

Inhaltsverzeichnis

Teil I. Wahrscheinlichkeitstheorie

1. Kombinatorik	3
1.1 Einleitung	3
1.2 Grundbegriffe der Kombinatorik	3
1.3 Permutationen	4
1.3.1 Permutationen ohne Wiederholung	4
1.3.2 Permutationen mit Wiederholung	6
1.4 Kombinationen	7
1.4.1 Kombinationen ohne Wiederholung und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge	7
1.4.2 Kombinationen ohne Wiederholung, aber mit Berücksichtigung der Reihenfolge	9
1.4.3 Kombinationen mit Wiederholung, aber ohne Berücksichtigung der Reihenfolge	10
1.4.4 Kombinationen mit Wiederholung und mit Berücksichtigung der Reihenfolge	10
1.5 Zusammenfassung	11
1.6 Aufgaben und Kontrollfragen	12
2. Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung	13
2.1 Einleitung	13
2.2 Zufällige Ereignisse	14
2.3 Relative Häufigkeit und Laplacesche Wahrscheinlichkeit	17
2.4 Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung	19
2.4.1 Folgerungen aus den Axiomen	19
2.4.2 Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten	21
2.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit	21
2.5.1 Motivation und Definition	21
2.5.2 Der Satz von Bayes	23
2.6 Unabhängigkeit	27
2.7 Aufgaben und Kontrollfragen	30

3. Zufällige Variablen	35
3.1 Einleitung	35
3.2 Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen	37
3.3 Diskrete Zufallsvariablen und ihre Verteilungsfunktion	39
3.4 Stetige Zufallsvariablen und ihre Verteilungsfunktion	42
3.5 Erwartungswert und Varianz einer Zufallsvariablen	47
3.5.1 Erwartungswert	48
3.5.2 Rechenregeln für den Erwartungswert	48
3.5.3 Varianz	50
3.5.4 Rechenregeln für die Varianz	50
3.5.5 Standardisierte Zufallsvariablen	52
3.5.6 Erwartungswert und Varianz des arithmetischen Mittels	52
3.5.7 Ungleichung von Tschebyschev	53
3.5.8 $k\sigma$ -Bereiche	55
3.6 Die Quantile, der Median und der Modalwert einer Verteilung	56
3.7 Zweidimensionale Zufallsvariablen	57
3.7.1 Zweidimensionale diskrete Zufallsvariablen	57
3.7.2 Zweidimensionale stetige Zufallsvariablen	59
3.7.3 Momente von zweidimensionalen Zufallsvariablen	61
3.7.4 Korrelationskoeffizient	63
3.8 Aufgaben und Kontrollfragen	64
4. Diskrete und stetige Standardverteilungen	69
4.1 Einleitung	69
4.2 Spezielle diskrete Verteilungen	69
4.2.1 Die diskrete Gleichverteilung	69
4.2.2 Die Einpunktverteilung	70
4.2.3 Die Null-Eins-Verteilung	70
4.2.4 Die hypergeometrische Verteilung	72
4.2.5 Die Binomialverteilung	74
4.2.6 Die geometrische Verteilung	77
4.2.7 Die Poissonverteilung	79
4.2.8 Die Multinomialverteilung	80
4.3 Spezielle stetige Verteilungen	82
4.3.1 Die stetige Gleichverteilung	82
4.3.2 Die Exponentialverteilung	83
4.3.3 Die Normalverteilung	85
4.3.4 Die zweidimensionale Normalverteilung	89
4.4 Prüfverteilungen	91
4.4.1 Die χ^2 -Verteilung	91
4.4.2 Die t -Verteilung	92
4.4.3 Die F -Verteilung	93
4.5 Aufgaben und Kontrollfragen	95

5. Grenzwertsätze und Approximationen	97
5.1 Die stochastische Konvergenz	97
5.2 Das Gesetz der großen Zahlen	98
5.3 Der zentrale Grenzwertsatz	99
5.4 Approximationen	100
5.4.1 Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung	101
5.4.2 Approximation der Binomialverteilung durch die Poissonverteilung	103
5.4.3 Approximation der Poissonverteilung durch die Normalverteilung	103
5.4.4 Approximation der hypergeometrischen Verteilung durch die Binomialverteilung	103
5.5 Aufgaben und Kontrollfragen	105

Teil II. Induktive Statistik

6. Schätzung von Parametern	109
6.1 Einleitung	109
6.2 Allgemeine Theorie der Punktschätzung	110
6.3 Maximum-Likelihood-Schätzung	113
6.3.1 Das Maximum-Likelihood-Prinzip	113
6.3.2 Herleitung der ML-Schätzungen für die Parameter der Normalverteilung	114
6.4 Konfidenzschätzungen von Parametern	117
6.4.1 Grundlagen	117
6.4.2 Konfidenzschätzung der Parameter einer Normalverteilung	118
6.5 Schätzen einer Binomialwahrscheinlichkeit	122
6.6 Aufgaben und Kontrollfragen	125
7. Prüfen statistischer Hypothesen	127
7.1 Einleitung	127
7.2 Testtheorie	127
7.3 Einstichprobenprobleme bei Normalverteilung	131
7.3.1 Prüfen des Mittelwertes bei bekannter Varianz (einfacher Gauß-Test)	131
7.3.2 Prüfung des Mittelwertes bei unbekannter Varianz (einfacher t -Test)	135
7.3.3 Prüfen der Varianz; χ^2 -Test für die Varianz	137
7.4 Zweistichprobenprobleme bei Normalverteilung	139
7.4.1 Prüfen der Gleichheit der Varianzen (F -Test)	139
7.4.2 Prüfen der Gleichheit der Mittelwerte zweier unabhängiger normalverteilter Zufallsvariablen	142

7.4.3	Prüfen der Gleichheit der Mittelwerte aus einer verbundenen Stichprobe (paired t -Test)	145
7.5	Prüfen der Korrelation zweier Normalverteilungen	147
7.6	Prüfen von Hypothesen über Binomialverteilungen	149
7.6.1	Prüfen der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Ereignisses (Binomialtest für p)	149
7.6.2	Prüfen der Gleichheit zweier Binomialwahrscheinlichkeiten	152
7.6.3	Exakter Test von Fisher	153
7.6.4	McNemar-Test für binären Response	155
7.7	Testentscheidung mit Statistik Software	157
7.8	Aufgaben und Kontrollfragen	161
8.	Nichtparametrische Tests	165
8.1	Einleitung	165
8.2	Anpassungstests	165
8.2.1	Chi-Quadrat-Anpassungstest	166
8.2.2	Kolmogorov-Smirnov-Anpassungstest	168
8.3	Homogenitätstests für zwei unabhängige Stichproben	171
8.3.1	Kolmogorov-Smirnov-Test im Zweistichprobenproblem	172
8.3.2	Mann-Whitney- U -Test	174
8.4	Homogenitätstests im matched-pair Design	179
8.4.1	Vorzeichen-Test	180
8.4.2	Wilcoxon-Test	182
8.5	Matched-Pair Design: Prüfung der Rangkorrelation	184
8.6	Aufgaben und Kontrollfragen	187

Teil III. Modellierung von Ursache- Wirkungsbeziehungen

9.	Lineare Regression	193
9.1	Bivariate Ursache-Wirkungsbeziehungen	193
9.2	Induktive lineare Regression	194
9.2.1	Modellannahmen der induktiven Regression	194
9.2.2	Schätzung von β^2	195
9.2.3	Schätzung von σ^2	196
9.2.4	Klassische Normalregression	197
9.2.5	Maximum-Likelihood-Schätzung	197
9.2.6	Prüfen von linearen Hypothesen	198
9.2.7	Prüfen der univariaten Regression	203
9.2.8	Konfidenzbereiche	206
9.2.9	Vergleich von Modellen	209
9.2.10	Kriterien zur Modellwahl	210
9.2.11	Die bedingte KQ-Schätzung	212
9.3	Ein komplexes Beispiel	212

9.3.1	Normalverteilungsannahme	213
9.3.2	Schrittweise Einbeziehung von Variablen	214
9.3.3	Grafische Darstellung	218
9.4	Aufgaben und Kontrollfragen	221
10.	Varianzanalyse	223
10.1	Einleitung	223
10.2	Einfaktorielle Varianzanalyse	224
10.2.1	Darstellung als restriktives Modell	227
10.2.2	Zerlegung der Fehlerquadratsumme	229
10.2.3	Schätzung von σ^2	231
10.2.4	Prüfen des Modells	232
10.3	Multiple Vergleiche von einzelnen Mittelwerten	235
10.4	Rangvarianzanalyse – Kruskal-Wallis-Test	238
10.5	Zweifaktorielle Varianzanalyse mit Wechselwirkung	242
10.5.1	Definitionen und Grundprinzipien	242
10.5.2	Modellannahmen	246
10.6	Aufgaben und Kontrollfragen	254
11.	Analyse von Kontingenztafeln	257
11.1	Zweidimensionale kategoriale Zufallsvariablen	257
11.2	Unabhängigkeit	259
11.3	Inferenz in Kontingenztafeln	260
11.3.1	Stichprobenschemata für Kontingenztafeln	260
11.3.2	Maximum-Likelihood-Schätzung bei Multinomialschema	262
11.3.3	Exakter Test von Fisher für 2×2 -Tafeln	265
11.3.4	Maximum-Likelihood-Quotienten-Test auf Unabhängigkeit	265
11.4	Differenziertere Untersuchung von $I \times J$ -Tafeln	266
11.5	Die Vierfeldertafel	269
11.6	Zweifache Klassifikation und loglineare Modelle	272
11.7	Aufgaben und Kontrollfragen	278
12.	Lebensdaueranalyse	281
12.1	Problemstellung	281
12.2	Survivorfunktion und Hazardrate	283
12.3	Kaplan-Meier-Schätzung	284
12.4	Log-Rank-Test zum Vergleich von Survivorfunktionen	288
12.5	Einbeziehung von Kovariablen in die Überlebensanalyse	292
12.5.1	Das Proportional-Hazard-Modell von Cox	293
12.5.2	Überprüfung der Proportionalitätsannahme	294
12.5.3	Schätzung des Cox-Modells	295
12.5.4	Schätzung der Überlebensfunktion unter dem Cox-Ansatz	296

12.5.5 Einige Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die Verweildauer	296
12.5.6 Modellierung der Hazardrate	298
12.6 Aufgaben und Kontrollfragen	301
A. Lösungen zu den Übungsaufgaben	303
A.1 Kombinatorik	304
A.2 Elemente der Wahrscheinlichkeitsrechnung	307
A.3 Zufällige Variablen	317
A.4 Diskrete und stetige Standardverteilungen	329
A.5 Grenzwertsätze und Approximationen	338
A.6 Schätzung von Parametern	343
A.7 Prüfen statistischer Hypothesen	348
A.8 Nichtparametrische Tests	355
A.9 Lineare Regression	364
A.10 Varianzanalyse	366
A.11 Analyse von Kontingenztafeln	369
A.12 Lebensdaueranalyse	373
B. Tabellenanhang	375
Literatur	389
Sachverzeichnis	391