Mindestrückzahlung	341
	Aktienanleihen mit Deaktivierungsschwelle	342
	Aktienanleihen mit Aktivierungsschwelle	342
	Diskont-Varianten	342
11.4.3	Gap-Optionen	343
12	Die mathematische Theorie stochastischer Finanzmarktprozesse	346
12.1	Einige Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie	347
12.1.1	Das Axiomensystem von Kolmogorov, Filtrationen und äquivalente Wahrscheinlichkeitsmaße	347
12.1.2	Zufallsvariablen	356
12.1.3	Folgen und Konvergenz	357
12.1.4	Integration von Zufallsvariablen	358
12.1.5	Der bedingte Erwartungswert	361
12.1.6	Unabhängigkeit	366
12.2	Stochastische Prozesse	367
12.2.1	Grundlegendes	367
12.2.2	Eigenschaften zeitstetiger Prozesse	370
12.2.3	Martingale und Stoppzeiten	372
12.2.4	Brownsche Bewegungen	377
12.3	Stochastische Integration	381
12.3.1	Einführende Diskussion	381
12.3.2	Das Lebesgue-Stieltjes-Integral für stochastische Prozesse	383
12.3.3	Das Itô-Integral	387
12.3.4	Stochastische Differentialgleichungen	394
12.3.5	Die quadratische Variation	396
12.3.6	Die Itô-Formel	398
12.4	Arbitragefreiheit und Vollständigkeit	404
12.4.1	Die Brownsche Filtration und der Martingal-Darstellungssatz	404
12.4.2	Der Satz von Girsanov und das äquivalente Martingalmaß	406
12.4.3	Handelsstrategien und Arbitragefreiheit	411
12.4.4	Optionsbewertung und Vollständigkeit	414
12.4.5	Mehrfaktormodelle	418
	Literaturverzeichnis	422
	Index	426

Abbildungsverzeichnis

2.1	Der Südostbereich einer Anlageform	9
2.2	Einfluss der Risikopräferenz auf die Investitionsentscheidung	12
2.3	Indifferenzlinien eines risikoneutralen Investors	13
2.4	Die zulässige und die effiziente Menge bei beliebig kombinierbaren risikohaften Anlageformen	18
2.5	Ermittlung des optimalen Portfolios eines Investors	23
2.6	Gestalt der effizienten Menge bei Vorhandensein einer risikolosen Anlageform	28
2.7	Die effiziente Menge bei risikolosem Leihen und Verleihen	30
2.8	Die effiziente Menge bei ungleichen Soll- und Habenzinsen	32
2.9	Zusammenhang zwischen der Rendite der Anlageform A_i und der Indexrendite	33
2.10	Die Kapitalmarktlinie oder charakteristische Marktgerade	41
2.11	Die charakteristische Wertpapiermarktgerade	46
3.1	Funktionsweise einer Clearingstelle	65
4.1	Payoff und P&L-Profil eines Calls	88
4.2	Payoff und P&L-Profil eines Puts	89
4.3	Preisgrenze für einen Call	95
4.4	Preisgrenzen für einen europäischen Put	97
4.5	Preisgrenzen für einen amerikanischen Put	99
4.6	P&L-Diagramm Aktie (long) und Option	104
4.7	P&L-Diagramm Aktie (short) und Option	104
4.8	P&L-Profil eines Bull-Spreads (Aufbau über 2 Calls)	106
4.9	P&L-Profil eines Bear-Spreads	107
4.10	P&L-Diagramm eines Long-Butterfly-Spreads	108
4.11	Condor und Call-Ratio-Spread	108
4.12	P&L-Profil eines Straddles	110
4.13	P&L-Profil eines Strangles	112
5.1	Ein arbitragefreies Dreiperiodensystem mit zwei Anlageformen und stochastischer risikoloser Rendite	138
6.1	Kalkulierter und tatsächlicher Kursverlauf	168
6.2	CRR-Modelle mit $n = 1, 2$ und 3 zu vorgegebenen Werten μ und σ	171
7.1	Pfad einer Brownschen Bewegung	186
7.2	Pfad einer verallgemeinerten Brownschen Bewegung $dX = a \cdot dt + b \cdot dW$	187
7.3	Möglicher Kursverlauf einer Aktie	188
7.4	Kursverlauf einer Aktie und erwartete mittlere Werte	194
7.5	Black-Scholes-Preise und zugehörige Zeitwerte in Abhängigkeit von S/K	206
7.6	Lokale Approximation einer Funktion durch eine Tangente	215

7.7	Das Delta eines europäischen Calls	217
7.8	Der Theta-Wert europäischer Calls und Puts in Abhängigkeit von S/K	223
7.9	Theta in Relation zum Black-Scholes-Preis	224
7.10	Zeitliche Entwicklung des Zeitwerts europäischer Call- und Put-Optionen	224
7.11	Gamma und Vega	226
8.1	Typische Lage des Bereichs mit vorteilhafter sofortiger Ausübung bei einem amerikanischen Put	241
10.1	Zinsstrukturkurven	264
10.2	Ertrag aus FRA-Verkauf und Verkauf des exakten Future-Hedge	273
10.3	Pull-to-Par von Zerobondpreisen	277
10.4	Ein Trinomialmodell für den risikoneutralen Prozess des kurzfristigen Zinssatzes	285
10.5	Abgeleitete Bondpreise	286
11.1	Long-Position eines Digital-Calls bzw. Digital-Puts	304
11.2	Payoff von Power-Optionen	307
11.3	Down-and-In-Put ohne Rebate	314
11.4	Up-and-Out-Call mit Rebate at hit bzw. at expiry	314
11.5	Payoff von Lookback-Optionen des Floating-Strike-Typs	325
11.6	Payoffs von Lookforward-Optionen	326
11.7	Rendite einer Aktienanleihe im Vergleich zu Anlagealternativen	339
11.8	Payoff-Profil eines Gap-Calls	344
11.9	P&L-Profil von Gap-Calls	345
12.1	Zu einem Ereignis gehörende Elementarereignisse	351
12.2	Atomare Mengen einer aufsteigenden Folge von σ -Algebren (=Filtration)	352
12.3	Zwei äquivalente diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen	355
12.4	Definitionsbereiche der Pfade und Zufallsvariablen eines stochastischen Prozesses	368
12.5	Pfad eines zeitstetigen Prozesses	369
12.6	Originalprozess und gestoppter Prozess	375
12.7	Veränderte Erwartungswerte eines Martingals im Lauf der Zeit	377
12.8	Eine messbare Menge stetiger Funktionen	379
12.9	Beispiel einer Funktion mit unendlicher Variation	385
12.10	Eine linksseitig stetige Treppenfunktion mit Sprungstellen t_1, \dots, t_4	388