

# Vorwort zur deutschen Übersetzung

Wir sind sehr erfreut darüber, daß sich der Springer-Verlag entschlossen hat, dieses Buch ins Deutsche zu übersetzen und hoffen, daß die Leser es anregend finden werden.

Wir haben die Gelegenheit genutzt, um einige Fehler und Mehrdeutigkeiten, die in der dritten englischen Ausgabe noch enthalten waren oder sich darin eingeschlichen hatten, zu korrigieren, und möchten dem Übersetzer, Dr. H. Becker, und dem Springer-Verlag, insbesondere Frau A. Endemann, dafür danken, daß sie uns auf einige davon aufmerksam gemacht haben. Wir möchten den Mitarbeitern des Springer-Verlags auch für ihre Geduld und das Eingehen auf unsere Wünsche danken.

Wir haben erfreut festgestellt, daß die Überarbeitung der Abbildungen, die für diese Ausgabe notwendig wurde, aufs sachverständigste ausgeführt wurde und daß die Länge der deutschen Sätze im allgemeinen *kürzer* ist als bei der englischen Ausgabe. Wir hoffen, daß diese beiden Punkte zur Klarheit des Buches beitragen werden.

Die Übungsaufgaben erscheinen hier am jeweiligen Kapitelende, aber wir möchten darauf hinweisen, daß zahlreiche davon in dem Sinne „global“ sind, daß sie Konzepte von verschiedenen, möglicherweise sogar später folgenden Kapiteln des Buches verwenden. Die Lösungen der Übungsaufgaben sind in diese Ausgabe mit aufgenommen worden, und wir möchten hier Dr. Erez Ribak für seine Hilfe bei der Erstellung danken. Einige der Aufgaben haben sich als schwieriger herausgestellt, als wir zunächst angenommen haben, und die Antworten sind dementsprechend lang. Wir haben versucht, die zugrundeliegenden physikalischen Konzepte so weit wie möglich zu betonen, möglicherweise zu Lasten mathematischer Exaktheit. Wir haben keine Details zu den Rechenmethoden, die wir zu numerischen Lösungen verwandt haben, angegeben; einige wurden mit Hilfe des Programms „Mathematica“ berechnet. In den wenigen Fällen, in denen die Lösung aus der direkten Anwendung einer Formel aus dem Text besteht, haben wir nur die Antwort angegeben. Wir sind sicher, daß auch weiterhin Fehler oder Unklarheiten im Buch vorkommen, und sind Lesern dankbar, wenn sie uns darauf per Post oder Email hinweisen ([phr22sl@physics.technion.ac.il](mailto:phr22sl@physics.technion.ac.il), [phr07dt@tx.technion.ac.il](mailto:phr07dt@tx.technion.ac.il)).

Haifa, Mai 1997

*S. G. Lipson  
D. S. Tannhauser*

# Vorwort

## zur dritten englischen Auflage

Die Aufforderung des Verlags, „Optical Physics“ für eine dritte Auflage zu überarbeiten, hat uns sehr ermutigt. Die Aufforderung beinhaltete aber auch viel mehr Arbeit, als wir vorhergesehen hatten; auf der einen Seite wurden wir speziell danach gefragt, die Behandlung der geometrischen Optik, der Faseroptik und der Quantenoptik zu vertiefen, auf der anderen Seite sollte der Umfang des Buches nicht zunehmen. Dazu bedurfte es offensichtlich einer Neufassung der restlichen Kapitel des Buches. Speziell die Nachfrage nach den letzten beiden Themengebieten haben wir begrüßt. Sowohl die Faseroptik als auch die Quantenoptik haben im letzten Jahrzehnt große Fortschritte gemacht, und ein grundsätzliches Verständnis von beiden ist nicht nur für Spezialisten, sondern für jeden Studenten der Physik wichtig. Da wir keine Mathematiker sind, hoffen wir, daß unser Zugang zu diesen Themengebieten – in Analogie zu wohlbekannten, gelösten Problemen aus der Quantenmechanik – bei dem Teil unserer Leserschaft Anklang findet, dem es ebenso geht. Wir haben bei der Bearbeitung der beiden Gebiete mit Sicherheit viel gelernt. Wir haben beschlossen, die geometrische Optik in einer praxisnahen Formulierung darzustellen, von der wir hoffen, daß sie dadurch für Studenten, die heutzutage sicheren Umgang mit Computern haben, attraktiv wird. Wir haben uns dabei hauptsächlich auf die Gaußsche Optik beschränkt, die für einen Physiker im allgemeinen den meisten Nutzen bringt.

Wir haben die vorangegangenen Auflagen dieses Buches seit mehr als einem Jahrzehnt als Grundlage zweier Vorlesungen verwendet. Eine davon ist ein Kurs während des Grundstudiums, der als Voraussetzungen ein Abiturwissen in Optik sowie elementare Kenntnisse der Wellentheorie und Quantenmechanik erfordert. Diese Vorlesung behandelt das meiste aus den Kapiteln 3, 4, 7, 8, 9, 11 und 12. Wir haben auch einen Hauptstudiumskurs in fortgeschrittenen optischen Problemen gehalten, der unter anderem die Kapitel 6, 10, 13 und 14 abdeckt.

Diese neue Auflage enthält auch ein erweitertes und aktualisiertes Literaturverzeichnis. Soweit es möglich war, haben wir uns auf Lehrbücher und Übersichtsartikel bezogen, die Material in einer pädagogischen Aufbereitung enthalten. Zusätzlich haben wir mehrere populärwissenschaftliche Abhandlungen aufgeführt, die besonders für Studienanfänger nützlich sind. Besonders bei den fortgeschritteneren Themen war es unvermeidbar, Artikel aus Fachzeitschriften aufzunehmen, von denen wir hoffen, daß sie wenigstens einen Teil der Begeisterung über die moderne optische Forschung vermitteln können.

Es ist traurig, festhalten zu müssen, daß Henry Lipson nur beim ersten Treffen der drei Autoren teilnehmen konnte, bei dem die allgemeine Ausrichtung der Neuauflage festgelegt wurde. Er starb einige Tage nach dieser Sitzung; aber natürlich beeinflussen die Auswirkungen seiner persönlichen Auffassung der Optik und der Art und Weise, wie sie gelehrt werden sollte, noch sehr stark die Darstellung. Wir haben aus diesem Grund

den Schwerpunkt auf der Fouriertransformation als grundlegendes Werkzeug genauso beibehalten wie die zahlreichen Beispiele aus dem Bereich kristallographischer Methoden. Soweit dies möglich war, haben wir die Theorie mit Photographien echter Laborergebnisse verdeutlicht; zahlreiche Experimente aus der zweiten Auflage wurden wiederholt und hoffentlich verbessert.

Wir haben auch den Aufgabenteil überarbeitet, der jetzt insgesamt etwa einhundert Aufgaben umfaßt. Die meisten davon zielen darauf ab, das Nachdenken zu fördern und zielen weniger auf Prüfungsvorbereitung. Wir planen, die Lösungen zu den Aufgaben zu publizieren, die schriftlich von den Autoren erhalten werden können (E-Mail: PHR22SL@PHYSICS.TECHNION.AC.IL, PHR07DT@TX.TECHNION.AC.IL).<sup>1</sup>

Es ist uns eine Freude, den zahlreichen Personen zu danken, die uns bei der Erstellung dieser Auflage geholfen haben. Wir müssen hier speziell Sam Braunstein, Netta Cohen, Arnon Dar, Michael Elbaum, Baruch Fisher, Kopel Rabinovitch, Erez Ribak, Vassilios Sarafis, John Shakeshaft und Michael Woolfson erwähnen, die bestimmte Themengebiete vorgeschlagen, das Manuskript gelesen und kritisch kommentiert haben. Die Geduld und die Fähigkeiten von Frau Julia Löwnheim bei der Herstellung der Photographien seien dankbar erwähnt sowie die Hilfe von Michael Dovrat, Gila Etzion, Shimon Kostianovski, Ariel, Carni und Doron Lipson, Carina Reisin und Elizabeth Yudim bei der Herstellung des Manuskripts und der Abbildungen. Wir danken speziell Rina Lipson für die Erstellung des Indexes. Wir bedanken uns ebenso für die finanzielle Unterstützung durch den Technion President's Fund, mit der einige der Herstellungskosten gedeckt werden konnten.

*S. G. Lipson  
D. S. Tannhauser*

---

<sup>1</sup>Anmerkung des Verlags: Die vorliegende deutsche Ausgabe enthält bereits alle vollständigen Lösungen.

# Vorwort

## zur zweiten englischen Auflage

Seit dem Erscheinen der ersten Auflage ist das Gebiet der Optik, wie es an Universitäten studiert wird, sowohl im Umfang als auch in seiner Popularität gewachsen, und sowohl wir als auch der Verlag waren der Meinung, daß die Zeit für eine Neuauflage von „Optical Physics“ gekommen ist.

Bei der Vorbereitung für die neue Auflage haben wir in mehrerer Hinsicht weitgehende Veränderungen vorgenommen. Zuerst haben wir versucht, alle Fehler und konzeptionellen Mängel, die uns während der neunjährigen Verwendung des Buches aufgezeigt wurden, zu beseitigen. Zweitens haben wir eine wichtige Änderung beim Inhalt vorgenommen: Wir haben das Kapitel über Quantenoptik in die anderen Kapitel des Buches aufgenommen. Im Laufe der Jahre sind zahlreiche Lehrbücher zum Thema Laserphysik erschienen, und es erscheint heute für ein Buch über Optik unerfüllbar, dieses Thema in einem Kapitel befriedigend zu behandeln. Da jedoch einige Kenntnisse über die Prinzipien des Lasers für das Verständnis der heutigen physikalischen Optik vonnöten sind, insbesondere, wenn Kohärenzphänomene besprochen werden, haben wir die Teile, die wir als notwendiges Minimum ansehen, in Kapitel 7 und 8 aufgenommen.

Zusätzlich zu diesen inhaltlichen Änderungen haben wir die Zahl der dem Leser angebotenen Übungsaufgaben erhöht, sie in Kapitel aufgeteilt und Lösungen vorbereitet. Wir haben auch einige Vorschläge aufgegriffen, die unserer Erfahrung nach als studentische Projekte dazu geeignet sind, das Themengebiet dieses Buches zu illustrieren.

Wir sind natürlich all denen dankbar, die uns auf Fehler und Verbesserungsmöglichkeiten aufmerksam gemacht haben. Speziell müssen wir hier D.S. Tannhauser, I. Senitsky und M. Neugarten danken, die uns erheblich durch kritisches Lesen des erneuerten Manuskripts geholfen haben. Wir sind auch den Angestellten von Cambridge University Press sehr dankbar, die weitgehend bei der Behebung von Fehlern und Ungenauigkeiten in unserem Manuskript beteiligt waren.

Mai 1979

*S. G. Lipson*

*H. S. Lipson*

# Vorwort

## zur ersten englischen Auflage

Es gibt zwei Sorten von Lehrbüchern. Auf der einen Seite gibt es Referenzhandbücher, in denen ein Student Klarheit über relativ unbedeutende Punkte oder eine ins Detail gehende Darstellung wichtiger Experimente finden kann. Auf der anderen Seite gibt es erklärende Bücher, die sich hauptsächlich mit den Prinzipien beschäftigen und helfen, Bücher des ersten Typs zu verstehen.

Wir haben versucht, ein Lehrbuch der zweiten Sorte zu produzieren. Es behandelt hauptsächlich die Prinzipien der Optik, wobei wir allerdings überall dort, wo es möglich war, die Bedeutung dieser Prinzipien für andere Zweige der Physik betont haben – daher der eher ungewohnte Buchtitel.<sup>1</sup> Wir haben dabei die Beschreibung zahlreicher klassischer Experimente der Optik – beispielsweise Foucaults Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit – weggelassen, da diese heute bereits in den Schulbüchern in sehr guter Art und Weise beschrieben werden. Zusätzlich haben wir versucht, mehrfache Beschreibungen eines Gebiets zu vermeiden; da wir z. B. denken, daß der graphische Ansatz für Interferenz und die Fraunhofersche Beugung vollständig durch den Ansatz der komplexen Wellentheorie abgedeckt wird, haben wir ersteren gar nicht verwendet.

Aus diesen Gründen wird sich herausstellen, daß das Buch nicht als einführendes Lehrbuch verwendet werden soll, sondern hoffentlich für Studenten auf allen Niveaus nützlich sein wird. Die ersten Kapitel sind dabei eher einführend, und wir hoffen, daß zu dem Zeitpunkt, an dem die Kapitel erreicht werden, die ein Wissen an Vektorrechnung und komplexen Zahlen erfordern, die Studenten die notwendigen mathematischen Fähigkeiten erlernt haben.

Wir haben die Verwendung von Fourierreihen hervorgehoben; insbesondere die Fouriertransformation – die eine wichtige Rolle in so vielen Bereichen der Physik spielt – wird ziemlich detailliert dargestellt. Zusätzlich haben wir – sowohl theoretisch als auch experimentell – der Operation der Faltung einige Bedeutung beigemessen, da wir denken, daß jeder Physiker sie fließend beherrschen sollte.

Wir möchten der beträchtlichen Zahl an Leuten danken, die uns geholfen haben, dieses Buch in seiner vorliegenden Form zu erstellen. Professor C. A. Taylor und Professor A. B. Pippard hatten beträchtlichen Einfluß auf die endgültige Form – vielleicht mehr, als sie ahnen. Dr. I. G. Edmunds und Herr T. Ashworth haben den gesamten Text gelesen, und ihnen ist dafür zu danken, daß der Text nicht noch mehr Inkonsistenzen enthält. (Wir glauben nicht daran, daß es überhaupt keine gibt!) Dr. G. L. Squires und Herr T. Blaney haben uns wertvolle Hinweise für spezielle Teile des Buches gegeben. Herr F. Kirkman und seine Assistenten – Herr A. Pennington und Herr R. McQuade – haben beträchtliche Geduld bei der Herstellung einiger der genaueren photographischen Illustrationen aufgebracht und schöne Ab-

---

<sup>1</sup> Gemeint ist der Titel „Optical Physics“ der englischen Originalausgabe.

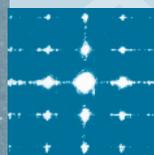
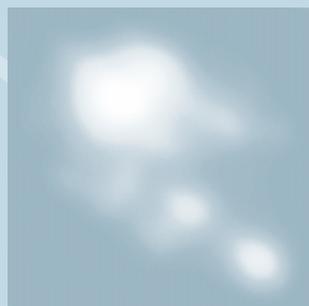
#### XIV Vorwort zur ersten englischen Auflage

züge für den endgültigen Druck zur Verfügung gestellt. Herr L. Spero hat uns sehr beim letzten Schliff für unser Manuskript geholfen.

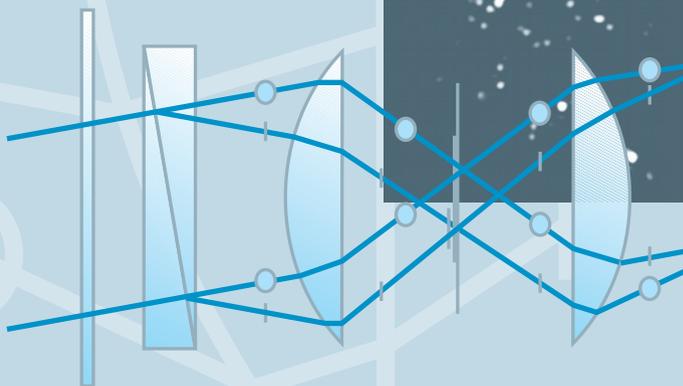
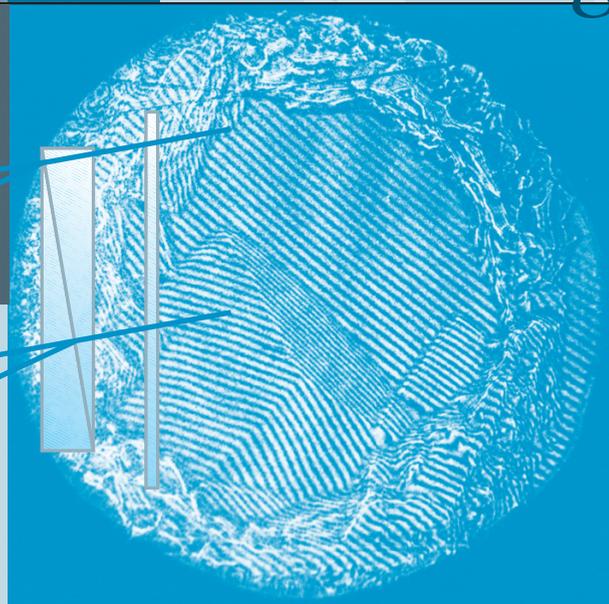
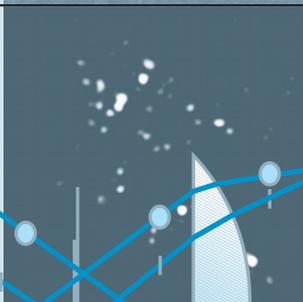
Schließlich möchten wir den drei Damen danken, die letztendlich die druckreife Version des Manuskripts fertigstellten – Frau M. Allen, Frau E. Midgley und Frau K. Beanland. Sie haben ein enormes Entgegenkommen bei den in letzter Minute vorgenommenen Veränderungen gezeigt, und ihre Hilfe hat viel dazu beigetragen, unsere Arbeit zu erleichtern.

*S. G. Lipson*

*H. S. Lipson*



# *Bild- entstehung*



# 12

## Bildentstehung

### ■ Inhalt

12.1 Einführung .....	312
12.2 Die Beugungstheorie der Bildentstehung ..	312
12.3 Auflösungsgrenze optischer Instrumente .....	321
12.4 Anwendungen der Abbeschen Theorie: räumliche Filterung ..	328
12.5 Methoden zur Steigerung der Auflösung .....	339
12.6 Holographie .....	345
12.7 Vertiefungsthema: interferometrische Bilderzeugung in der Astronomie ...	353
12.8 Vertiefungsthema: astronomische An- wendung der Speckle- Interferometrie .....	357
Übungsaufgaben .....	362

### ▼ Übersicht

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit einer der Hauptaufgaben optischer Instrumente: dem Erzeugen von Bildern. Wir beschreiben die physikalischen Grundlagen, die zu den grundlegenden Beschränkungen in der Leistungsfähigkeit optischer Geräte führen und stellen einige moderne Methoden vor, diese Grenzen möglichst weit hinauszuschieben.

### 12.1 Einführung

Die meisten optischen Systeme werden zur Bilderzeugung verwendet. Von der Lochkamera abgesehen, verwenden alle bildgebenden optischen Instrumente Linsen oder Spiegel, deren Eigenschaften in bezug auf die geometrische Optik bereits in Kap. 3 diskutiert wurden. Aber die geometrische Optik vermittelt uns kein Konzept, um mögliche Grenzen der Leistungsfähigkeit solcher Instrumente abzuschätzen, und tatsächlich dachten Mikroskophersteller bis zu den Arbeiten von *Abbe* in der Mitte des 19. Jahrhunderts, daß die einzige Begrenzung des räumlichen Auflösungsvermögens durch ihre technischen Fähigkeiten im Schleifen und Polieren von Linsen gegeben sei. Wie wir heute wissen (und es kommt uns heutzutage offensichtlich vor), ist die grundlegende Bezugsskala die Wellenlänge des Lichts, obwohl in letzter Zeit einige bildgebende Methoden erdacht wurden, die ein Auflösungsvermögen erzielen, das deutlich besser als diese Grenze ist. Die Beziehung ist wiederum gleich der zwischen klassischer Physik und Quantenmechanik. Die klassische Physik sagt keinerlei grundsätzliche Grenzen für die Meßgenauigkeit voraus; in der Quantenmechanik entstammen sie der **Heisenbergschen Unschärferelation**.

In diesem Kapitel beschreiben wir, wie die Wellenoptik dazu verwendet werden kann, die Bilderzeugung durch eine Einzellinse (und als Erweiterung: die durch jedes beliebige optische System) zu beschreiben. Die Theorie basiert auf der **Fraunhoferschen Beugung** (Kap. 8) und führt auf natürliche Weise zu einem Verständnis der Grenzen der Bildqualität und einiger Möglichkeiten, sie zu steigern.

### 12.2 Die Beugungstheorie der Bildentstehung

1867 schlug *Abbe* eine eher intuitive Methode zur Beschreibung der Abbildung eines periodischen Objekts vor, die die Grenzen des Auflösungsvermögens und ihre Verbindung mit der Wellenlänge des Lichtes verdeutlicht. Wir werden zuerst seine einfache Methode beschreiben und sie später als zweifache Fouriertransformation formalisieren. Resultat dieses Prozesses sind verschiedene Methoden zur Verbesserung der

Bildqualität, insbesondere das Erzeugen von Bildkontrast aufgrund von Phasenunterschieden, die normalerweise unsichtbar sind.

### 12.2.1 Die Abbesche Theorie: das Bild eines unendlich ausgedehnten periodischen Objekts

Wir haben in Abschn. 8.3.4 gesehen, daß bei senkrechtem Einfall von parallelem Licht auf ein Beugungsgitter mehrere Beugungsordnungen entstehen (Abb. 12.1). Plazieren wir das Beugungsgitter in der Ebene  $\mathcal{O}$  und erzeugen sein Bild mit Hilfe des gebeugten Lichtes. In der **paraxialen Näherung** kann jede Beugungsordnung als ebene Welle angesehen werden. Dieser Satz ebener Wellen kann durch eine Linse so gebeugt werden, daß die ebenen Wellen, jede einzeln, zu einem Satz von Punkten  $S$  in der Brennebene  $\mathcal{F}$  der Linse konvergieren und von dort aus so weiterlaufen, daß sie alle in der Ebene  $\mathcal{I}$  überlappen. Dort formen sie ein kompliziertes Interferenzmuster; dieses Muster ist das Bild.

Der Vorteil in der Verwendung von Beugungsgittern als Abbildungsobjekten besteht darin, daß der Prozeß der Bildentstehung in zwei separate Schritte zerlegt werden kann. Wir haben zunächst den Schritt zwischen  $\mathcal{O}$  und  $\mathcal{F}$ . In der Ebene  $\mathcal{F}$  haben wir das Fraunhofersche Beugungsmuster des Objekts. Der zweite Schritt findet zwischen  $\mathcal{F}$  und  $\mathcal{I}$  statt. Die Beugungsordnungen  $S_2, S_1, \dots, S_{-2}$  verhalten sich wie äquidistante Punktquellen, und das Bild ist ihr Beugungsmuster.

Daher scheint der Vorgang der Bildentstehung aus zwei hintereinander ausgeführten Beugungsprozessen zu bestehen.

Der zweite Beugungsprozeß in diesem Modell kann einfach analysiert werden. Jedes Paar von Beugungsordnungen  $S_j$  und  $S_{-j}$  erzeugt **Youngsche**

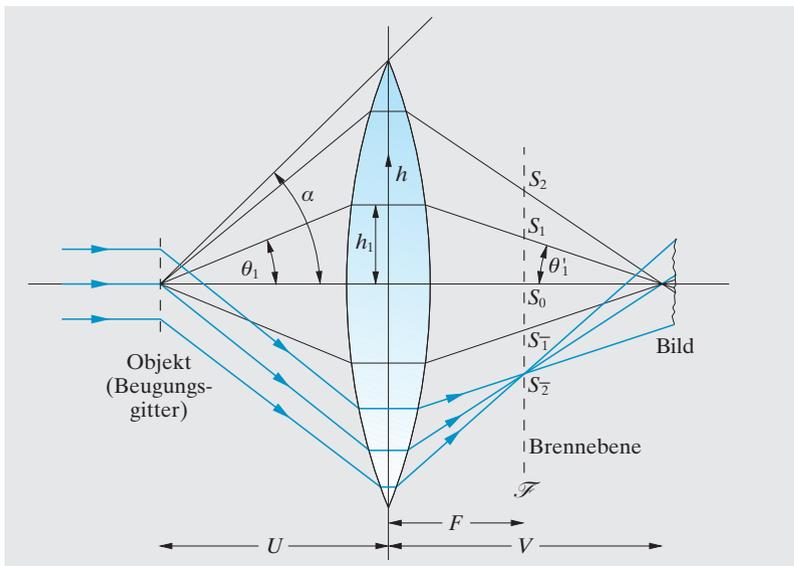


Abb. 12.1. Bildentstehung an einem Beugungsgitter. 5 Beugungsordnungen sind eingezeichnet, die 5 Brennpunkte  $S$  in der Ebene  $\mathcal{F}$  erzeugen. Das komplette Strahlenbündel ist nur für die  $-2$ -te Ordnung gezeigt. Der halbe Öffnungswinkel der Linse ist mit  $\alpha$  gekennzeichnet

**Beugungsstreifen** in der Ebene  $\mathcal{T}$ . Hat das Beugungsgitter die Periode  $d$ , erscheint die Beugungsordnung  $S_j$  unter dem Winkel  $\theta_j$ , der für kleine Winkel gegeben ist durch

$$\theta_j \approx \sin \theta_j = j\lambda/d. \quad (12.1)$$

Wir werden in Abschn. 12.2.2 sehen, daß diese Näherung kleiner Winkel eigentlich unnötig ist. Aufgrund einfacher geometrischer Überlegungen kann man aus Abb. 12.1 ableiten, daß

$$\theta_j \approx \tan \theta_j = h_j/U, \quad (12.2)$$

$$\theta'_j \approx \tan \theta'_j = h_j/V \quad (12.3)$$

und daher

$$\theta'_j \approx U\theta_j/V. \quad (12.4)$$

Die Wellen der ersten Ordnungen  $S_1$  und  $S_{-1}$  konvergieren in der Bildebene unter den Winkeln  $\pm\theta'_1$  und bilden periodische Beugungsstreifen mit Abstand

$$d' = \lambda / \sin \theta'_1 \approx \lambda V / \theta_1 U = Vd/U. \quad (12.5)$$

Dadurch wird ein vergrößertes Bild erzeugt; die Vergrößerung ist gegeben durch  $m = V/U$ . Die Beugungsstreifen höherer Beugungsordnungen erzeugen die Harmonischen zu dieser periodischen Anordnung mit einem Streifenabstand von  $d'/j$  und tragen zur Feinstruktur des Bildes bei.

Die kleinste beobachtbare Struktur des Bildes ist durch die höchste Beugungsordnung, die noch durch die Linse durchgelassen wird, bestimmt.

Die nullte Beugungsordnung trägt eine konstante Amplitude zum Bild bei. Dieser Beitrag besitzt große Bedeutung. Ohne ihn hätte das Interferenzmuster der ersten Ordnungen nur die halbe Periodizität des Bildes, da wir Intensitäten beobachten und keine Amplituden; die Funktion  $\sin^2 x$  hat die halbe Periode von  $\sin x$ . Die Addition eines konstanten Terms sorgt nun für die korrekte Periodizität der Intensität, denn  $(c + \sin x)^2 = c^2 + 2c \sin x + \sin^2 x$ , was die Periodizität von  $\sin x$  besitzt.

Die Verwendung eines unendlich ausgedehnten Beugungsgitters als Abbildungsobjekt hat natürlich das Problem etwas zu sehr vereinfacht. Haben wir ein endliches Gitter, tauchen zusätzliche Beugungsordnungen auf (Abschn. 8.3.3), die ebenfalls Information übertragen. Das oben erhaltene, einfache Modell muß also modifiziert werden, wenn das Objekt komplizierter ist, aber es drückt nichtsdestoweniger die grundlegenden Ideen der Auflösungsbegrenzung aus.

### 12.2.2 Die Abbesche Sinusbedingung

Obwohl die Behandlung im vorangegangenen Abschnitt darauf hinweisen könnte, daß eine gute Abbildung nur mit kleinen Beugungswinkeln zu erzeugen ist, erkannte Abbe, daß auch größere Winkel zulässig sind.

Eine gute Abbildungsqualität läßt sich auch erreichen, wenn das Verhältnis  $\sin \theta / \sin \theta'$  anstelle von  $\theta / \theta'$  für alle  $\theta$  gleich ist. Dieser Zusammenhang heißt **Abbesche Sinusbedingung**.

Haben wir also angenommen

$$\frac{\sin \theta_j}{\sin \theta'_j} = m, \quad (12.6)$$

ergibt sich für die Periodizität der Beugungsstreifen des Bildes

$$d'_j = \lambda / \sin \theta'_j = m \lambda / \sin \theta_j = m d_j. \quad (12.7)$$

Die Harmonischen haben so genau die richtige Periodizität im Vergleich zur Grundperiode  $d'_1$ , womit das Bild so perfekt wie möglich wird. Eine wichtige Sorte Linsen, die genau diese Eigenschaft besitzt, wurde in Abschn. 3.9 vorgestellt und stellt ein Grundelement für Hochleistungsmikroskope dar.<sup>1</sup> Die Abbesche Sinusbedingung besagt *nicht*, daß  $\sin \theta / \sin \theta'$  in einem beliebigen bildgebenden System eine Konstante ist, sondern *fordert*, daß diese Bedingung erfüllt sein muß, damit keine Aberrationen unter großen Winkeln  $\theta$  und  $\theta'$  auftreten. Sie wird beispielsweise von einer symmetrischen Einzellinse nicht erfüllt.

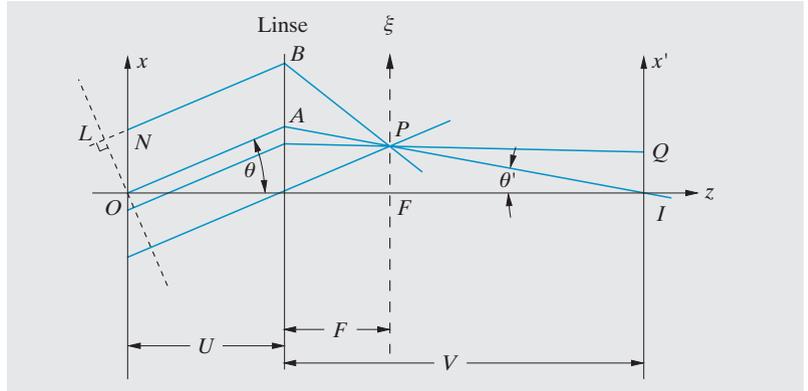
### 12.2.3 Bildentstehung als doppelter Beugungsvorgang

In Abschn. 12.2.1 haben wir auf qualitative Weise die Idee vorgestellt, daß die Bildentstehung als ein zweifacher Beugungsprozeß interpretiert werden kann, und in Abschn. 12.2.2 haben wir gesehen, daß die Abbesche Sinusbedingung erfüllt sein muß, damit dieser Ansatz funktioniert. In diesem Abschnitt werden wir diese Methode mathematisch für eine Objektdimension formulieren. Es gibt dabei keine Schwierigkeiten, sie auf zwei Dimensionen zu erweitern.

Die Analyse basiert auf der **skalaren Wellentheorie** der Beugung und setzt voraus, daß ein Objekt von einer ebenen Welle gleichmäßig und kohärent beleuchtet wird. Die vom Objekt ausgehende Welle wird durch die komplexe Funktion  $f(x)$  dargestellt (natürlich mit einem Phasenfaktor  $\exp(-i\omega_0 t)$  multipliziert, der aber in allen Gleichungen unverändert bleibt und daher weggelassen wird). Das Objekt wird mit Hilfe einer Linse abgebildet, mit den Objekt- und Bildentfernungen  $U$  und  $V$ ; die Ausdehnung des Objekts soll dabei klein gegen  $U$  sein (siehe Abb. 12.2). Die Amplitude

<sup>1</sup>Die Bedingung  $\sin \theta / \sin \theta' = \text{const}$  kann aus rein geometrischen Überlegungen abgeleitet werden (siehe *Kingslake 1978*), aber die obige Argumentation legt mehr Wert auf die physikalischen Grundgedanken und stellt ihre Bedeutung heraus.

Abb. 12.2. Strahlengang zur Veranschaulichung der Objekt-Bild-Beziehung. Für die Koordinate gilt  $\xi = uF/k_0$



der Welle, die am Punkt  $P$  in der Brennebene  $\mathcal{F}$  der Linse ankommt, ist, gemäß der Ableitung und Notation aus Abschn. 8.2, im eindimensionalen Fall die Fouriertransformierte von  $f(x)$  mit einer Phasenverschiebung, die dem optischen Weg  $\overline{OAP}$  entspricht:

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \exp(i k_0 \overline{OAP}) F(u) \\ &= \exp(i k_0 \overline{OAP}) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-i u x) dx, \end{aligned} \quad (12.8)$$

wobei  $k_0 = 2\pi/\lambda$  ist und  $u$  dem Punkt  $P$  entspricht:

$$u = k_0 \sin \theta. \quad (12.9)$$

Nun kann die Amplitude  $b(x')$  am Punkt  $Q$  in der Bildebene mit Hilfe des **Huygenschen Prinzips**, angewandt auf die Punkte der Brennebene  $\mathcal{F}$ , berechnet werden.<sup>2</sup> Der optische Weg von  $P$  nach  $Q$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= \left( \overline{PI}^2 + x'^2 - 2x' \overline{PI} \sin \theta' \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\approx \overline{PI} - x' \sin \theta', \end{aligned} \quad (12.10)$$

wobei  $x' \ll \overline{PI}$ . Ist die Abbésche Sinusbedingung (12.6) erfüllt, gilt

$$\sin \theta = m \sin \theta', \quad (12.11)$$

wobei  $m$  die **Vergrößerung** darstellt. Wir können daher mit Hilfe von (12.9) schreiben

$$\overline{PQ} = \overline{PI} - x' u / m k_0, \quad (12.12)$$

wodurch sich für die Amplitude am Punkt  $Q$

<sup>2</sup>Da dieser Vorgang unter Einbeziehung der Interferenz von Kugelwellen stattfindet, müßte eigentlich ein Faktor  $1/r$  hinzukommen. Er hat allerdings keinerlei Einfluß auf die Physik und wird daher weggelassen.

$$\begin{aligned}
 b(x') &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(u) \exp(ik_0 \overline{PQ}) du \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ik_0 \overline{PI}) \psi(u) \exp(-ix'u/m) du
 \end{aligned} \tag{12.13}$$

ergibt. Dies ist die zweite Fouriertransformation des Problems. Setzen wir (12.8) in (12.13) ein, können wir die Beziehung zwischen dem Bild  $b(x')$  und dem Objekt  $f(x)$  umschreiben zu

$$\begin{aligned}
 b(x') &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp \left[ ik_0 (\overline{OAP} + \overline{PI}) \right] \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-iux) dx \right\} \\
 &\quad \times \exp(-iux'/m) du .
 \end{aligned} \tag{12.14}$$

Der kombinierte Phasenfaktor  $\exp[ik_0 (\overline{OAP} + \overline{PI})]$  scheint auf den ersten Blick eine Funktion des Ortes  $P$  zu sein und daher auch eine von  $u$ . Dies ist auch der Fall, wenn die Ebenen  $\mathcal{O}$  und  $\mathcal{T}$  willkürlich gewählt werden. Aber wenn sie **konjugierte Ebenen** sind, dann ist gemäß dem **Fermatschen Prinzip** (Abschn. 2.7.2) der optische Weg von  $O$  nach  $I$  unabhängig vom Punkt  $P$ . Damit kann der Faktor als Konstante mit dem Wert  $\exp(ik_0 \overline{OI})$  geschrieben werden und aus dem Integral herausgezogen werden. Es verbleibt das Integral

$$\begin{aligned}
 b(x') &= \exp(ik_0 \overline{OI}) \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-iux) dx \right] \\
 &\quad \times \exp(-iux'/m) du .
 \end{aligned} \tag{12.15}$$

Diese Integrale sind die gleichen wie die, die beim **Fourierinversionstheorem** auftraten. Mit den Ableitungen aus Abschn. 4.5 haben wir daher

$$\boxed{b(x') = \exp(ik_0 \overline{OI}) f(-x'/m)} . \tag{12.16}$$

Diese Gleichung stellt die wohlbekannte Tatsache dar, daß das Bild eine um den Faktor  $m$  vergrößerte, invertierte Kopie des Objekts darstellt. Dieses Ergebnis, daß zuerst von *Zernike* mathematisch bewiesen wurde, kann leicht in Worten ausgedrückt werden: Ein optisches Bild kann als Fouriertransformierte der Fouriertransformierten des Objekts dargestellt werden. Diese Regel gilt strenggenommen nur, wenn die Linse im Hinblick auf alle Abbildungsfehler korrigiert ist, d. h. wenn sie die Abbesche Sinusbedingung erfüllt und die Eigenschaft besitzt, daß der optische Weg  $\overline{OPT}$  unabhängig vom Punkt  $P$  ist.<sup>3</sup>

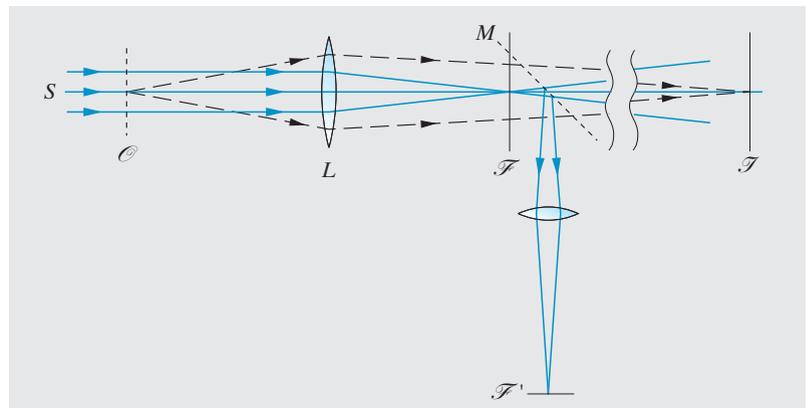
<sup>3</sup>Im Zusammenhang mit den Bildfehlern aus Abschn. 3.7 ausgedrückt, bedeutet die Bedingung, daß keine sphärische Aberration (keine Bildfehler aufgrund von  $\theta \neq 0$  für beliebige Punkte auf der optischen Achse) und kein Koma erster Ordnung (die gleiche Bedingung für Punkte, die einen kleinen Abstand  $x$  von der optischen Achse besitzen) auftreten darf.

### 12.2.4 Beispiele für die Beugungstheorie der Bildentstehung

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir theoretisch gezeigt, daß bei kohärenter Beleuchtung eines Objekts der Prozeß der Bildentstehung als doppelte Fouriertransformation interpretiert werden kann. Wir möchten nun einige Experimente beschreiben, die ursprünglich von *Porter* 1906 ausgeführt wurden und die diese theoretischen Ergebnisse bestätigen. Sie wurden mit dem abbildenden System, das in Abb. 12.3 gezeigt ist, durchgeführt. Dieses System erlaubt den Vergleich zwischen der ersten Transformation und dem endgültigen Bild (siehe Anhang A2). Eine teiltransparente Maske wird mit einem parallelen, kohärenten Strahl beleuchtet und durch eine Sammellinse abgebildet. Wir können das beleuchtende Licht in der Brennebene als **Fraunhofersches Beugungsmuster** des Objekts wahrnehmen und das endgültige Bild als **Fouriertransformierte** dieses Beugungsmusters beobachten. Der erste Schritt, die Entstehung des Fraunhoferschen Beugungsmusters, wurde bereits ausführlich in Kap. 8 besprochen. Um nun zu bestätigen, daß der zweite Schritt ebenfalls eine Fouriertransformation darstellt, können wir die Transformierte in der Brennebene durch zusätzliche Masken oder Blenden modifizieren und die daraus resultierenden Veränderungen des Bildes beobachten. Dieser Vorgang heißt **räumliche Filterung** in Analogie zu den entsprechenden zeitlichen Vorgängen in elektronischen Schaltkreisen. Räumliche Filter haben einige sehr wichtige Anwendungen, die wir im Detail in späteren Abschnitten diskutieren werden.

Betrachten wir als erstes Objekt ein Stückchen Gaze (Gewebe). Es ist ein zweidimensionales Objekt mit einer bestimmten Periodizität, obwohl es durch Herstellungsfehler Abweichungen in der genauen Periodizität und zusätzliche Defekte wie verstopfte Maschen usw. gibt. Wir bilden es mit dem in Abb. 12.3 gezeigten System ab. Das Beugungsmuster (in der Ebene  $\mathcal{F}$ ) ist in Abb. 12.4a gezeigt. Es enthält wohldefinierte helle Punkte, die der periodischen Komponente der Objektfunktion entsprechen, und eine zusätzliche Intensitätsverteilung um die verschiedenen Beugungsordnungen herum, die den nichtperiodischen Komponenten entsprechen. Das komplette Bild des Gazestückchens ist in Abb. 12.4b zu sehen.

Abb. 12.3. Optisches System zur Darstellung der Abbeschen Theorie der Bildentstehung. Das Objekt  $\mathcal{O}$  wird durch paralleles kohärentes Licht eines Lasers  $S$  beleuchtet. Durch die Linse  $L$  wird es auf einen entfernten Schirm  $\mathcal{T}$  projiziert. Der halbdurchlässige Spiegel  $M$  wird dazu benutzt, am Ort  $\mathcal{F}'$  ein Bild der Brennebene  $\mathcal{F}$  zu erzeugen. Die verschiedenen Blenden werden in Ebene  $\mathcal{F}$  eingesetzt und die Bilder in  $\mathcal{F}'$  und  $\mathcal{T}$  gleichzeitig beobachtet (Abb. 12.4)



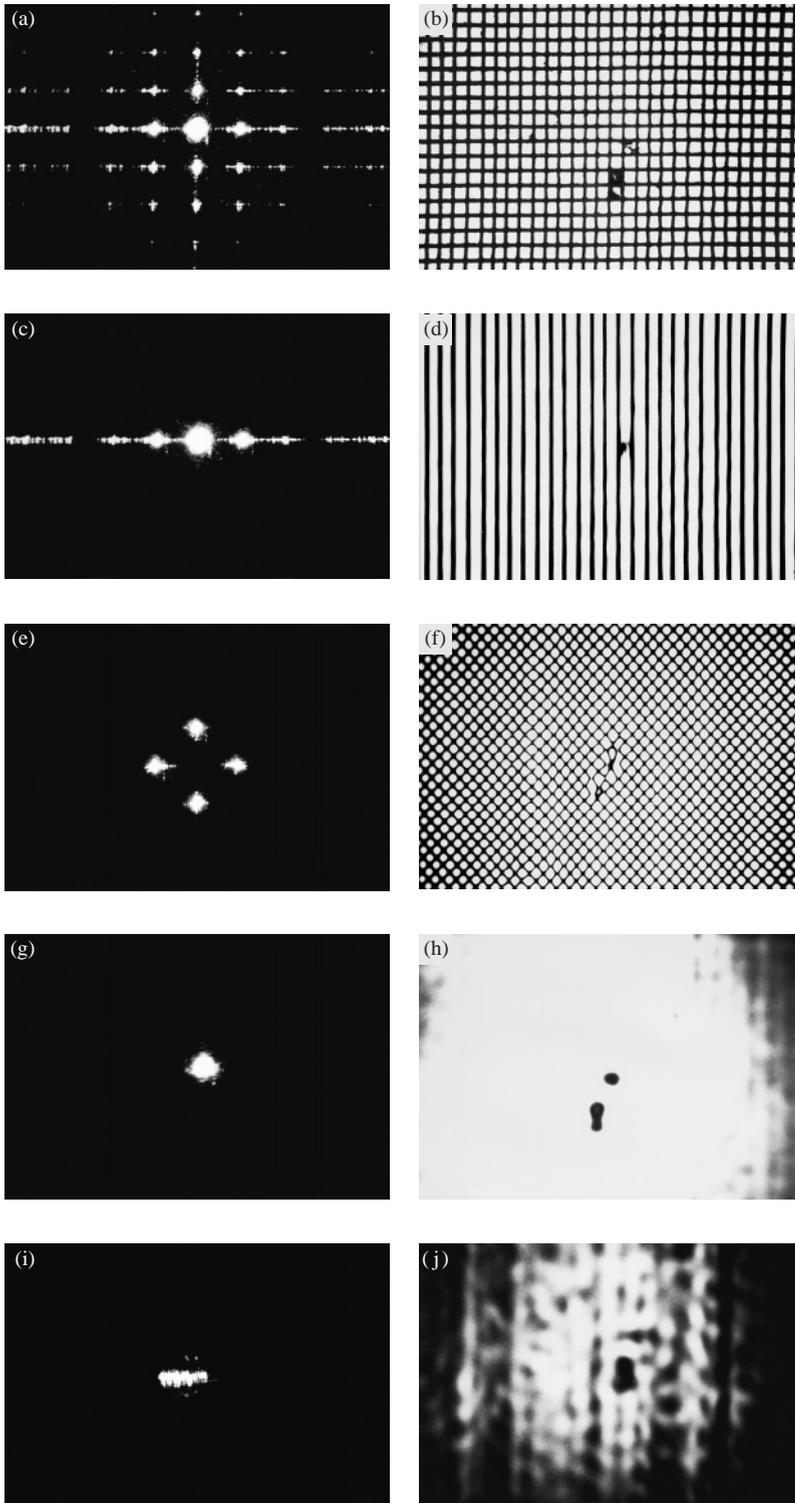


Abb. 12.4a–j. Darstellungen zur Abbeschen Theorie der Bildentstehung. In der linken Spalte sind Ausschnitte aus dem Beugungsmuster eines Stücks Mull zu sehen, in der rechten Spalte die dazugehörigen Bilder

Wir bringen nun verschiedene Blenden in die Ebene  $\mathcal{F}$  ein und blenden somit verschiedene Bereiche des Beugungsmusters aus. Transmittiert die Blende z. B. nur die Beugungsordnungen auf der horizontalen Achse (Abb. 12.4c), wird aus dem Bild ein Satz vertikaler Linien (Abb. 12.4d); dies wäre das Objekt, das Abb. 12.4c als Beugungsmuster hätte. Analog dazu ergibt eine Maske, die nur die Ordnungen  $(0, \pm 1)$ ,  $(\pm 1, 0)$  durchläßt (Abb. 12.4e), ein unterschiedliches Gewebe als Bild (Abb. 12.4f). Nur die Unregelmäßigkeiten sind überall die gleichen, da sie an allen Punkten zum Beugungsmuster beitragen. Nehmen wir nur die nullte Ordnung zusammen mit dem Bereich bis zur Hälfte der nächsten Ordnung (Abb. 12.4g) erhalten wir ein Bild, in dem das Muster der Gaze überhaupt nicht sichtbar wird, sondern in dem man nur die Unregelmäßigkeiten – insbesondere die verstopften Maschen – sieht. Nehmen wir als letztes Beispiel einen kleinen Bereich weit vom Zentrum des Beugungsmusters entfernt (Abb. 12.4i), erhalten wir eine weitere Darstellung der Abweichungen von der exakten Periodizität (Abb. 12.4j).

### 12.2.5 Das Phasenproblem

Eine Frage, die man sich in diesem Zusammenhang immer stellen muß, bezieht sich auf die Möglichkeiten, die beiden Schritte des Bildentstehungsprozesses voneinander zu trennen. Nehmen wir an, wir versuchen das Beugungsmuster in der Brennebene zu photographieren, und beleuchten in einem getrennten Experiment diese Photographie mit kohärentem Licht, um ihr Beugungsmuster zu beobachten. Sollten wir auf diese Weise nicht das Beugungsmuster des Beugungsmusters erzeugt und somit das Originalbild rekonstruiert haben? Der Fehler bei dieser Überlegung liegt in der Vernachlässigung der Phase des Beugungsmusters. Die Beleuchtung  $\psi(u)$  ist eine komplexe Größe, die sowohl Phasen- als auch Amplitudeninformation trägt. Die Photographie nimmt nur Intensitäten  $|\psi(u)|^2$  auf, die Phase geht dabei verloren. Der zweite oben vorgeschlagene Beugungsprozeß würde in Unkenntnis der Phasen ausgeführt und würde daher sehr wahrscheinlich ein falsches Ergebnis hervorbringen. Es ist genau genommen so, daß dieser zweite Schritt alle Phasen als null ansieht; wenn die Phasen tatsächlich so wären, würden wir das korrekte Bild erhalten.

Das Problem, daß die Phasen in einem aufgenommenen Beugungsmuster im allgemeinen unbekannt sind, heißt **Phasenproblem**. Seine Lösung ist von zentraler Bedeutung für die Interpretation von Röntgenbeugungsbildern, bei denen man die Kristallstruktur eines Kristalls rekonstruieren will, dessen Beugungsmuster man aufgenommen hat. Dabei sind verschiedene Ansätze möglich. Einer davon besteht darin, die Phasen auf plausible Art und Weise aus der im Beugungsmuster enthaltenen Information abzuleiten, wenn man bereits einiges Wissen über das Objekt hat. Dieser Ansatz wurde in Abschn. 8.6 unter dem Stichwort **Phasenwiedergewinnung** besprochen und war in den letzten Jahren sehr erfolgreich.

Es gibt allerdings eine sehr wichtige Klasse von Beugungsbildern, die direkt zurücktransformiert werden können, da bei ihnen die Phasen tatsächlich alle null sind. Daraus folgt, daß alle gebeugten Wellen sich im Ursprung des Realraums konstruktiv überlagern und daß die Objektfunktion daher an

dieser Stelle ein Maximum besitzt. In der Sprache der Kristallographie ausgedrückt, bedeutet das, daß am Ursprung ein sehr stark streuendes Atom sitzt. Viele Moleküle sind tatsächlich um ein einzelnes schweres Atom herum aufgebaut, das leicht als Ursprung der Elementarzelle angesehen werden kann. Kristallisiert ein solches Material mit einem einzelnen Molekül dieser Art pro Elementarzelle, haben wir die passenden Bedingungen dafür, daß alle Phasen bei der Beugung null sind.<sup>4</sup> In einem solchen Fall ergibt die Rücktransformation des Beugungsmusters als reelle Funktion bereits ein einigermaßen gutes Bild der ursprünglichen Kristallstruktur.

Ein Experiment dieser Art wurde von *W.L. Bragg* 1939 ausgeführt; er nannte es **Röntgenmikroskop**. Die Rekonstruktion des Objektes wurde dadurch ausgeführt, daß man entsprechend dem Muster bei der Röntgenbeugung an dem zu untersuchenden Kristall Löcher in eine ansonsten undurchsichtige Platte bohrte (siehe Abb. 12.5a), wobei die Fläche eines Lochs der Amplitude des entsprechenden Beugungsreflexes entsprach. Das Fraunhofersche Beugungsmuster dieser Lochmaske ergibt dann ein Bild der Kristallstruktur (Abb. 12.5b).

Diese Idee ist die Grundlage der **Methode der schweren Atome** zur Lösung von Kristallstrukturproblemen. Sie ist anwendbar auf beliebige Moleküle, die so kristallisieren, daß sich ein einzelnes oder wenige schwere Atome an der gleichen Position in jeder Einheitszelle befinden. Diese Atome bestimmen dann hauptsächlich das Beugungsmuster und legen die Phasen von allen gebeugten Wellen fest. Mit diesen Randbedingungen an die Phasen läßt sich die Struktur der Einheitszelle bestimmen. Diese Methode wurde beispielsweise von *Perutz* und *Kendrew* dazu verwendet, die Strukturen von Proteinen, Hämoglobin und Myoglobin zu erforschen, und stellt auch heutzutage für die meisten komplexen Moleküle die einzige Möglichkeit der Strukturaufklärung dar (*Woolfson* 1970; *Blundell* und *Johnson* 1976).

## 12.3 Auflösungsgrenze optischer Instrumente

Das Licht, das in einem optischen System ein Bild entstehen läßt, ist in seinem Einfallswinkel durch die **Aperturblende** (Abschn. 3.4.2) begrenzt. In diesem Abschnitt werden wir die Abbesche Theorie der Bildentstehung dazu verwenden, ein Modell zu entwickeln, das erklärt, wie die Größe der Aperturblende und die Kohärenz der Beleuchtung die Bildcharakteristik beeinflussen und wie sie insbesondere die erreichbare Auflösung begrenzen. Es wird sich herausstellen, daß die Grenzfälle perfekter Kohärenz oder vollständiger Inkohärenz einfach zu behandeln sind; die dazwischenliegenden Bereiche partieller Kohärenz sind dagegen sehr kompliziert, und ihre Resultate können in diesem Buch nur in allgemeiner Form dargestellt werden.

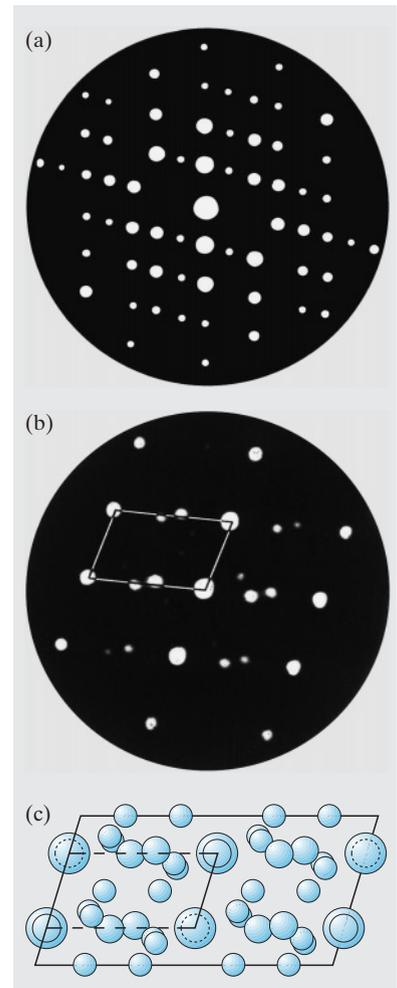


Abb. 12.5. (a) Satz von Lochblenden, die verschiedene Ordnungen im Röntgenbeugungsbild von Diopsit ( $\text{CaMg}(\text{SiO}_3)_2$ ) repräsentieren; (b) Beugungsbild von (a), stellt eine Projektion der Atome im Kristallgitter dar; (c) Strukturdiagramm des Kristallgitters zum Vergleich mit (b). (Rekonstruktion des Bragg'schen Experiments durch *Harburn* 1972)

<sup>4</sup>Es müssen strenggenommen nicht alle Phasen null sein, sondern nur die der starken Beugungsordnungen. Dies ist normalerweise hinreichend, für eine vernünftige erste Rekonstruktion, die dann in weiteren Schritten verbessert werden kann.

### 12.3.1 Das Rayleigh-Kriterium für ein inkohärentes Objekt

Das einfachste und am besten bekannte Auflösungskriterium ist das von *Lord Rayleigh* (*J.W. Strutt*) formulierte. Es bezieht sich auf ein selbstleuchtendes oder inkohärent beleuchtetes Objekt. Es wird normalerweise auf astronomische Teleskope angewendet, da Sterne sicherlich die Bedingungen selbstleuchtend und inkohärent erfüllen; es gilt aber auch für ein Mikroskop, mit dem beispielsweise ein fluoreszierendes Objekt beobachtet wird.

Betrachten wir einen einzelnen Punkt auf dem Objekt, wissen wir aus Abschn. 7.2.7, daß wir in der Bildebene das Fraunhofersche Beugungsmuster der Aperturblende beobachten, dessen Abmessungen von der Bildweite abhängen. Dieses Beugungsmuster wird **Punktantwort** (englisch „point spread function“) genannt. Ein ausgedehntes Objekt kann als Ansammlung solcher Punkte angesehen werden, und jeder davon erzeugt eine ähnliche Punktantwort in der Bildebene; da die Quellen inkohärent sind, müssen wir die **Intensitäten** der verschiedenen Beugungsmuster zum endgültigen Bild überlagern. Das Bild ist daher die Faltung der Objektintensität mit der Punktantwort.

Das **Rayleigh-Kriterium** für die Auflösung läßt sich herleiten, indem man zwei benachbarte Punkte des Objekts betrachtet, die einen kleinen Winkelabstand voneinander entfernt sind. Hat die Aperturblende den Durchmesser  $D$ , besitzt ihr Beugungsmuster, dargestellt als Funktion des Winkels  $\theta$  die normierte Intensität (Abschn. 8.2.7):

$$I(\theta) = \left[ 2J_1 \left( \frac{1}{2} k_0 D \sin \theta \right) / \left( \frac{1}{2} k_0 D \sin \theta \right) \right]^2 . \quad (12.17)$$

*Rayleigh* nahm an, daß die beiden Punkte auf dem Objekt dann noch voneinander zu unterscheiden sind, wenn das zentrale Maximum des einen Beugungsmusters außerhalb des ersten Minimums des anderen liegt. Die Funktion (12.17) hat nun ihre erste Nullstelle an der gleichen Stelle wie  $J_1(x)$ , nämlich bei  $x = 3,83$ . Daraus folgt

$$\frac{1}{2} k_0 D \sin \theta_1 = \pi D \sin \theta_1 / \lambda = 3,83 . \quad (12.18)$$

Der Winkel  $\theta_1$  ist der minimale Winkelabstand noch auflösbarer, inkohärenter Quellen; da  $\theta_1 \ll 1$  ist, gilt für das Auflösungsvermögen

$$\theta_{\min} = \theta_1 = 3,83 \lambda / \pi D = 1,22 \lambda / D \quad (\text{Rayleigh}) . \quad (12.19)$$

Man beachte, daß nur der **Winkelabstand** der Quellen in diesem Ergebnis vorkommt.<sup>5</sup>

<sup>5</sup> Sind zwei gleich helle Punkte um diesen Winkelabstand voneinander entfernt, hat die Intensität, gemessen entlang ihrer Verbindungslinie, ein Minimum am Mittelpunkt der Verbindungsstrecke mit dem Funktionswert  $8/\pi^2$  der Intensität des Maximums jeden Punktes. Oft wird das Rayleigh-Kriterium unter anderen Bedingungen definiert als die Entfernung, die ein Minimum mit diesem Funktionswert zwischen den beiden Maxima ergibt. Wir werden hier diese Interpretation nicht weiter verwenden, sondern als Alternative das Sparrow-Kriterium vorziehen.

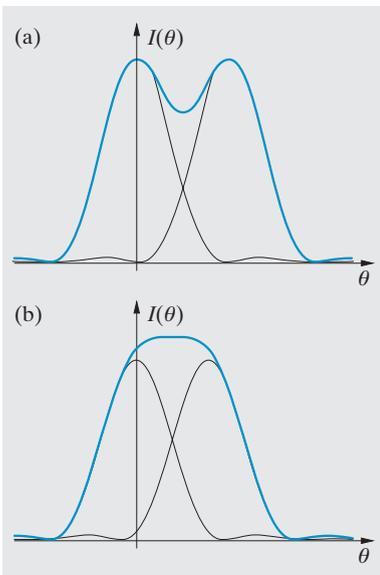


Abb. 12.6a,b. Überlagerung der Bilder zweier inkohärent beleuchteter Lochblenden. Die dünnen Linien stellen die Einzelintensitäten dar, die stark ausgezogene ihre Summe. (a) Rayleigh-Kriterium; (b) Sparrow-Kriterium

Obwohl das Rayleigh-Kriterium das bekannteste Maß für das Auflösungsvermögen ist, funktioniert es unter bestimmten Bedingungen nicht, die wir später diskutieren werden. Eine Alternative, die vor allem auf die Eigenschaft des menschlichen Auges, **Intensitätsunterschiede** besonders gut wahrzunehmen, abzielt, ist das **Sparrow-Kriterium**. Dabei werden zwei Punkte als aufgelöst betrachtet, wenn ihre gemeinsame Intensitätsfunktion entlang ihrer Verbindungslinie ein Minimum besitzt. Haben beide Punkte die gleiche Intensität, ergibt das Sparrow-Kriterium einen Minimalabstand  $\theta_{\min}$ , wenn gilt:

$$\left( \frac{d^2 I}{d\theta^2} \right)_{\theta=\theta_{\min}/2} = 0. \quad (12.20)$$

Ohne in die Details der Differenzierung einer Besselfunktion einsteigen zu wollen, erhalten wir hieraus

$$\theta_{\min} = 0,95\lambda/D \quad (\text{Sparrow}). \quad (12.21)$$

### 12.3.2 Kohärent beleuchtete Objekte

Betrachten wir das Problem des Auflösungsvermögens, wenn beide Quellen kohärent sind. Besteht das Objekt aus zwei Punkten, die Licht mit der gleichen Phase emittieren, müssen wir die **Amplituden** ihrer Punktantwort hinzuaddieren

$$A(\theta) = J_1 \left( \frac{1}{2} k_0 D \sin \theta \right) / \left( \frac{1}{2} k_0 D \sin \theta \right). \quad (12.22)$$

Das **Rayleigh-Kriterium** ergibt das gleiche Resultat wie (12.19), da die Nullstellen der Punktantwort sich nicht verändert haben; die Punkte werden aber nicht aufgelöst. Auf der anderen Seite ergibt das **Sparrow-Kriterium**  $\theta_{\min} = 1,46\lambda/D$ . Der Grund für das größere  $\theta_{\min}$  beim Sparrow-Kriterium ist in Abb. 12.6 und Abb. 12.7 dargestellt. Wir zeigen zunächst die Intensität als Funktion des Ortes entlang der Verbindungslinie der Bilder zweier inkohärenter Quellen an den Orten  $\theta = 0$  und  $\theta = \theta_{\min}$  für die beiden Fälle (12.19) und (12.21). Die abgebildete Funktion ist  $I(\theta) + I(\theta - \theta_{\min})$ . Das Rayleigh-Kriterium ist offensichtlich mehr als ausreichend. Betrachten wir die äquivalente Situation für kohärente Quellen; hierbei werden die Amplituden **vor** dem Quadrieren addiert, um die Intensität zu erhalten,  $[A(\theta) + A(\theta - \theta_{\min})]^2$ . Dies ist in Abb. 12.7 für die beiden Kriterien gezeigt. Offensichtlich sind die Punkte nach dem Rayleigh-Kriterium nicht aufgelöst.

Die obige Diskussion legt nahe, daß inkohärente Beleuchtung zu einem größeren Auflösungsvermögen führt. Dies ist aber nicht immer richtig; wir haben eine spezielle Phasenbeziehung zwischen den Quellen angenommen, um dieses Ergebnis zu erzielen. Haben die beiden Quellen einen Phasenunterschied von  $\pi$  können wir die gemeinsame Intensitätsfunktion als  $[A(\theta) - A(\theta - \theta_{\min})]^2$  schreiben, die immer ein Minimum in der Intensität am Mittelpunkt zwischen den beiden Maxima hat, egal wie eng

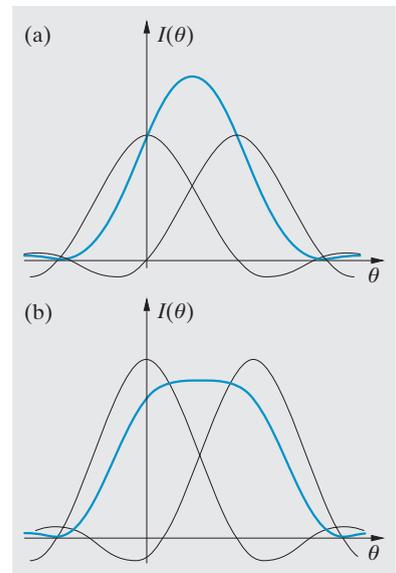
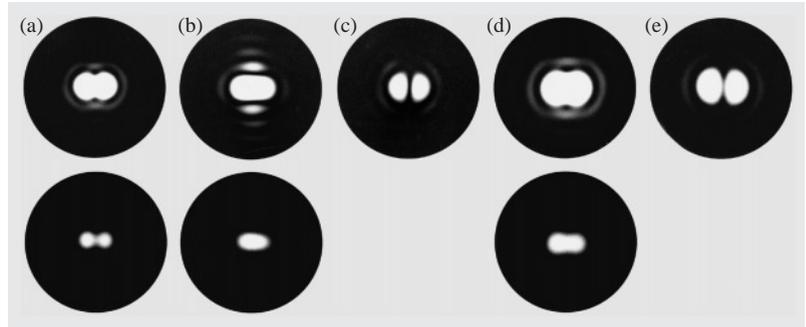


Abb. 12.7a,b. Überlagerung der Bilder zweier kohärent beleuchteter Lochblenden. Die dünnen Linien stellen die Einzelamplituden dar, die stark ausgezogene ihre Summe. (a) Rayleigh-Kriterium; (b) Sparrow-Kriterium

Abb. 12.8a–e. Vergleich zwischen Bildern kohärent und inkohärent abgebildeter Lochblendenpaare. In (a–c) ist die Öffnung so gewählt, daß der Abstand der Lochblenden dem Auflösungsvermögen im Rayleigh-Kriterium entspricht, wobei in (a) die Beleuchtung mit inkohärentem Licht, in (b) mit kohärentem Licht gleicher Phase und in (c) mit kohärentem Licht mit einer Phasenverschiebung  $180^\circ$  erfolgte. In (d) und (e) sind die gleichen Blenden in einem Abstand entsprechend dem Sparrow-Limit dargestellt, (d) mit inkohärentem Licht, (e) mit kohärentem Licht mit Phasenverschiebung beleuchtet. Die untere Reihe zeigt die gleichen Bilder mit kürzerer Belichtungszeit



benachbart die Quellen sind! Natürlich werden die Bilder aufgrund destruktiver Interferenz immer schwächer, je näher die Quellen zusammenrücken. Nichtsdestotrotz gibt es für diesen Fall eine wichtige Anwendung, die sog. **Phasenmaske** (engl. „phase-shift mask“), die bei der Photolithographie in der Mikroelektronik dazu verwendet wird, die Auflösung von eng beieinanderliegenden Elementen auf einer komplexen Photomaske zu verbessern. Abwechselnde Elemente werden mit einem transparenten Film bedeckt, der zu der notwendigen Phasenverschiebung von  $\pi$  führt, um sicherzustellen, daß eine dunkle Linie zwischen den Bildern beider Objekte entsteht (Levenson 1993). Im allgemeinen gilt aber tatsächlich, daß inkohärente Beleuchtung zu einem höheren Auflösungsvermögen führt. Diese Zusammenhänge sind in Abb. 12.8 verdeutlicht, die Bilder eines Paares von Lochblenden unter verschiedenen Beleuchtungsbedingungen zeigt. Man sollte insbesondere bemerken, daß im Falle von kohärenten, gegenphasigen Quellen (Abb. 12.8e) sich der Abstand der Bilder von ihrem wirklichen Abstand deutlich unterscheidet; er wird in diesem Falle durch den Durchmesser der Blenden bestimmt (siehe Aufgabe 12.5)! Eine detaillierte Beschreibung des Einflusses der Kohärenz auf die Bildentstehung kann bei Goodman (1985) gefunden werden.

### 12.3.3 Anwendung der Abbe-Theorie auf das Auflösungsvermögen

Trotz der Schlüsse, die wir im vorhergegangenen Abschnitt gezogen haben, arbeiten die meisten Mikroskope aufgrund der kleinen Abmessungen der Objekte und der praktischen Schwierigkeiten (Abschn. 12.3.6), wirklich räumlich inkohärentes Licht herzustellen, mit kohärenter, oder wenigstens teilweise kohärenter Beleuchtung. Die Abbe-Theorie, die wir in Abschn. 12.2.1 diskutiert haben, kann für kohärente Beleuchtung verwendet werden und ist eine gute Methode, das Auflösungsvermögen eines Mikroskops zu bestimmen.

Kehren wir deshalb zu dem Modell des periodischen Objekts zurück. Das Auflösungsvermögen, das mit einer bestimmten Linse oder einem bestimmten optischen System erzielt werden kann, ist, wie bereits in Abschn. 12.2.1 erwähnt, durch die höchste durch den endlichen Durchmesser der Objektivlinse noch zugelassene Beugungsordnung bestimmt. Hat das Objekt die Periodizität  $d$ , erscheint die erste Beugungsordnung unter dem Winkel  $\theta$ ,

## ✘ Übungsaufgaben

$\lambda = 0,5 \mu\text{m}$ , soweit nichts anderes vermerkt ist.

**12.1** Ein astronomisches Teleskop wird zusammen mit einer Kamera dazu verwendet, ein stark vergrößertes Bild aufzunehmen. Die verwendete photographische Platte hat eine Auflösung von  $0,05 \text{ mm}$ . Wenn der Hauptspiegel einen Durchmesser von  $1 \text{ m}$  und eine Brennweite von  $12 \text{ m}$  hat, welche zusätzliche Vergrößerung kann dann nützlicherweise noch von der Kameraoptik geliefert werden?

**12.2** Ein Objekt besteht aus zwei weißen Punkten auf einem schwarzen Hintergrund. Ihr Abstand beträgt  $3\lambda$ . Berechnen Sie das Bild, das man erhält, wenn man das Objekt mit einem Mikroskop unter folgenden Bedingungen betrachtet:

- (1) axiale, kohärente Beleuchtung, Objektiv mit  $NA = 0,5$  ;
- (2) axiale, kohärente Beleuchtung, Objektiv mit  $NA = 0,2$  ;
- (3) inkohärente Beleuchtung, Objektiv mit  $NA = 0,2$  .

Behandeln Sie das Problem eindimensional.

**12.3** Eine photographische Folie zeigt einen Affen hinter einem Gitter, das aus senkrechten Stäben in gleichen Abständen besteht. Wie kann man räumliche Filterung verwenden, um das Gitter zu entfernen und dabei den Affen nur möglichst gering zu verletzen?

**12.4** Für eine bestimmte Gruppe von Graustufenobjekten (ohne Phasenstruktur) ist das Dunkelfeldbild im photographischen Sinne das Negativ des normalen Bildes. Welche Bedingungen müssen hierfür erfüllt sein?

**12.5** Zwei Objekte werden mit kohärentem gegenphasigem Licht beleuchtet, so daß sie in einem Mikroskop immer aufgelöst werden können, so nahe sie auch zusammenrücken. Was ist ihr scheinbarer Abstand als Funktion der  $NA$  des Mikroskops, wenn der reale Abstand kleiner als das Abbe-Limit wird?

**12.6** Ein Phasenobjekt besteht aus vielen identischen kleinen transparenten Scheiben auf einem gleichförmig beleuchteten Hintergrund. Die Scheiben sind zufallsverteilt, ohne sich zu überlappen, und bedecken zusammengenommen die Hälfte des Gesichtsfeldes. Die Scheiben ändern die Phase des transmittierten Lichts um  $\phi$ . Welches räumliche Filter gibt maximalen Kontrast zwischen den Scheiben und ihrer Umgebung?

**12.7** Berechnen Sie die Dimensionen eines Wollaston-Prismas aus Kalkspat für ein differentielles Interferenzkontrastmikroskop nach *Nomarski* (engl.: „Nomarski DIC microscope“) mit einem Objektiv der Brennweite  $5 \text{ mm}$  und  $NA = 0,6$ . Es sollte so konstruiert sein, daß eine Bildverdopplung nicht beobachtbar ist.

**12.8** Eine beliebige Form der Phasenkontrastabbildung besteht einfach darin, das Mikroskop ein wenig zu defokussieren. Drücken Sie dies in Form eines komplexen räumlichen Filters aus, und wenden Sie es auf den Phasenspalt aus Abschn. 12.4.5 an.

**12.9** Eine Teleskoptlinse wird apodisiert, um die Stärke der Beugungsringe in der Punktantwort zu verringern. Der Objektivradius ist  $R$ , und die Amplitudentransmission wird durch die Verwendung einer Maske mit einer gaußförmigen Transmissionsfunktion mit dem Parameter  $\sigma$  reduziert. Finden Sie den Wert  $\sigma$  der Maske, bei dem die Intensität des ersten Beugungsringes auf  $10\%$  ihres Aus-

gangswerts reduziert ist. Wie verändert sich das Auflösungsvermögen gemäß dem Rayleigh- und dem Sparrow-Kriterium?

**12.10** Berechnen Sie die Auflösungsgrenze eines konfokalen Mikroskops, dessen beide Linsen durch ringförmige Blenden mit dem gleichen Radius wie der der Linsen abgedeckt sind.

**12.11** Ein Hologramm eines bestimmten Objekts wird durch die Verwendung von Licht mit der Wellenlänge  $\lambda_1$  erzeugt. Die Rekonstruktion wird durch einen ähnlichen Referenzstrahl mit der Wellenlänge  $\lambda_2$  vorgenommen. Wie verzerrt sich die Rekonstruktion, und wo kann man sie beobachten? (Nehmen Sie an, alle beteiligten Winkel wären klein.)

**12.12** Berechnen Sie die longitudinale und transversale Auflösung einer holographischen Rekonstruktion in Abhängigkeit von der Wellenlänge, dem Anteil des ausgeleuchteten Teils des Hologramms und der Bildposition. (Verwenden Sie das Fermatsche Prinzip.)

**12.13** Wie ist das Verhältnis zwischen den Rekonstruktionen eines Amplitudenhologramms und seines Negativs?

Daher gilt

$$\gamma(x_0) = \frac{1}{2} [1 + \exp(ik_0 \sin \theta_0)]. \quad (15.71)$$

Die Intensitätsverteilung der Quelle ist die Fouriertransformierte von (15.71) mit der Variablen  $k_0 x_0$ , d. h.  $\delta(\theta) + \delta(\theta - \theta_0)$ . Dieses Resultat ist nicht nur eine Kleinwinkelnäherung, sondern exakt, da die Variablen in der Fouriertransformation  $k_0 x_0$  und  $\sin \theta$  sind.

### Kapitel 12

**12.1** Die Auflösungsgrenze des Teleskops (unter Vernachlässigung der atmosphärischen Effekte) beträgt  $6 \cdot 10^{-7}$  rad. Ein beugungsbegrenzter Fleck hat einen Durchmesser von  $7 \cdot 10^{-3}$  mm. Da der Film eine Auflösung von  $5 \cdot 10^{-2}$  mm besitzt, wird eine zusätzliche Vergrößerung von 7 beide angleichen. In der Praxis wird allerdings der beugungsbegrenzte Bildpunkt durch atmosphärische Störungen verwaschen, weswegen die zusätzliche Vergrößerung nicht notwendig sein wird.

**12.2** Dieses Problem löst man am besten mit der in Abschn. 12.3.1,2 beschriebenen Methode. Im Bildraum wäre das ideale Bild unter der vereinfachten Annahme einer Vergrößerung von eins  $\delta(x - 3\lambda/2) + \delta(x + 3\lambda/2)$ . Die Amplituden-Punktantworten sind  $\text{sinc}(ua)$ , wobei  $a$  die Halbblende  $U \cdot \text{NA}$  ist, d. h.  $0,5 U$  im Fall (a) und  $0,2 U$  in den Fällen (b) und (c).  $U$  ist die Objektentfernung, gleich der Bildentfernung  $V$ . Setzen wir  $u = 2\pi \sin \theta / \lambda = 2\pi x / V\lambda$  ein, erhalten wir

$$\text{Punktantwort} = \text{sinc} \left( \frac{2\pi \text{NA} x}{\lambda} \right). \quad (15.72)$$

In (a) und (b) addieren wir die Amplituden der Punktantwort, gefaltet mit den Deltafunktionen, und quadrieren dann, um die Intensitäten der Bilder zu erhalten; in (c) quadrieren wir die Punktantwort zuerst und addieren dann. Die Resultate sind in Abb. 15.30 gezeigt. Wir sehen, daß die Punkte in Abb. 15.30a,c aufgelöst sind, aber nicht in Abb. 15.30b.

**12.3** Das Beugungsmuster, das in der Fourierebene betrachtet werden kann, besteht aus dem des Affen und einem Satz aus äquidistanten Punkten entlang der horizontalen Achse, die die Gitterstäbe darstellen. Ein Filter, das **nur** diese Reflexe herausfiltert, würde also die Gitterstäbe entfernen und dem Affen dabei nur wenig Schaden zufügen. Diese Lösung setzt allerdings voraus, daß das Dia als *Summe* aus Affe und Gitterstäben dargestellt werden kann. Man kann allerdings auch dafür argumentieren, daß es das *Produkt* der beiden Funktionen ist, wobei die genaue Lösung dann nicht mehr trivial ist. Wir können aber feststellen, daß bei schmalen Stäben der Unterschied zwischen beiden Versionen vernachlässigbar gering ist (d. h. ein vernachlässigbarer Teil des Bildes des Affen wird durch die Gitterstäbe verdeckt). Ansonsten ist die Transformierte des Dias eine Faltung, die dann entfaltet werden muß. Die Technik der Entfaltung ist interessant, aber außerhalb des Rahmens dieses Buches. Siehe beispielsweise *R.H.T. Bates* und *M.J. McDonald* (1986).

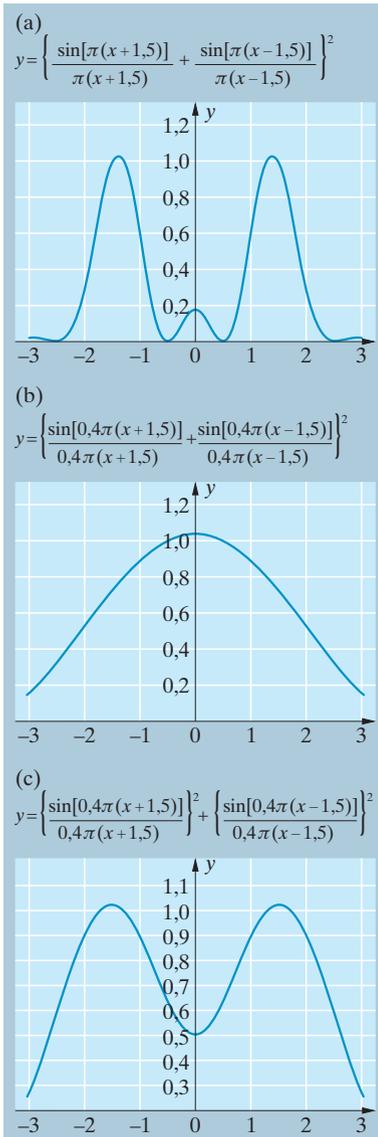


Abb. 15.30a–c. Bilder aus Aufgabe 12.2a–c

**12.4** Nehmen wir an, wir erwarten ein Negativ der *Amplitude*  $f(x, y)$  des Bildes ( $0 \leq f(x, y) \leq 1$ ), d. h.  $1 - f(x, y)$ . Nehmen wir  $\bar{a}$  als mittlere Amplitude (die zwischen 0 und 1 liegt). Dann ist das Dunkelfeldbild  $f(x, y) - \bar{a}$ . Ist der nichtweiße Bereich eines Bildes viel kleiner als der weiße, dann ist  $\bar{a} \approx 1$  und dann gilt  $f(x, y) - \bar{a} = -[1 - f(x, y)]$ , wobei die nichtweißen Bereiche nun *größere* Amplituden haben. Daher ist  $f(x, y) - \bar{a}$  das Negativ (das Minuszeichen kann als Phasenfaktor interpretiert werden). Die Bedingung für ein Bild mit negativer *Amplitude* ist deshalb die, daß  $f$  hauptsächlich weiß ist. Bezüglich der Intensität erzeugt dies ein Bild  $(1 - f)^2$ , das nicht das Negativ von  $f^2$  ist, es sei denn,  $f(x, y)$  ist ein reines Schwarz-Weiß-Bild, d. h. es besitzt keine Halbtöne.

**12.5** Wir behandeln das Problem in einer Dimension und nehmen an, daß die Vergrößerung eins beträgt, so daß die geometrischen Bilder um  $d$ , dem Objektabstand, voneinander entfernt sind. Jeder Punkt erzeugt eine sinc-Funktion in der Bildebene, die die Transformierte der Linse darstellt und die Form

$$\text{sinc} \frac{2\pi \text{NA}}{\lambda} x \quad (15.73)$$

hat, jedoch um das geometrische Bild zentriert ist. Die Intensität ist daher

$$I(x) = \left\{ \text{sinc} \left[ \frac{2\pi \text{NA}}{\lambda} (x - d/2) \right] - \text{sinc} \left[ \frac{2\pi \text{NA}}{\lambda} (x + d/2) \right] \right\}^2. \quad (15.74)$$

Beträgt der Abstand weniger als das Abbesche Limit, dann ist  $d$  viel kleiner als der Maßstab der sinc-Funktion  $\lambda/\text{NA}$ , und wir können  $I(x)$  mit Hilfe von

$$f(x - d/2) - f(x + d/2) = d \frac{df}{dx} \quad (15.75)$$

auswerten, was

$$I(x) = \left[ \frac{2\pi d}{\lambda} \frac{y \cos y - \sin y}{y^2} \right]^2 \quad (15.76)$$

ergibt, wobei  $y = 2\pi x \text{NA}/\lambda$ . Diese Funktion ist bei  $y = 0$  gleich null und hat ein Maximum bei  $y = 2,08$  rad. Daher ist der scheinbare Abstand der beiden Bilder  $2,08\lambda/\pi \text{NA} = 0,66\lambda/\text{NA}$ . Man beachte, daß dies mit dem echten Abstand  $d$  zwischen den Punkten nichts zu tun hat.

**12.6** Die Funktion  $g(x, y)$ , die die Scheiben ohne Phasenverschiebung beschreibt, hat einen Wert von eins auf der Fläche, die von den Scheiben abgedeckt wird, und von null sonst. Ihre Transformierte kann durch

$$G(\zeta) = S(\zeta) \cdot 2\pi R^2 J_1(\zeta R)/\zeta R \quad (15.77)$$

beschrieben werden, wobei  $S(\zeta)$  das Speckle-Muster ist, das durch die zufällige Verteilung der Streuzentren zustande kommt (Dies sollte