

Vorwort zur dritten Auflage

Der vorliegende Band ist eine Einführung in die Mechanik, die die grundlegenden experimentellen Befunde und die theoretischen Methoden zur Beschreibung und zum Verständnis der physikalischen Vorgänge und ihrer Gesetzmäßigkeiten gleichgewichtig behandelt. Entsprechend dieser Zielsetzung ist der Band gemeinsam von einem experimentellen und einem theoretischen Physiker geschrieben worden. Der Inhalt dieses Bandes wird in einem Semester behandelt. Der Stoffumfang entspricht vier Vorlesungsstunden in der Woche und zusätzlich drei Ergänzungsstunden in kleinen Gruppen. Der Band wendet sich an Studenten der Physik, Mathematik und Chemie im Grundstudium.

Experimente von grundsätzlicher oder beispielhafter Bedeutung werden besonders ausführlich und quantitativ beschrieben. Mit Hilfe von stroboskopischen Aufnahmen sind Bewegungsabläufe oft photographisch so dargestellt, daß der Leser quantitative Messungen an den Abbildungen nachvollziehen kann. Ergänzt wurde das Beispielmateriale in vielen Fällen durch Computerzeichnungen physikalischer Vorgänge, die ebenfalls streng quantitativ sind. Die theoretische Begriffsbildung geht nicht wesentlich über die der klassischen Anfängerausbildung hinaus, wird jedoch oft strenger gefaßt und vertieft. Eine knappe Darstellung wird durch konsequente Benutzung von Vektorschreibweise und gelegentlich der Tensorschreibweise erreicht. Die nötigen mathematischen Hilfsmittel werden in einem ausführlichen Anhang bereitgestellt und an vielen Beispielen veranschaulicht. Vorausgesetzt werden nur elementare Kenntnisse der Differential- und Integralrechnung.

Für die dritte Auflage wurde die *Mechanik* weitgehend neu geschrieben. Sie umfaßt jetzt die Mechanik des Massenpunktes, des starren Körpers, des elastischen Festkörpers und der Flüssigkeiten, einschließlich der Gebiete Schwingungen und Wellen sowie ein Kapitel über nichtlineare Dynamik. Ein unabhängiger Band zur *Elektrodynamik* wird (ebenfalls in dritter, völlig neubearbeiteter Auflage) in Kürze erscheinen. Ähnlich angelegte einführende Darstellungen zu weiteren Teilgebieten der Physik sind geplant. Wir verweisen einstweilen auf unser in englischer Sprache erschienenes „Bilder-

buch der Quantenmechanik“¹, in dem Computergraphiken eine zentrale Rolle bei der Veranschaulichung abstrakter Sachverhalte spielen.

Bei der Fertigstellung dieses Bandes haben wir auf vielfältige Weise Unterstützung erfahren. Herr M. Euteneuer hat gemeinsam mit Frau C. Tamarozzi, Herrn W. Kinzel und Herrn A. Pelster alle hier beschriebenen Experimente aufgebaut und die Zeichnungen und Photographien dieses Bandes angefertigt. Der Computersatz des Textes wurde von Frau U. Bender und Frau A. Wied mit Unterstützung durch Herrn T. Stroh besorgt. Herr Stroh hat auch erheblichen Anteil an der Herstellung der Computerzeichnungen. Herr R. Kretschmer, der selbst seit mehreren Jahren Übungsgruppen betreut, hat die meisten Aufgaben ausgewählt und deren Lösungen skizziert. Darüber hinaus haben er und Herr Stroh den Text kritisch gelesen und viele Korrekturen und Verbesserungen bewirkt. Ihnen allen gilt unser herzlicher Dank.

Siegen, Juni 1996

S. Brandt H. D. Dahmen

¹S. Brandt, H.D. Dahmen, *The Picture Book of Quantum Mechanics*, 2nd ed., Springer-Verlag New York 1995, ISBN 0-387-94380-3

10. Wellen auf ein- und zweidimensionalen Trägern

Bei der Diskussion der gekoppelten Oszillatoren haben wir festgestellt, daß die Energie des Gesamtsystems sich im Laufe der Zeit von einem auf den anderen Oszillator verlagern konnte. Wir erwarten, daß sich durch Hintereinanderschalten einer großen Zahl von Oszillatoren ein Energietransport bewerkstelligen läßt, ohne daß sich die Oszillatoren selbst weit von ihrer Ruhelage entfernen. Einen solchen Vorgang bezeichnet man als *Welle*.

10.1 Longitudinale Wellen

Inhalt: Modell einer linearen Kette aus elastisch gekoppelten Massenpunkten, die in longitudinaler (d. h. in Ketten-) Richtung aus ihren Ruhelagen ausgelenkt werden können. Aus der Newtonschen Bewegungsgleichung für die einzelnen Massenpunkte ergibt sich für den Kontinuumsliches der Kette die d' Alembertsche Wellengleichung. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit $c_L = \sqrt{E/\rho}$ der Longitudinalwellen ist durch Elastizitätsmodul E und Massendichte ρ des Materials gegeben.

Bezeichnungen: x_n Ruhelage, $u_n(t)$ momentane Lage, $w_n(t)$ Auslenkung des n -ten Massenpunktes einer Kette aus diskreten Massenpunkten, m Masse jedes Massenpunktes, D Federkonstante der Koppelfedern, ℓ Länge der Einzelfeder im entspannten Zustand; Δx Länge der Einzelfeder, wenn Kette in Ruhe; $\omega = \sqrt{D/m}$ Kreisfrequenz und $T = 2\pi/\omega$ Periode des Einzeloszillators, N Zahl der Federn in der Kette, L Länge der Kette, ΔT Signallaufzeit über die Länge der Kette, $w(t, x)$ Auslenkungsfunktion der Kette im Kontinuumsliches, μ lineare und ρ räumliche Massendichte, E Elastizitätsmodul, q Querschnittsfläche, c_L Ausbreitungsgeschwindigkeit der Longitudinalwelle.

Wir gehen aus von einem einfachen Modell (Abb. 10.1) einer linearen Kette von Massenpunkten der Masse m , die durch Federn der Federkonstanten D verknüpft sind. Die Federn haben im entspannten Zustand die Länge ℓ . Wir betrachten den allgemeinen Fall, in dem auch die ruhende Kette unter einer Spannung stehen kann. Alle Massenpunkte haben dann im allgemeinen Abstände $\Delta x \neq \ell$ von ihren Nachbarn. Wir bezeichnen die *Ruhelagen* der Massenpunkte mit

$$x_n = n\Delta x \quad , \quad -\infty < n < \infty \quad (10.1.1)$$

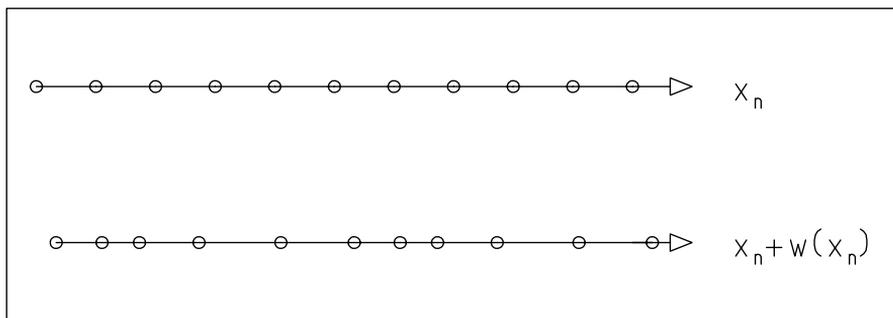


Abb. 10.1. Modell einer Massenkette als Träger longitudinaler Wellen. Die Ruhelagen der einzelnen Massenpunkte sind bei $x = x_n = n\Delta x$ (oben), die momentanen Lagen bei $u_n(t) = x_n + w_n(t)$ (unten). Dabei ist $w_n(t)$ die (longitudinale) zeitabhängige Auslenkung des Massenpunktes n aus seiner Ruhelage

und die momentanen Lagen der Massenpunkte mit

$$u_n(t) = x_n + w_n(t) \tag{10.1.2}$$

mit den Auslenkungen w_n in Richtung der Kette. Wellen mit solchen Auslenkungen bezeichnet man als Longitudinalwellen.

Die Newtonsche Bewegungsgleichung für den n -ten Massenpunkt lautet

$$m\ddot{u}_n = -D(u_n - u_{n-1} - \ell) + D(u_{n+1} - u_n - \ell) \quad . \tag{10.1.3}$$

Umrechnungen auf die Auslenkungen w liefert die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{w}_n = -D(w_n - w_{n-1}) + D(w_{n+1} - w_n) \quad . \tag{10.1.4}$$

Für große Dichte der Massenpunkte der Kette bedeutet es eine erhebliche Vereinfachung, wenn man zum Grenzfall einer kontinuierlichen Verteilung

$$w_n(t) = w(t, x) \tag{10.1.5}$$

übergeht, indem man anstelle des Index n die kontinuierliche Variable x als zweites Argument von w einführt. Sie gibt die Ruhelage des Massenpunktes an. Dementsprechend gilt für die benachbarten Punkte

$$w_{n\pm 1}(t) = w(t, x \pm \Delta x) \quad . \tag{10.1.6}$$

Damit läßt sich die Bewegungsgleichung in die Form

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(t, x) = D[w(t, x + \Delta x) - w(t, x)] - D[w(t, x) - w(t, x - \Delta x)] \tag{10.1.7}$$

bringen. Jetzt läßt sich der Grenzübergang zur kontinuierlichen Verteilung der Oszillatoren leicht durch $\Delta x \rightarrow 0$ ausführen. Man entwickelt die Differenzen auf der rechten Seite von (10.1.7) bis zur zweiten Ordnung in Δx ,

$$w(t, x \pm \Delta x) - w(t, x) = \pm \frac{\partial w}{\partial x}(t, x)\Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, x)(\Delta x)^2 + \dots \quad , \quad (10.1.8)$$

und erhält durch Einsetzen die Gleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(t, x) = \frac{D(\Delta x)^2}{m} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(t, x) \quad . \quad (10.1.9)$$

Mit der Annahme, daß im Grenzfall $\Delta x \rightarrow 0$ die Größe

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{D(\Delta x)^2}{m} = c_L^2 \quad (10.1.10)$$

gegen den festen Wert c_L^2 strebt, erhalten wir die *Wellengleichung* von d'Alembert oder *d'Alembert-Gleichung*

$$\frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad . \quad (10.1.11)$$

Die Annahme (10.1.10) ist aus folgenden Gründen plausibel. Für eine kontinuierliche Massenbelegung der x -Achse ist

$$\mu = \frac{m}{\Delta x} = \varrho q \quad (10.1.12)$$

die lineare Massendichte, d. h. ein Längenelement Δx besitzt die Masse $m = \mu \Delta x = \varrho \Delta V$. Dabei ist $\Delta V = q \Delta x$ das Volumenelement und q die Querschnittsfläche; ϱ ist die Massendichte. Die Kopplung zwischen den einzelnen Oszillatoren wird im kontinuierlichen Grenzfall durch die endliche Größe

$$\delta = D \Delta x \quad (10.1.13)$$

beschrieben, wobei

$$\delta = E q \quad (10.1.14)$$

das Produkt aus Elastizitätsmodul E (vgl. Abschn. 11.2) und der Querschnittsfläche q ist. Damit bleibt der Quotient

$$\frac{D(\Delta x)^2}{m} = \frac{D \Delta x}{m/\Delta x} = \frac{\delta}{\mu} = \frac{E}{\varrho} = c_L^2 \quad (10.1.15)$$

endlich.

Vorwegnehmend wollen wir anmerken, daß der Parameter c_L , der die Dimension einer Geschwindigkeit hat, die *Ausbreitungsgeschwindigkeit* der

d'Alembert-Wellen ist, siehe Abschn. 10.3. Die Geschwindigkeit c_L der Longitudinalwelle ist einerseits durch den Elastizitätsmodul E und die Massendichte ρ bestimmt, andererseits zeigt (10.1.10), daß in den Größen der Oszillatorkette

$$c_L = \omega \Delta x \quad (10.1.16)$$

gilt. Hier ist $\omega = \sqrt{D/m}$ die Frequenz des Einzeloszillators der Masse m und der Federkonstante D der Einzelfeder. Für eine Oszillatorkette von $N + 1$ Massenpunkten mit den Abständen Δx und der Länge

$$L = N \Delta x$$

gilt

$$\Delta T = \frac{L}{c_L} = \frac{N}{\omega} = \frac{1}{2\pi} NT \quad .$$

Die Laufzeit ΔT eines Signals über die ganze Länge der Kette hängt nur von der Anzahl der Massenpunkte und der Periode $T = 2\pi/\omega$ des Einzeloszillators ab. Sie ist unabhängig davon, wie sehr die Kette gespannt ist, d. h. unabhängig von der Länge L der Kette.

Longitudinale Wellen mit einer durch das System gegebenen Vorzugsrichtung treten z. B. auf in

- gespannten Drähten oder Fäden aus elastischem Material, die wir als *Saiten* bezeichnen,
- Stäben,
- Luftsäulen in gestreckten Rohren.

In allen Fällen wirken longitudinale elastische Kräfte zwischen den Atomen oder Molekülen des Materials, das den Träger der Welle bildet.

10.2 Transversale Wellen

Inhalt: Modell einer linearen Massenpunktkette mit transversaler Auslenkung. Aus der Bewegungsgleichung eines Massenpunktes der Kette ergibt sich beim Übergang zum Kontinuumslikes ebenfalls eine Wellengleichung vom d'Alembert-Typ. Eine Transversalwelle kann sich nur auf einer Saite ausbreiten, die gespannt ist. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit c_T transversaler Wellen ist um den Faktor \sqrt{B} kleiner als die longitudinaler Wellen. Dabei ist B die Verzerrung der Saite, d. h. ihre relative Verlängerung im Vergleich zum ungespannten Zustand.

Bezeichnungen: w_n transversale Auslenkung des n -ten Massenpunktes, m Masse jedes Massenpunktes, D Federkonstante der Kopplungsfedern, ℓ bzw. ℓ' Federlänge im entspannten bzw. gespannten Zustand, Δx Federlänge bei ruhender Kette, $B = (\Delta x - \ell)/\ell$ Verzerrung, F transversale Kraft auf Massenpunkt, $w(t, x)$ transversale Auslenkungsfunktion der Kette im Kontinuumslikes, E Elastizitätsmodul, μ bzw. ρ lineare bzw. räumliche Massendichte, $T = EB$ Spannung, c_T Ausbreitungsgeschwindigkeit der Transversalwelle.

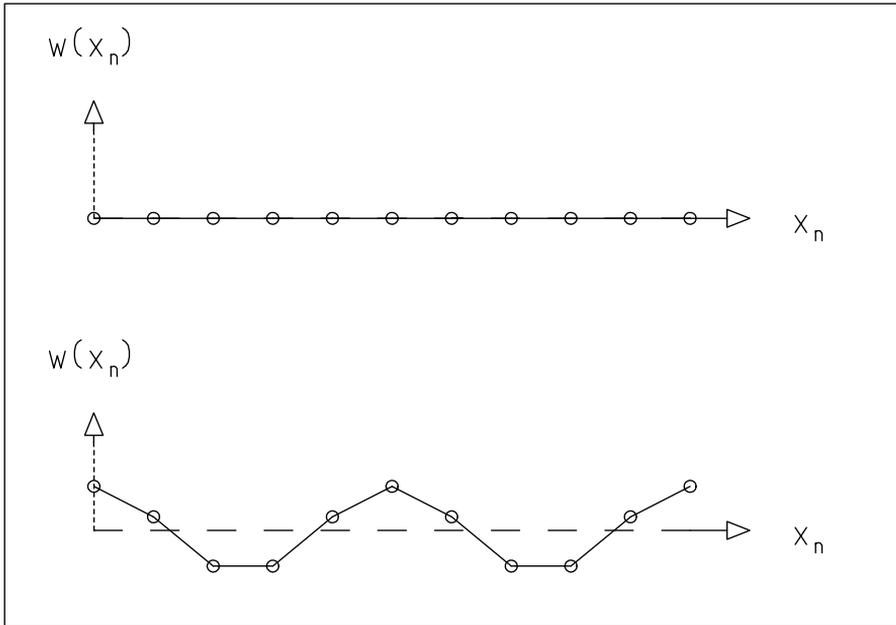


Abb. 10.2. Modell einer Massenkette als Träger transversaler Wellen. Die Ruhelagen der einzelnen Massenpunkte sind bei $(x = x_n = n\Delta x, y = 0)$ (oben), die momentanen Lagen bei $(x = x_n = n\Delta x, y = w_n(t))$ (unten). Dabei ist $w_n(t)$ die (transversale) zeitabhängige Auslenkung des Massenpunktes n aus seiner Ruhelage

Wir betrachten jetzt den Fall, daß die Auslenkungen w_n senkrecht zur Ruherichtung der Kette erfolgen, Abb. 10.2. Die Feder zwischen den Punkten $n - 1$ und n hat die Länge

$$\ell' = \sqrt{(\Delta x)^2 + (w_n - w_{n-1})^2} \quad . \quad (10.2.1)$$

Sie übt daher auf den Punkt n die Kraft vom Betrage $D(\ell' - \ell)$ aus. Ihre Komponente senkrecht zur Kette ist $-D(\ell' - \ell)(w_n - w_{n-1})/\ell'$. Wir setzen voraus, daß

$$|w_n - w_{n-1}| \ll \Delta x$$

gilt. In linearer Näherung in $(w_n - w_{n-1})/\Delta x$ erhalten wir

$$-D(\ell' - \ell) \frac{w_n - w_{n-1}}{\ell'} = -D(\Delta x - \ell) \frac{w_n - w_{n-1}}{\Delta x} \quad . \quad (10.2.2)$$

Die resultierende Senkrechtkomponente der beiden Federn links und rechts von x_n ist dann in linearer Näherung

$$F = -D \frac{\Delta x - \ell}{\Delta x} [(w_n - w_{n-1}) + (w_n - w_{n+1})] \quad . \quad (10.2.3)$$

Wir gehen jetzt wieder zum kontinuierlichen Grenzfall über, in welchem wir die Massenpunktkette eine *Saite* nennen. Für den Übergang gelten die Formeln (10.1.5) bis (10.1.8). Damit erhalten wir

$$F = D\Delta x(\Delta x - \ell) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

und als Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{D\Delta x(\Delta x - \ell)}{m} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = c_T^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (10.2.4)$$

Unter Benutzung von (10.1.12) bis (10.1.14) und des Begriffs der *Verzerrung*

$$B = \frac{\Delta x - \ell}{\ell} \quad (10.2.5)$$

erhalten wir

$$c_T^2 = \frac{D}{m} \Delta x(\Delta x - \ell) = \frac{EqB}{\mu} \frac{\ell}{\Delta x} = \frac{EB}{\varrho} \frac{1}{1+B} \quad (10.2.6)$$

Das Produkt aus Elastizitätsmodul E und Verzerrung B ist die *Spannung*

$$T = EB \quad (10.2.7)$$

der Saite. Damit ist

$$c_T^2 = \frac{T}{\varrho} \frac{1}{1+B} \quad (10.2.8)$$

Für den gewöhnlich vorliegenden Fall kleiner Verzerrung, $B \ll 1$, gilt damit in guter Näherung

$$c_T^2 \approx \frac{T}{\varrho} = B \frac{E}{\varrho} = Bc_L^2 \quad (10.2.9)$$

Die *Wellengleichung für Transversalwellen*

$$\frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (10.2.10)$$

hat damit die gleiche Form wie die für Longitudinalwellen (10.1.11).

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c_T der Transversalwelle ist durch die Wurzel aus dem Verhältnis von Spannung $T = EB$ und Massendichte ϱ gegeben. In den Größen der Oszillatorkette gilt nach (10.1.16)

$$c_T = \sqrt{B}c_L = \sqrt{B}\omega\Delta x \quad (10.2.11)$$

Da die Verzerrung B einer Saite stets klein gegen eins ist, ist die Transversalgeschwindigkeit klein gegen die Longitudinalgeschwindigkeit. Eine nicht gespannte Saite hat in der hier gewählten linearen Näherung keine Transversalwellen.

10.3 Allgemeine Lösung der Wellengleichung

Inhalt: Spezielle Lösungen der d'Alembert-Gleichung in nur einer Raumdimension haben die Form $w_+(t, x) = w(-ct + x)$, und $w_-(t, x) = w(ct + x)$. Sie sind Funktionen des Arguments $-ct + x$ bzw. $ct + x$ und beschreiben Auslenkungsmuster, die sich, in räumlicher Form unverändert, mit der Geschwindigkeit c in positive (für w_+) bzw. negative (für w_-) x -Richtung verschieben. Die allgemeine Lösung hat die Form $w_1(-ct + x) + w_2(ct + x)$. Eine Funktion w_+ oder w_- , die stets nur in einem eng begrenzten Raumbereich wesentlich von null verschieden ist, heißt Soliton.

Bezeichnungen: $w(t, x)$ Auslenkungsfunktion; $w_+ = w(-ct + x)$ nach rechts laufende, $w_- = w(ct + x)$ nach links laufende Welle; x_0 Ort maximaler Auslenkung zur Zeit $t = 0$ für ein Gaußsches Soliton, σ Breite des Solitons, v_G Gruppengeschwindigkeit.

Da die Wellengleichungen (10.1.11) bzw. (10.2.10) für longitudinale bzw. transversale Wellen die gleiche Form haben, schreiben wir sie jetzt ohne Unterscheidung der Geschwindigkeiten als

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad . \quad (10.3.1)$$

Für eine solche Wellengleichung in nur einer Raumdimension können wir die Differentiationen in der folgenden Form faktorisieren:

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) w(t, x) = 0$$

bzw.

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) w(t, x) = 0 \quad . \quad (10.3.2)$$

Damit ist klar, daß es Lösungen der d'Alembert-Gleichung in einer Raumdimension gibt, die eine der beiden Differentialgleichungen

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) w_+(t, x) = 0 \quad (10.3.3)$$

oder

$$\left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) w_-(t, x) = 0 \quad (10.3.4)$$

erfüllen.

Wir beschreiben die Auslenkungsfunktion w zu einer festen Zeit $t = 0$ durch $w(0, x) = w(x)$. Nehmen wir an, daß sich das Auslenkungsmuster mit der Geschwindigkeit c in positive x -Richtung verschiebt, ohne dabei seine Form zu ändern, so wird es zu einer Zeit t durch

$$w_+(t, x) = w(-ct + x) \quad (10.3.5)$$

beschrieben. Durch Einsetzen bestätigt man, daß dieser Ansatz die d'Alembert-Gleichung löst. Das gleiche gilt für einen Ansatz der Form

$$w_-(t, x) = w(ct + x) \quad , \quad (10.3.6)$$

der die Verschiebung des Auslenkungsmusters in negative x -Richtung wiedergibt. Die Funktionen $w_+(t, x)$ und $w_-(t, x)$ lösen gerade die Gleichungen (10.3.3) bzw. (10.3.4). Die allgemeine Lösung der d'Alembert-Gleichung besteht aus einer Summe zweier beliebiger Funktionen w_1 und w_2 der Argumente $(-ct + x)$ bzw. $(ct + x)$,

$$w(t, x) = w_1(-ct + x) + w_2(ct + x) \quad . \quad (10.3.7)$$

Ist das Anregungsmuster w zu einer Zeit nur in einem räumlich eng begrenzten Bereich wesentlich von null verschieden und hat es nur eines der beiden Argumente $(-ct + x)$ oder $(ct + x)$, so spricht man von einem *Soliton*. Als ein Beispiel wählen wir zur Zeit $t = 0$ für $w(x)$ eine *Gaußsche Glockenkurve* um die Stelle x_0 ,

$$w(t, x) = w_0 \exp \left[-\frac{(-ct + x - x_0)^2}{2\sigma^2} \right] \quad . \quad (10.3.8)$$

Der Parameter σ ist ein Maß für die *Breite* der Glockenkurve. Abbildung 10.3 zeigt die zeitliche Entwicklung des Auslenkungsmusters. Die Gaußsche Glockenkurve wandert mit der Geschwindigkeit c in positive x -Richtung.

Das erweist auch die explizite Form der Funktion w in (10.3.8). Das Maximum der Glockenkurve ist stets bei verschwindendem Argument der Exponentialfunktion, d. h. bei

$$x = x_0 + ct \quad . \quad (10.3.9)$$

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Wellenformation endlicher räumlicher Ausdehnung heißt Gruppengeschwindigkeit v_G . Sie ist durch

$$v_G = \frac{dx}{dt} = c \quad (10.3.10)$$

gegeben.

10.4 Harmonische Wellen

Inhalt: Harmonische Wellen $w_{\pm} = w_0 \cos[(2\pi/\lambda)(\mp ct + x - x_0)]$ stellen zu fester Zeit Wellenformen im Raum mit der Wellenlänge λ und an festem Ort Schwingungen in der Zeit mit der Periode $T = \lambda/c$ dar. Einführung der Begriffe Wellenzahl, Kreisfrequenz, Frequenz und Phasengeschwindigkeit.

Bezeichnungen: $w_{\pm}(t, x)$ Auslenkungsfunktionen, w_0 Amplitude, c Ausbreitungsgeschwindigkeit, x_0 Ort eines Maximums von w_{\pm} zur Zeit $t = 0$, λ Wellenlänge, k Wellenzahl, T Periode, ν Frequenz, ω Kreisfrequenz, v_p Phasengeschwindigkeit.

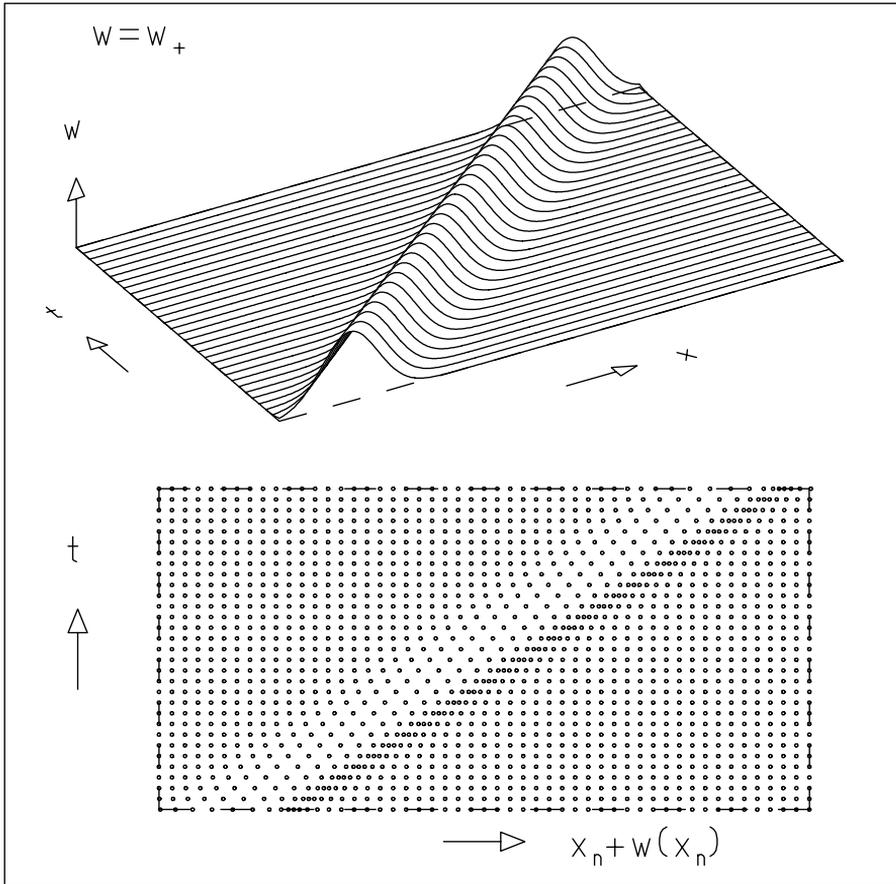


Abb. 10.3. *Oben:* Ein glockenförmiges Auslenkungsmuster verschiebt sich mit konstanter Geschwindigkeit in positive x -Richtung (Solitonwelle). Die Darstellung ist ein Graph der Funktion (10.3.8), die sowohl longitudinale als auch transversale Solitonwellen darstellt. Sie ist zugleich ein Bild einer Saite, auf der eine transversale Solitonwelle läuft, für verschiedene feste Zeiten t . *Unten:* Massenpunkte einer Oszillatorkette, auf der eine longitudinale Solitonwelle läuft, für verschiedene feste Zeiten t

Neben Wellenformen endlicher räumlicher Ausdehnung, wie wir sie im letzten Abschnitt besprochen haben, kann man auch unendlich ausgedehnte Wellenzüge diskutieren. Man denkt sie sich am einfachsten durch periodische harmonische Anregung erzeugt. Wir betrachten daher als Beispiel die *harmonischen Wellen*. Das bedeutet für die Funktion w die Wahl von Kosinus oder Sinus. Da beide nur durch die feste Phase $\pi/2$ voneinander verschieden sind, betrachten wir für die folgende Diskussion nur die Ausdrücke

$$w_+(t, x) = w_0 \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (-ct + x - x_0) \right] \quad (10.4.1)$$

bzw.

$$w_-(t, x) = w_0 \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (ct + x - x_0) \right] . \quad (10.4.2)$$

Zwei benachbarte Punkte gleicher Phase des Kosinus – also etwa zwei aufeinanderfolgende Wellenmaxima – haben im Argument gerade den Abstand 2π , denn

$$\cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (-ct + x - x_0) + 2\pi \right] = \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda} (-ct + x - x_0) \right] . \quad (10.4.3)$$

Das Argument läßt sich in folgender Weise umformen:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\lambda} (-ct + x - x_0) + 2\pi &= \frac{2\pi}{\lambda} (-ct + x - x_0 + \lambda) \\ &= \frac{2\pi}{\lambda/c} \left(-t + \frac{x - x_0 + \lambda}{c} \right) . \end{aligned}$$

Die erste Gleichung führt auf die Interpretation der Größe λ als *Wellenlänge*, d. h. als der räumliche Abstand zwischen zwei Punkten gleicher Phase zu fester Zeit t . Die zweite Gleichung erweist die Zeit

$$T = \frac{\lambda}{c} \quad (10.4.4)$$

als die *Periode* der von der Welle am festen Ort $(x - x_0)$ verursachten Schwingung.

Die Größe

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (10.4.5)$$

heißt *Wellenzahl*. Der Quotient

$$\nu = \frac{1}{T} \quad (10.4.6)$$

heißt wieder *Frequenz*, das Verhältnis

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \quad (10.4.7)$$

wieder *Kreisfrequenz*. Es besteht die Beziehung

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = c \frac{2\pi}{\lambda} = ck . \quad (10.4.8)$$

Die Größe

$$v_p = \frac{\lambda}{T} = c \quad (10.4.9)$$

ist die Geschwindigkeit eines Punktes fester Phase bei der Ausbreitung der Welle. Sie heißt in diesem Zusammenhang deshalb *Phasengeschwindigkeit* v_p . Sie ist für die Lösungen der d'Alembert-Gleichung gleich dem in der Gleichung auftretenden Geschwindigkeitsparameter c und daher von der Wellenlänge der betrachteten harmonischen Welle unabhängig. Für Wellengleichungen von anderem Typ als dem der d'Alembert-Gleichung ist die Phasengeschwindigkeit v_p abhängig von der Wellenlänge λ bzw. der Wellenzahl $k = 2\pi/\lambda$. In diesen Fällen ist sie nicht gleich der Gruppengeschwindigkeit v_G endlich ausgedehnter Wellenformen, wie der Gaußschen Glockenkurve im vorigen Abschnitt.

Abbildung 10.4 zeigt die Ausbreitung einer harmonischen Welle in positive x -Richtung. Man sieht die Wanderung des Wellenberges, der sich bei $t = 0$ am unteren linken Rand des Bildes befindet und sich mit der Zeit nach rechts verschiebt. Das ganze Wellenmuster zur Zeit $t = 0$ versetzt sich mit fester Geschwindigkeit c , in der Form ungeändert, nach rechts. Die Strecke λ zwischen zwei Wellenbergen erweist sich hier ganz anschaulich als Wellenlänge. Die Zeit T , die benötigt wird, um ein Wellenmaximum gerade die Strecke λ der Wellenlänge durchlaufen zu lassen, ist die Periode der Welle. In Abb. 10.4 ist eine Periode gerade die Zeit, die insgesamt abgebildet ist. Sie ist für einen festen Ort die Periode einer Schwingung der Auslenkung $w(t, x)$ der harmonischen Welle.

10.5 Superpositionsprinzip

Inhalt: Beliebige Linearkombinationen von Lösungen der d'Alembert-Gleichung sind ihrerseits Lösungen.

Da die Wellenfunktion $w(t, x)$ in der d'Alembert-Gleichung nur linear auftritt, ist mit jeder Lösung $w_1(t, x)$ auch ein konstantes Vielfaches $aw_1(t, x)$ Lösung. Ferner ist mit jeder weiteren Lösung $w_2(t, x)$ auch jede Linearkombination

$$w(t, x) = aw_1(t, x) + bw_2(t, x) \quad (10.5.1)$$

Lösung der d'Alembert-Gleichung.

Diese Aussage ist gerade der Inhalt des *Superpositionsprinzips*. Als ein Beispiel haben wir in Abb. 10.6 die Funktion $w = w_+ + w_-$ aus den weiter oben in Abb. 10.6 dargestellten nach rechts bzw. links laufenden Glockenkurven überlagert. Die Abbildung zeigt, daß wir einen besonders hohen Berg beobachten, wenn beide Solitonen am gleichen Ort sind. Anschließend laufen die beiden Solitonen unverändert auseinander.

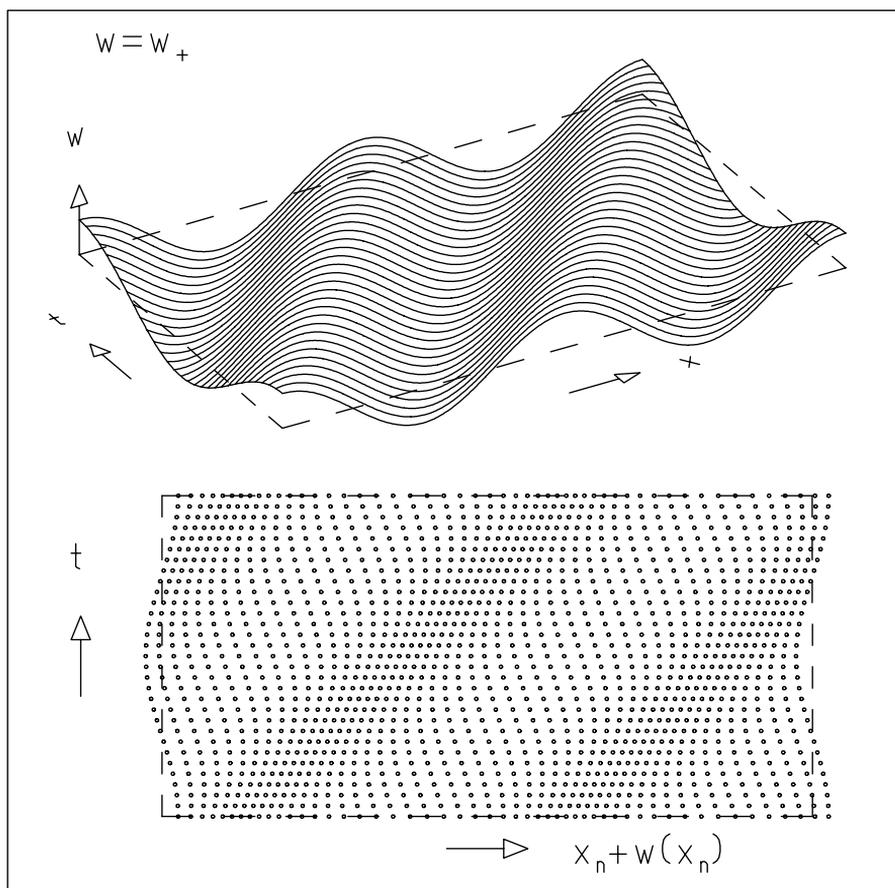


Abb. 10.4. *Oben:* Zeitliche Entwicklung einer harmonischen Welle, die in die positive x -Richtung wandert. Abgebildet ist ein Bereich in x der Länge 2λ . Der abgebildete Bereich in t entspricht gerade einer Periode T . Die Darstellung ist ein Graph der Funktion (10.4.1), die sowohl longitudinale als auch transversale harmonische Wellen darstellt. Sie ist zugleich ein Bild einer Saite, auf der eine transversale harmonische Welle läuft, für verschiedene feste Zeiten t . *Unten:* Massenpunkte einer Oszillatorkette, auf der eine longitudinale harmonische Welle läuft, für verschiedene feste Zeiten t

10.6 Energiedichte und Energiestromdichte

Inhalt: Einführung der kinetischen, potentiellen und gesamten Energiedichte. Aus der Wellengleichung wird die Kontinuitätsgleichung gewonnen. Sie sagt aus, daß eine zeitliche Änderung der Energiedichte mit einer räumlichen Änderung der Energiestromdichte einhergeht.

Bezeichnungen: m bzw. D Massen bzw. Federkonstanten in einer Massenpunktkette, Δx Abstand zweier Massenpunkte bei ruhender Kette, w_n Auslenkung des n -ten Massenpunktes, w bzw. μ Auslenkungsfunktion bzw. Massendichte bei kontinuierlicher Kette, c Ausbreitungsgeschwindigkeit; η_{kin} , η_{pot} , η kinetische, potentielle und gesamte Energiedichte; S_x Energiestromdichte in x -Richtung.

eines aus Knotenlinien gebildeten Rechtecks, befindet. Aus Gebieten, in denen die Geschwindigkeit \dot{w} der Membran einen bestimmten Wert überschreitet, wird der Sand zu weniger stark bewegten Gebieten geschüttelt. Die Grenzen zwischen sandfreien und sandigen Gebieten haben deshalb die Form der Linien in Abb. 10.16.

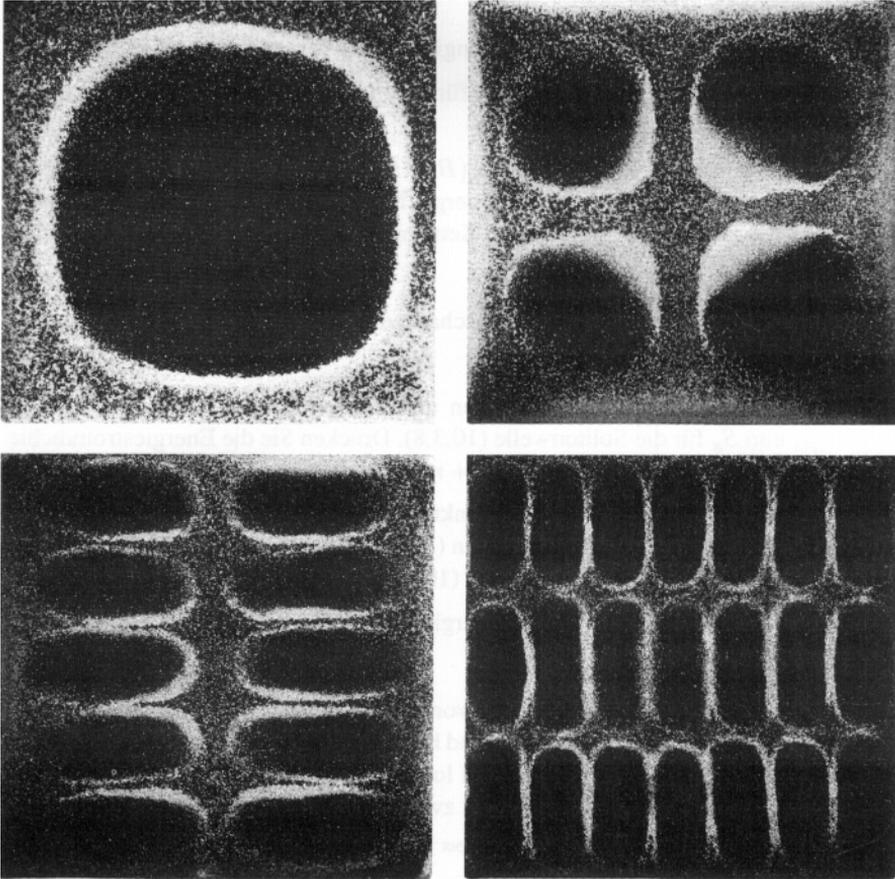


Abb. 10.17. Chladnische Klangfiguren auf einer eingespannten quadratischen Membran

10.11 Aufgaben

10.1: Wir betrachten im folgenden den Anteil der potentiellen Energiedichte einer Welle auf einer vorgespannten Kette (d. h. $\Delta x \neq \ell$), der über die in der ruhenden Kette gespeicherte Energie hinausgeht.

(a) Zeigen Sie, daß für Transversalwellen auf einer vorgespannten Kette die Beziehung (10.6.5) gilt.

(b) Zeigen Sie, daß man für die potentielle Energiedichte einer Longitudinalwelle auf einer vorgespannten Kette die Beziehung

$$\tilde{\eta}_{\text{pot}} = \frac{\mu c_L^2}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{2B}{B+1} \frac{\partial w}{\partial x} \right]$$

erhält. Dabei ist $B = (\Delta x - \ell)/\ell$ die (longitudinale) Verzerrung der Kette.

(c) Wie lautet die Kontinuitätsgleichung für $\tilde{\eta} = \eta_{\text{kin}} + \tilde{\eta}_{\text{pot}}$, welchen Ausdruck erhält man für die Energiestromdichte?

(d) Zeigen Sie, daß der Zusatzterm $\mu c_L^2 (B/(B+1)) \partial w / \partial x$ in $\tilde{\eta}_{\text{pot}}$ keinen Beitrag zur in der Kette gespeicherten Gesamtenergie liefert. (Beachten Sie, daß eine longitudinale Welle auf einer vorgespannten Kette nur mit festen Enden realisiert werden kann.)

Aufgrund der in (d) zu zeigenden Eigenschaft wird auch für Longitudinalwellen der kanonische Ausdruck (10.6.5) benutzt.

10.2: Berechnen Sie die Energiedichten und Energiestromdichte η_{kin} , η_{pot} , $\eta = \eta_{\text{kin}} + \eta_{\text{pot}}$ und S_x für die Solitonwelle (10.3.8). Drücken Sie die Energiestromdichte durch die Gesamtenergiedichte $\eta = \eta_{\text{kin}} + \eta_{\text{pot}}$ und die Geschwindigkeit c aus.

10.3: (a) Zeigen Sie, daß die Wellenfunktionen (10.8.2) und (10.8.3) die d'Alembert-Gleichung und die Randbedingungen (10.8.1) erfüllen, wenn man die Kreisfrequenzen ω_n und Wellenzahlen k_n gemäß (10.8.4) wählt.

(b) Welche Werte nimmt die Gesamtenergie $E_{\text{tot}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}$ für diese Lösungen an?

10.4: Berechnen Sie unter Benutzung von (10.7.8) und (10.7.9) die in Abb. 10.8 graphisch dargestellten Energiedichten und Energiestromdichten η_{kin} , η_{pot} , $\eta = \eta_{\text{kin}} + \eta_{\text{pot}}$ und S_x für stehende Wellen mit zwei losen bzw. zwei festen Enden. Zeigen Sie, daß η und S_x für die stehende Welle mit zwei losen Enden und die mit zwei festen Enden identisch sind, während η_{kin} und η_{pot} in diesen Fällen ihre Rollen vertauschen.

10.5: Berechnen Sie die über eine zeitliche Periode gemittelte Energiestromdichte

$$\langle S_x \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T S_x(t, x) dt$$

(a) für die harmonischen Wellen w_+ und w_- , Gl. (10.4.1) und (10.4.2).

(b) für die stehenden Wellen an festen bzw. losen Enden, (10.7.8) und (10.7.9).

Erläutern Sie die Resultate.

10.6: Zeigen Sie die Orthonormalitätsrelation (10.9.5).

9.4 Stabilität herrscht für $f'(x_0) = -\lambda < 0$, weil $w = w_0 e^{-\lambda t}$ eine Lösung der linearisierten Bewegungsgleichung ist.

9.5 (a) Die Gleichgewichtslagen sind $\vartheta_1 = 0, \vartheta_2 = \pi$. Für $\omega > \omega_c = \sqrt{g/R}$ liegt eine weitere Gleichgewichtslage bei $\vartheta_3 = \arccos(g/(\omega^2 R))$. Dieser letzte Gleichgewichtspunkt zweigt für $\omega > \omega_c$ von $\vartheta_1 = 0$ ab. (b) Für $\xi = \vartheta - \vartheta_i \ll 1, i = 1, 2, 3$, lautet die linearisierte Bewegungsgleichung $\ddot{\xi} + [g \cos \vartheta_i / R - \omega^2 (2 \cos^2 \vartheta_i - 1)] \xi = 0$. Daraus ergibt sich, daß ϑ_1 nur für $\omega < \omega_c$ stabil ist; ϑ_2 ist immer instabil. Die Gleichgewichtslage ϑ_3 ist im Falle ihrer Existenz immer stabil.

Kapitel 10

10.1 (a) Mit den Bezeichnungen aus Abschn. 10.2 gilt für die Transversalwelle $E_{\text{pot}}^{\text{ges}} = D(\ell' - \ell)^2/2$ und $E_{\text{pot}}^0 = D(\Delta x - \ell)^2/2$, so daß $E_{\text{pot}} = E_{\text{pot}}^{\text{ges}} - E_{\text{pot}}^{(0)} = D(\ell'^2 - 2\ell\ell' - \Delta x^2 + 2\Delta x\ell)$. Mit Hilfe von (10.2.1) und der Näherung $\sqrt{1 - (w_n - w_{n-1})^2/\Delta x^2} \approx 1 + (w_n - w_{n-1})^2/(2\Delta x^2)$ erhält man das gewünschte Resultat. (b) Für die Longitudinalwelle gilt $E_{\text{pot}}^{\text{ges}} = D(\Delta x - \ell + w_{n+1} - w_n)^2/2$ und $E_{\text{pot}}^{(0)} = D(\Delta x - \ell)^2/2$. Damit erhält man für $E_{\text{pot}} = E_{\text{pot}}^{\text{ges}} - E_{\text{pot}}^{(0)}$ die Beziehung $E_{\text{pot}}/\Delta x = (\mu c_L^2/2)[2(\Delta x - \ell)(w_{n+1} - w_n) + (w_{n+1} - w_n)^2]/\Delta x^2$, woraus man im Kontinuumsmites den angegebenen Ausdruck erhält. (c) Da der Zusatzterm $\mu c_L^2(B/(B+1))\partial w/\partial x$ in $\tilde{\eta}_{\text{pot}}$ linear in $\partial w/\partial x$ ist, kann er in der Kontinuitätsgleichung durch einen Zusatzterm in der Energiestromdichte kompensiert werden: Es gilt $\partial \tilde{\eta}/\partial t + \partial \tilde{S}_x/\partial x = 0$, mit der Energiestromdichte $\tilde{S}_x = -\mu c_L^2[(\partial w/\partial t)(\partial w/\partial x) + (B/(B+1))\partial w/\partial t]$. (d) Die in der Kette gespeicherte Gesamtenergie ist $E^{\text{ges}} = \int_{x=0}^L \tilde{\eta} dx$. Darin liefert der Zusatzterm in $\tilde{\eta}_{\text{pot}}$ den Beitrag $\mu c_L^2(B/(B+1)) \int_{x=0}^L (\partial w/\partial x) dx = \mu c_L^2(B/(B+1))(w(t, L) - w(t, 0))$, der verschwindet, weil man eine Kette nur dann longitudinal vorspannen kann, wenn man sie an den Enden fest einspannt, $w(t, L) = w(t, 0) = 0$.

10.2 $\eta_{\text{kin}}(t, x) = \eta_{\text{pot}}(t, x) = \eta(t, x)/2 = (\mu/2)c^2 w^2(t, x)(x - x_0 - ct)^2/\sigma^4$, $S_x(t, x) = \mu c^3 w^2(t, x)(x - x_0 - ct)^2/\sigma^4 = c\eta(t, x)$.

10.3 (a) Es gilt $\partial^2 w_{gn}/\partial t^2 = -\omega_n^2 w_{gn}$ und $\partial^2 w_{gn}/\partial x^2 = -k_n^2 w_{gn}$, so daß w_{gn} die d'Alembert-Gleichung nur löst, wenn $\omega_n = ck_n$ gesetzt wird. Um die Randbedingungen $w_{gn}(t, 0) = w_{gn}(t, L) = 0$ zu erfüllen, muß $k_n = n\pi/L$ gelten. Für w_{un} argumentiert man ganz analog. (b) $E = (\pi/2)^2 \mu c^2 w_{gu}^{(0)2} n^2/L$. Für feste Amplituden $w_{gu}^{(0)}$ können also nur diskrete Energien angeregt werden.

10.4 (i) Für die Lösung (10.7.8) für zwei lose Enden gilt $\eta_{\text{kin}} = 2\mu u_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega t \cos^2[2\pi(x - x_r)/\lambda]$, $\eta_{\text{pot}} = 2\mu u_0^2 \omega^2 \cos^2 \omega t \sin^2[2\pi(x - x_r)/\lambda]$, $\eta = 2\mu u_0^2 \omega^2 \{\sin^2 \omega t \cos^2[2\pi(x - x_r)/\lambda] + \cos^2 \omega t \sin^2[2\pi(x - x_r)/\lambda]\}$ und $S_x = -\mu c u_0^2 \omega^2 \sin(2\omega t) \sin[4\pi(x - x_r)/\lambda]$, wobei (10.4.8) benutzt wurde. (ii) Für die Lösung (10.7.9)

für zwei feste Enden gilt $\eta_{\text{kin}} = 2\mu u_0^2 \omega^2 \cos^2 \omega t \sin^2 [2\pi(x - x_r)/\lambda]$, $\eta_{\text{pot}} = 2\mu u_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega t \cos^2 [2\pi(x - x_r)/\lambda]$; η und S_x sind in der Tat wie in (i).

10.5 (a) Für w_+ bzw. w_- gilt $\langle S_x \rangle = \pm(\mu/2)c^3 k^2 w_0^2$. (b) Für die stehenden Wellen gilt $\langle S_x \rangle = 0$. Bei einer stehenden Welle findet also im zeitlichen Mittel über eine Periode kein Energiefluß statt.

10.7 (a) $a_n = 4\sqrt{L}h \sin(n\pi/2)/(\pi n)^2$, insbesondere verschwinden alle a_{2n} ; (b) $a_n = \sqrt{L}h q^2 \sin(np\pi/q)/(p(q-p)(\pi n)^2)$, d. h. alle a_n , bei denen n ein ganzzahliges Vielfaches von q ist, verschwinden.

10.8 (a) Durch Differenzieren der drei Funktionen $w_I(t, x)$, $w_{II}(t, x)$ und $w_{III}(t, x)$ in den entsprechenden Bereichen bestätigt man $\partial^2 w_J / \partial t^2 = 0$, $\partial^2 w_J / \partial x^2 = 0$, $J = I, II, III$. (b) $w_0 = \alpha b$, $v_2 = \alpha v_1$. (c) $w_I(t, x) = \alpha(x + v_1 t)/2 + \alpha(x - v_1 t)/2$, $w_{II}(t, x) = \alpha(b + x - v_1 t)/2 + \alpha(b - x - v_1 t)/2$, $w_{III}(t, x) = \alpha(2b - x + v_1 t)/2 + \alpha(2b - x - v_1 t)/2$. Da jede Lösung der d'Alembert-Gleichung als Summe von Funktionen von $x + c_T t$ bzw. $x - c_T t$ geschrieben werden kann, muß $v_1 = c_T$ gelten. Man kann übrigens für $w(t, x)$ ganz explizit zeigen, daß $v_1 = c_T$ gelten muß, wenn man die Knickstellen korrekt mit Hilfe von Distributionen beschreibt. (d) Die Periodenlänge ist $T = 4b/c_T$, daher gilt für die Frequenz $\nu = c_T/(4b)$. (e) Für $T/4 < t < T/2$ gilt

$$w(t, x) = \begin{cases} w_I(t, x) & = -\alpha x \\ w_{II}(t, x) & = -v_2(t - T/4) \\ w_{III}(t, x) & = -\alpha(L - x) \end{cases}$$

in den Bereichen (I): $0 \leq x < v_1(t - T/4)$, (II): $v_1(t - T/4) \leq x < L - v_1(t - T/4)$, (III): $L - v_1(t - T/4) \leq x \leq L$. Für $T/2 < t < 3T/4$ gilt

$$w(t, x) = \begin{cases} w_I(t, x) & = -\alpha x \\ w_{II}(t, x) & = -\alpha b + v_2(t - T/2) \\ w_{III}(t, x) & = -\alpha(L - x) \end{cases}$$

in den Bereichen (I): $0 \leq x < b - v_1(t - T/2)$, (II): $b - v_1(t - T/2) \leq x < b + v_1(t - T/2)$, (III): $b + v_1(t - T/2) \leq x \leq L$. Für $3T/4 < t \leq T$ gilt

$$w(t, x) = \begin{cases} w_I(t, x) & = \alpha x \\ w_{II}(t, x) & = v_2(t - 3T/4) \\ w_{III}(t, x) & = \alpha(L - x) \end{cases}$$

in den Bereichen (I): $0 \leq x < v_1(t - 3T/4)$, (II): $v_1(t - 3T/4) \leq x < L - v_1(t - 3T/4)$, (III): $L - v_1(t - 3T/4) \leq x \leq L$.

10.9 (a)

$$\eta_{\text{kin}} = \begin{cases} 0 & \text{(I)} \\ (\mu/2)\alpha^2 c_T^2 & \text{(II)} \\ 0 & \text{(III)} \end{cases}, \quad \eta_{\text{pot}} = \begin{cases} (\mu/2)\alpha^2 c_T^2 & \text{(I)} \\ 0 & \text{(II)} \\ (\mu/2)\alpha^2 c_T^2 & \text{(III)} \end{cases},$$