

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	iv
Tabellenverzeichnis	vii
Abkürzungsverzeichnis	xiii
Symbolverzeichnis	xiv
1 Einleitung	1
2 Einführende Erläuterungen	4
2.1 Informationseffizienz des Kapitalmarktes und zeitliche Un- abhängigkeit von Aktienkursen	4
2.2 Nichtlinearität und Chaos in Aktienkursen	7
2.3 Aktienkurse und Long Memory	11
3 Grundbegriffe der fraktalen Geometrie	14
3.1 Einführung	14
3.2 Selbstähnlichkeit und Selbstaffinität	16
3.3 Dimensionsbegriffe	20
3.3.1 Ganzzahlige Dimensionen	20
3.3.2 Fraktale Dimensionen	21
4 Selbstaffine stochastische Prozesse	30
4.1 Grundlagen stochastischer Prozesse	30
4.2 Stochastische Prozesse und Long Memory	32
4.3 Selbstaffinitätsparameter und fraktale Dimension	33
4.4 Die Brownsche Bewegung	37
4.4.1 Modellansatz	38
4.4.2 Weißes Rauschen und Zufallspfad	39
4.4.3 Skalierungseigenschaften	40
4.5 Long-Memory-Prozesse	43

4.5.1	Das Hurst-Phänomen	43
4.5.2	Fraktale Brownsche Bewegungen	45
4.5.2.1	Modellansatz	45
4.5.2.2	Diskretes fraktales Rauschen und diskrete fraktale Brownsche Bewegungen	48
4.5.2.3	Skalierungseigenschaften	52
4.5.2.4	Die Autokovarianzfunktion des fraktalen Rauschens	53
4.5.2.5	Die Spektraldichtefunktion des fraktalen Rauschens	58
4.5.3	Fraktional differenziertes Rauschen	61

5 Statistische Verfahren zur Bestimmung fraktaler Strukturen von Zeitreihen **64**

5.1	Grundlagen der Zeitreihenanalyse	64
5.2	Statistische Verfahren im Zeitbereich	67
5.2.1	Die R/S-Analyse	67
5.2.1.1	Definitionen und elementare Eigenschaften	67
5.2.1.2	Asymptotische Verteilungseigenschaften	68
5.2.1.3	Verfahren zur Schätzung des R/S-Exponenten	72
5.2.2	Die modifizierte R/S-Analyse	76
5.3	Statistische Verfahren im Frequenzbereich	79
5.3.1	Die Periodogrammregression	79
5.3.2	Die approximative Maximum-Likelihood-Schätzung	82

6 Monte-Carlo-Simulationen zur Untersuchung der statistischen Eigenschaften der Schätz- und Testverfahren bei endlicher Datenanzahl **87**

6.1	Einführung	87
6.2	Kriterien zur Beurteilung der Schätz- und Testverfahren	90
6.3	Eigenschaften der Schätz- und Testverfahren im Falle exakt selbststaffiner stochastischer Prozesse	92
6.3.1	Normalverteiltes Weißes Rauschen	92
6.3.2	Fraktales Rauschen	99

6.4	Stochastische Prozesse mit unabhängigen Zuwächsen	107
6.4.1	α -stabile stochastische Prozesse	107
6.4.2	Student-Prozesse	115
6.5	Short-Memory-Prozesse	121
6.5.1	AR-, MA- und ARMA-Prozesse	121
6.5.2	ARCH- und GARCH-Prozesse	142
6.6	Zusammenfassung und Schlußfolgerungen	153
7	Fraktale Strukturen auf dem deutschen Aktienmarkt	157
7.1	Einführung	157
7.2	Die Daten und ihre Aufbereitung	157
7.2.1	Erfafte Daten und Erfassungszeitraum	157
7.2.2	Die Bereinigung der Aktienkurse	162
7.3	Empirische Untersuchung der Aktienrenditen	165
7.3.1	Die Autokorrelation der Renditen	165
7.3.2	Long Memory in den Aktienrenditen	169
7.4	Empirische Untersuchung der Volatilitäten	185
7.4.1	Die Autokorrelation der Volatilitäten	185
7.4.2	Long Memory in den Volatilitäten	189
7.5	Implikationen für die Aktienkursprognose	198
7.5.1	Prognosen mit Long-Memory-Prozessen	198
7.5.2	Die Erfassung verschiedener Zeithorizonte von Anlegern in Prognosemodellen	200
8	Schlußbetrachtung und Ausblick	204
	Anhang	206
	Algorithmen zur Generierung fraktalen Rauschens	206
	Literaturverzeichnis	209

Abbildungsverzeichnis

1	Die Entstehung eines symmetrischen deterministischen Fraktals am Beispiel der Koch-Kurve	15
2	Ein Beispiel für die Entstehung eines asymmetrischen Fraktals .	15
3	Die exakte Selbstähnlichkeit am Beispiel der Koch-Kurve	17
4	Beispiel für die Anwendung von Ähnlichkeitstransformation und affiner Transformation auf eine exakt selbstaffine Abbildung . .	19
5	Überdeckung der Koch-Kurve durch Kreise	25
6	Doppelt-logarithmisches Diagramm für die Anzahl der zur Überdeckung der Koch-Kurve benötigten Kreise und den zugehörigen Durchmesser der Kreise	26
7	Überlagerung der Koch-Kurve durch Gitter	28
8	Doppelt-logarithmisches Diagramm für die Anzahl der das selbstaffine Fraktal überdeckenden Boxen und die zugehörige Maschenweite	29
9	Brownsche Spur in der Ebene für äquidistante Zeitpunkte	37
10	Das weiße Rauschen	39
11	Der Zufallspfad	40
12	Die gestreckte diskretisierte Brownsche Bewegung	41
13	Die reskalierte gestreckte diskretisierte Brownsche Bewegung . .	42
14	Diskretes fraktales Rauschen für verschiedene Werte von H . . .	49
15	Diskrete (fraktale) Brownsche Bewegungen für verschiedene Werte von H	51
16	Die Autokovarianzfunktion diskreten fraktalen Rauschens in Abhängigkeit von \mathcal{T} und H	54
17	Die partielle Autokovarianzfunktion diskreten fraktalen Rauschens in Abhängigkeit von \mathcal{T} für $H = 0, 1$, $H = 0, 3$, $H = 0, 7$ und $H = 0, 9$	55
18	Die partielle Autokovarianzfunktion diskreten fraktalen Rauschens in Abhängigkeit von H für $\mathcal{T} = 1$ und $\mathcal{T} = 2$	57
19	Die partielle Autokovarianzfunktion diskreten fraktalen Rauschens in Abhängigkeit von H für $\mathcal{T} = 3$ und $\mathcal{T} = 10$	57
20	Die Spektraldichtefunktion diskreten fraktalen Rauschens für verschiedene Werte von H	60

21	Dichtefunktion und Verteilungsfunktion der Spannweite der Brownschen Brücke im Vergleich zur Normalverteilung mit gleichem Mittelwert und gleicher Varianz	70
22	Die sequentielle Spannweite einer Zeitreihe mit Startpunkt t und Periodenlänge s	73
23	R/S-Diagramm für ein weißes Rauschen mit $n = 8192$	76
24	Exakter und asymptotischer Verlauf von Spektraldichtefunktionen diskreten fraktalen Rauschens mit $H = 0,1$, diskreten weißen Rauschens ($H = 0,5$) und diskreten fraktalen Rauschens mit $H = 0,9$ im doppelt-logarithmischen Koordinatensystem	81
25	Verzerrung, Standardabweichung und mittlerer quadratischer Fehler der Schätzer GHURST für H bei 10000 Replikationen von fraktalem Rauschen der Länge $n = 8192$ in Abhängigkeit von der minimalen Subperiodenlänge s_0 und dem Parameter H	104
26	Absolute Verzerrung des Periodogrammregressionsschätzers für H bei AR(1)-Prozessen in Abhängigkeit von m und α_1 bei gegebenem $n = 8192$ und $l = 0$	130
27	Size des Periodogrammregressionstests ($\alpha = 0,05$) bei AR(1)-Prozessen in Abhängigkeit von m und α_1 bei gegebenem $n = 8192$ und $l = 0$	130
28	Die Entwicklung des Deutschen Aktienindex (DAX) 1960 - 1994 Indexstand - Rendite - Volatilität	161
29	Die Autokorrelationsfunktion der Rendite des Deutschen Aktienindex (DAX)	166
30	Die Entwicklung des Periodogrammregressionsschätzers für H in Abhängigkeit von der Anzahl der in die Regression einbezogenen Frequenzen m für die Rendite des Deutschen Aktienindex (DAX)	170
31	Der Robustheitsbereich des Periodogrammregressionsschätzers gegenüber ARMA(1,1)-Einflüssen für $n = 8695$ in Abhängigkeit von den ARMA-Parametern α_1, β_1 und der Anzahl der in die Regression einbezogenen Frequenzen m	171
32	Der Periodogrammregressionsschätzer für H und der Prüfwert des Periodogrammregressionstests t in Abhängigkeit von der Anzahl der in die Regression einbezogenen Frequenzen m für die Rendite des Deutschen Aktienindex (DAX)	173

33	Die Entwicklung des Wertes der Prüffunktion des Periodogrammregressionstests für die Rendite des Deutschen Aktienindex (DAX) in einem Zeitraum von 4096 Börsentagen in Abhängigkeit von der Anzahl der in die Regression einbezogenen Frequenzen m	183
34	Die Entwicklung des Wertes der Prüffunktion des Periodogrammregressionstests für die Rendite der Preussag-Aktie in einem Zeitraum von 4096 Börsentagen in Abhängigkeit von der Anzahl der in die Regression einbezogenen Frequenzen m	184
35	Die Autokorrelationsfunktion der Volatilität des Deutschen Aktienindex (DAX)	187
36	Das Periodogramm der Volatilität des Deutschen Aktienindex (DAX)	189
37	Die Entwicklung des Periodogrammregressionsschätzers für H in Abhängigkeit von der Anzahl der in die Regression einbezogenen Frequenzen m für die Volatilität des Deutschen Aktienindex (DAX)	190
38	Der Periodogrammregressionsschätzer für H und der Prüfwert des Periodogrammregressionstests t in Abhängigkeit von der Anzahl der in die Regression einbezogenen Frequenzen m für die Volatilität des Deutschen Aktienindex (DAX)	191
39	Die Entwicklung des Wertes der Prüffunktion des Periodogrammregressionstests für die Volatilität des Deutschen Aktienindex (DAX) in einem Zeitraum von 4096 Börsentagen in Abhängigkeit von der Anzahl der in die Regression einbezogenen Frequenzen m	197

Tabellenverzeichnis

1	Beziehungen zwischen Autokovarianzfunktion $\gamma(\mathcal{T})$ und Spektraldichtefunktion $f(\lambda)$ diskreter und kontinuierlicher stationärer stochastischer Prozesse	31
2	Eigenschaften einer Brownschen Bewegung	38
3	Fraktale Eigenschaften der Brownschen Bewegung	42
4	Eigenschaften einer fraktalen Brownschen Bewegung	47
5	Mittelwert (M), Standardabweichung (S) und mittlerer quadratischer Fehler (MSE) der R/S-Schätzer und des approximativen Maximum-Likelihood-Schätzers für H bei 10000 Replikationen von normalverteiltem weißen Rauschen in Abhängigkeit von der Zeitreihenlänge n	94
6	Mittelwert (M), Standardabweichung (S) und mittlerer quadratischer Fehler (MSE) der Periodogrammregressionsschätzer für H bei 10000 Replikationen von normalverteiltem weißen Rauschen in Abhängigkeit von der Zeitreihenlänge n	95
7	Experimentelles Signifikanzniveau des modifizierten R/S-Testes und ausgewählter Periodogrammregressionstests bei 10000 Replikationen von normalverteiltem weißen Rauschen in Abhängigkeit von der Zeitreihenlänge n	97
8	Experimentelles Signifikanzniveau ausgewählter Periodogrammregressionstests bei 10000 Replikationen von normalverteiltem weißen Rauschen in Abhängigkeit von der Zeitreihenlänge n	98
9	Mittelwert (M), Standardabweichung (S) und mittlerer quadratischer Fehler (MSE) der R/S-Schätzer für H bei 10000 Replikationen von fraktalem Rauschen der Länge $n = 8192$ in Abhängigkeit von H	101
10	Mittelwert (M), Standardabweichung (S) und mittlerer quadratischer Fehler (MSE) der Periodogrammregressionsschätzer für H bei 10000 Replikationen von fraktalem Rauschen der Länge $n = 8192$ in Abhängigkeit von H	102
11	Experimentelle Power des modifizierten R/S-Testes und ausgewählter Periodogrammregressionstests bei 10000 Replikationen von fraktalem Rauschen der Länge $n = 8192$ in Abhängigkeit von H	105
12	Experimentelle Power ausgewählter Periodogrammregressionstests bei 10000 Replikationen von fraktalem Rauschen der Länge $n = 8192$ in Abhängigkeit von H	106

13	Mittelwert (M), Standardabweichung (S) und mittlerer quadratischer Fehler (MSE) der R/S-Schätzer für H bei 10000 Replikationen von α -stabilen Prozessen der Länge $n = 8192$ in Abhängigkeit von α und β	110
14	Mittelwert (M), Standardabweichung (S) und mittlerer quadratischer Fehler (MSE) der Periodogrammregressionschätzer für H bei 10000 Replikationen von α -stabilen Prozessen der Länge $n = 8192$ in Abhängigkeit von α und β	111
15	Experimentelles Signifikanzniveau des modifizierten R/S-Testes und ausgewählter Periodogrammregressionstests bei 10000 Replikationen von α -stabilen Prozessen der Länge $n = 8192$ in Abhängigkeit von α und β	113
16	Experimentelles Signifikanzniveau ausgewählter Periodogrammregressionstests bei 10000 Replikationen von α -stabilen Prozessen der Länge $n = 8192$ in Abhängigkeit von α und β	114
17	Mittelwert (M), Standardabweichung (S) und mittlerer quadratischer Fehler (MSE) der R/S-Schätzer für H bei 10000 Replikationen von Student-Prozessen der Länge $n = 8192$ in Abhängigkeit von ν	116
18	Mittelwert (M), Standardabweichung (S) und mittlerer quadratischer Fehler (MSE) der Periodogrammregressionsschätzer für H bei 10000 Replikationen von Student-Prozessen der Länge $n = 8192$ in Abhängigkeit von ν	117
19	Experimentelles Signifikanzniveau des modifizierten R/S-Testes und ausgewählter Periodogrammregressionstests bei 10000 Replikationen von Student-Prozessen der Länge $n = 8192$ in Abhängigkeit von ν	119
20	Experimentelles Signifikanzniveau ausgewählter Periodogrammregressionstests bei 10000 Replikationen von Student-Prozessen der Länge $n = 8192$ in Abhängigkeit von ν	120
21	Mittelwert (M), Standardabweichung (S) und mittlerer quadratischer Fehler (MSE) der R/S-Schätzer für H bei 10000 Replikationen von AR(1)-Prozessen der Länge $n = 8192$ in Abhängigkeit von α_1	125
22	Mittelwert (M), Standardabweichung (S) und mittlerer quadratischer Fehler (MSE) der Periodogrammregressionsschätzer für H bei 10000 Replikationen von AR(1)-Prozessen der Länge $n = 8192$ in Abhängigkeit von α_1	126

23	Experimentelles Signifikanzniveau des modifizierten R/S-Testes und ausgewählter Periodogrammregressionstests bei 10000 Replikationen von AR(1)-Prozessen der Länge $n = 8192$ in Abhängigkeit von α_1	128
24	Experimentelles Signifikanzniveau ausgewählter Periodogrammregressionstests bei 10000 Replikationen von AR(1)-Prozessen der Länge $n = 8192$ in Abhängigkeit von α_1	129
25	Mittelwert (M), Standardabweichung (S) und mittlerer quadratischer Fehler (MSE) der R/S-Schätzer für H bei 10000 Replikationen von MA(1)-Prozessen der Länge $n = 8192$ in Abhängigkeit von β_1	132
26	Mittelwert (M), Standardabweichung (S) und mittlerer quadratischer Fehler (MSE) der Periodogrammregressionsschätzer für H bei 10000 Replikationen von MA(1)-Prozessen der Länge $n = 8192$ in Abhängigkeit von β_1	133
27	Experimentelles Signifikanzniveau des modifizierten R/S-Testes und ausgewählter Periodogrammregressionstests bei 10000 Replikationen von MA(1)-Prozessen der Länge $n = 8192$ in Abhängigkeit von β_1	135
28	Experimentelles Signifikanzniveau ausgewählter Periodogrammregressionstests bei 10000 Replikationen von MA(1)-Prozessen der Länge $n = 8192$ in Abhängigkeit von β_1	136
29	Mittelwert (M), Standardabweichung (S) und mittlerer quadratischer Fehler (MSE) der R/S-Schätzer für H bei 10000 Replikationen von ARMA(1,1)-Prozessen der Länge $n = 8192$ in Abhängigkeit von α_1 und β_1	138
30	Mittelwert (M), Standardabweichung (S) und mittlerer quadratischer Fehler (MSE) der Periodogrammregressionsschätzer für H bei 10000 Replikationen von ARMA(1,1)-Prozessen der Länge $n = 8192$ in Abhängigkeit von α_1 und β_1	139
31	Experimentelles Signifikanzniveau des modifizierten R/S-Testes und ausgewählter Periodogrammregressionstests bei 10000 Replikationen von ARMA(1,1)-Prozessen der Länge $n = 8192$ in Abhängigkeit von α_1 und β_1	140
32	Experimentelles Signifikanzniveau ausgewählter Periodogrammregressionstests bei 10000 Replikationen von ARMA(1,1)-Prozessen der Länge $n = 8192$ in Abhängigkeit von α_1 und β_1	141

33	Mittelwert (M), Standardabweichung (S) und mittlerer quadratischer Fehler (MSE) der R/S-Schätzer für H bei 10000 Replikationen von GARCH(1,1)-Prozessen der Länge $n = 8192$ in Abhängigkeit von α_1 und β_1	144
34	Mittelwert (M), Standardabweichung (S) und mittlerer quadratischer Fehler (MSE) der R/S-Schätzer für H bei 10000 Replikationen von GARCH(1,1)-Prozessen der Länge $n = 8192$ in Abhängigkeit von α_1 und β_1	145
35	Mittelwert (M), Standardabweichung (S) und mittlerer quadratischer Fehler (MSE) der Periodogrammregressionsschätzer für H bei 10000 Replikationen von GARCH(1,1)-Prozessen der Länge $n = 8192$ in Abhängigkeit von α_1 und β_1	146
36	Mittelwert (M), Standardabweichung (S) und mittlerer quadratischer Fehler (MSE) der Periodogrammregressionsschätzer für H bei 10000 Replikationen von GARCH(1,1)-Prozessen der Länge $n = 8192$ in Abhängigkeit von α_1 und β_1	147
37	Experimentelles Signifikanzniveau des modifizierten R/S-Testes und ausgewählter Periodogrammregressionstests bei 10000 Replikationen von GARCH(1,1)-Prozessen der Länge $n = 8192$ in Abhängigkeit von α_1 und β_1	149
38	Experimentelles Signifikanzniveau des modifizierten R/S-Testes und ausgewählter Periodogrammregressionstests bei 10000 Replikationen von GARCH(1,1)-Prozessen der Länge $n = 8192$ in Abhängigkeit von α_1 und β_1	150
39	Experimentelles Signifikanzniveau ausgewählter Periodogrammregressionstests bei 10000 Replikationen von GARCH(1,1)-Prozessen der Länge $n = 8192$ in Abhängigkeit von α_1 und β_1	151
40	Experimentelles Signifikanzniveau ausgewählter Periodogrammregressionstests bei 10000 Replikationen von GARCH(1,1)-Prozessen der Länge $n = 8192$ in Abhängigkeit von α_1 und β_1	152
41	Kennnummer, Anfangsdatum des Betrachtungszeitraums und Anzahl der berücksichtigten Börsentage der untersuchten Wertpapiere	159
42	Autokorrelationskoeffizienten der Rendite der 30 DAX-Werte und des DAX in Abhängigkeit vom Time-Lag T	167
43	Empirische und theoretische Autokorrelationen bei fraktalem Rauschen in Abhängigkeit von H	169

44	Periodogrammregressionsschätzer für H und Werte der Prüffunktion für den Periodogrammregressionstest für die Rendite von 15 DAX-Werten in Abhängigkeit von der Anzahl der in die Regression einbezogenen Frequenzen m	175
45	Periodogrammregressionsschätzer für H und Werte der Prüffunktion für den Periodogrammregressionstest für die Rendite von 15 DAX-Werten und des DAX in Abhängigkeit von der Anzahl der in die Regression einbezogenen Frequenzen m	176
46	Periodogrammregressionsschätzer für H und Werte der Prüffunktion für den Periodogrammregressionstest in Abhängigkeit von der Anzahl der in die Regression einbezogenen Frequenzen m und Wert der Prüffunktion der modifizierten R/S-Analyse mit geschätztem Autokorrelationszeitraum für die Rendite von 15 DAX-Werten	177
47	Periodogrammregressionsschätzer für H und Werte der Prüffunktion für den Periodogrammregressionstest in Abhängigkeit von der Anzahl der in die Regression einbezogenen Frequenzen m und Wert der Prüffunktion der modifizierten R/S-Analyse mit geschätztem Autokorrelationszeitraum für die Rendite von 15 DAX-Werten und des DAX	178
48	Ergebnisse des multiplen Periodogrammregressionstests für die Rendite der DAX-Werte und des DAX	180
49	Ergebnisse des multiplen Periodogrammregressionstests für die Rendite der DAX-Werte und des DAX	181
50	Autokorrelationskoeffizienten der Volatilität der 30-DAX-Werte und des DAX in Abhängigkeit vom Time-Lag T	188
51	Periodogrammregressionsschätzer für H und Werte der Prüffunktion für den Periodogrammregressionstest für die Volatilität von 15 DAX-Werten in Abhängigkeit von der Anzahl der in die Regression einbezogenen Frequenzen m	192
52	Periodogrammregressionsschätzer für H und Werte der Prüffunktion für den Periodogrammregressionstest für die Volatilität von 15 DAX-Werten und des DAX in Abhängigkeit von der Anzahl der in die Regression einbezogenen Frequenzen m	193
53	Periodogrammregressionsschätzer für H und Werte der Prüffunktion für den Periodogrammregressionstest in Abhängigkeit von der Anzahl der in die Regression einbezogenen Frequenzen m und Wert der Prüffunktion der modifizierten R/S-Analyse mit geschätztem Autokorrelationszeitraum für die Volatilität von 15 DAX-Werten	194

54	Periodogrammregressionsschätzer für H und Werte der Prüffunktion für den Periodogrammregressionstest in Abhängigkeit von der Anzahl der in die Regression einbezogenen Frequenzen m und Wert der Prüffunktion der modifizierten R/S-Analyse mit geschätztem Autokorrelationszeitraum für die Volatilität von 15 DAX-Werten und des DAX	195
----	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----