

Horst Rollnik

Quantentheorie 2

Quantisierung und Symmetrien
physikalischer Systeme
Relativistische Quantentheorie

Mit 77 Abbildungen



Springer

Professor Dr. Dr. h.c. Horst Rollnik

Universität Bonn

Physikalisches Institut

Nußallee 12

53115 Bonn, Deutschland

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme:

Rollnik, Horst: Quantentheorie / Horst Rollnik. –

Berlin ; Heidelberg ; New York ; Hongkong ; London ; Mailand ; Paris ; Tokio : Springer

(Springer-Lehrbuch)

2. Quantisierung und Symmetrien physikalischer Systeme – Relativistische Quantentheorie. – 2003

ISBN 3-540-43717-7

ISBN 3-540-43717-7 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

ein Unternehmen der BertelsmannSpringer Science+Business Media GmbH

<http://www.springer.de>

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2003

Printed in Germany

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Datenkonvertierung: Fa. Le-TeX, Leipzig

Einbandgestaltung: *design & production* GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier SPIN: 10879786 56/3141/ba - 5 4 3 2 1 0

Inhaltsverzeichnis

1	Zusammenfassung der Grundlagen	1
1.1	Zustände, Observable und Meßwerte	1
1.2	Erwartungswerte, Wahrscheinlichkeitsamplituden und statistische Operatoren	3
1.3	Symmetrietransformationen und unitäre Operatoren	6
1.4	Zeitliche Translationsinvarianz und die Bewegungsgleichungen der Quantenmechanik	7
1.5	Räumliche Translationen, Galilei-Transformationen und die speziellen Axiome der nichtrelativistischen Quantenmechanik	9
1.6	Das Korrespondenzprinzip	12
2	Quantisierung des harmonischen Oszillators	15
2.1	Die Leiteroperatoren	16
2.1.1	Die einfachste Form der kanonischen Kommutatoren	16
2.1.2	Endgültige Form der Leiteroperatoren, der Besetzungszahloperator	17
2.1.3	Der innere Grund für die Existenz der Leiteroperatoren, die $U(1)$ Invarianz	19
2.2	Algebraische Lösung des Eigenwertproblems für den Oszillator	23
2.3	Mathematische Existenzfragen, Zusammenhang mit der wellenmechanische Formulierung	29
2.3.1	Formaler Standpunkt	29
2.3.2	Konstruktiver Standpunkt (Hermitesche Polynome)	30
2.3.3	Vergleich beider Standpunkte	32
2.4	Ort und Impuls in der Besetzungszahldarstellung	33
2.5	Zeitliches Verhalten des harmonischen Oszillators im Heisenbergbild	37
2.6	Exkurs: Die Entdeckung der kanonischen Vertauschungsrelationen	39
2.7	Geladener Oszillator im elektrischen Feld, Anwendung auf Molekülspektren	46
2.8	Verallgemeinerung auf mehrere Freiheitsgrade	51
2.9	Quantentheorie des elektromagnetischen Feldes	59

2.9.1	Das Strahlungsfeld als Überlagerung von Oszillatoren	59
2.9.2	Formale Quantisierung des elektromagnetischen Feldes	63
2.9.3	Die Photonen	67
2.10	Schwingende Saiten und Strings	70
2.10.1	Die verschiedenen Formen von Strings	71
2.10.2	Klassische Dynamik der Strings	75
2.10.3	Lösungen der Wellengleichung für Strings	79
2.10.4	Quantentheorie der freien Strings	83
3	Quantentheorie des Drehimpulses I	87
3.1	Elementare Definition des Drehimpulses und Berechnung seiner Kommutatoren	87
3.2	Eigenschaften der Drehungen	89
3.2.1	Orthogonale Transformationen	90
3.2.2	Eine unerwartete Eigenschaft der Drehung um 360° . . .	93
3.2.3	Die Gruppe $SU(2)$	94
3.2.4	Die Generatoren der Drehgruppe	99
3.3	Allgemeine Definition des Drehimpulsoperators	107
3.3.1	Verhalten von Vektor-Observablen unter Drehungen . .	110
3.3.2	Verhalten von skalaren Observablen unter Drehungen .	112
3.4	Allgemeine Lösung des Eigenwertproblems für den Drehimpuls	114
3.4.1	Formulierung des Eigenwertproblems	114
3.4.2	Leiteroperatoren und die Eigenwerte	115
3.4.3	Folgerungen und Beispiele	120
3.4.4	Die Unschärferelationen für den Drehimpuls	122
3.5	Eigenfunktionen des Bahndrehimpulses	126
3.5.1	Drehungen in der Ortsdarstellung	126
3.5.2	Definition und Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen	130
3.5.3	Die Kugelflächenfunktionen als harmonische Funktionen	140
3.5.4	Orthogonalität und Vollständigkeit der Kugelflächenfunktionen	143
4	Theorie der gebundenen Zustände	147
4.1	Die Energieeigenzustände für zentralsymmetrische Einteilchensysteme	148
4.1.1	Erhaltung des Bahndrehimpulses, die Richtungs-Entartung	148
4.1.2	Allgemeine Struktur des Energiespektrums	155
4.1.3	Die verborgene Symmetrie des Coulombproblems	163
4.1.4	Zufällige Entartung des 3-d isotropen Oszillators	174
4.2	Schrödingersche Störungsrechnung	182
4.2.1	Die erste Näherung für nicht entartete Eigenwerte	183

4.2.2	Zweite und höhere Näherungen	187
4.2.3	Einfache Beispiele und Vergleich mit exakten Rechnungen	189
4.2.4	Aufspaltung eines entarteten Eigenwerts	194
4.3	Die Wechselwirkung mit elektromagnetischen Feldern	196
4.3.1	Die elektrischen und magnetischen Dipolmomente	200
4.3.2	Anwendung auf die Theorie des Zeeman-Effekts	203
4.3.3	Der Starkeffekt	207
4.3.4	Grundlagen der Theorie des Magnetismus	210
4.3.5	Klassische und quantentheoretische Deutung des Magnetismus	214
5	Quantentheorie des Drehimpulses II	217
5.1	Der Spin des Elektrons und die Gruppe $SU(2)$	217
5.1.1	Darstellung des Spins mit Hilfe von Pauli-Matrizen und -Spinoren	220
5.1.2	Pauli-Algebra als Beispiel einer Clifford-Algebra	224
5.1.3	Die Drehungen der Pauli-Spinoren	228
5.1.4	Pauli-Gleichung und Spin-Bahn-Kopplung	231
5.1.5	Der g -Faktor und die minimale elektromagnetische Wechselwirkung	234
5.2	Zusammensetzung von Drehimpulsen	237
5.2.1	Zusammensetzung zweier quantenmechanischer Systeme, der Produktraum	239
5.2.2	Der Produktraum $\mathcal{D}_{j_1} \otimes \mathcal{D}_{j_2}$ und seine Ausreduktion	241
5.2.3	Zwei wichtige Beispiele	246
5.2.4	Einige Eigenschaften der Clebsch-Gordan-Koeffizienten	249
5.2.5	Anwendung: Die Dublettaufspaltung	253
5.3	Tensoren und das Wigner-Eckart-Theorem	258
5.3.1	Kartesische und sphärische Tensoren	259
5.3.2	Tensoroperatoren in der Quantenmechanik	265
5.3.3	Das Wigner-Eckart-Theorem	267
5.3.4	Illustration und Folgerungen des Theorems	270
5.4	Drehimpulsentartung im Kontinuum, die Partialwellenentwicklung	275
5.4.1	Drehimpulsanalyse für ein freies Teilchen ohne Spin	276
5.4.2	Die Partialwellenentwicklung der Streuamplitude	283
5.4.3	Eigenschaften von Streuamplituden und Wirkungsquerschnitten	288
5.4.4	Die Streuung von Teilchen mit Spin	291

6	Quantenmechanik ununterscheidbarer Teilchen	297
6.1	Die Regeln für die Beschreibung mehrerer Teilchen	297
6.2	Die Ununterscheidbarkeit beim Zwei Teilchen System	301
6.3	Die wichtigsten Ergebnisse der Darstellungstheorie der Permutationsgruppe	304
6.4	Die realisierten Permutationssymmetrien, Fermi-, Bose- und Para-Teilchen und deren Statistiken	314
7	Einführung in die relativistische Quantentheorie	323
7.1	Erinnerung an die spezielle Relativitätstheorie, das Problem einer relativistischen Schrödingergleichung	324
7.1.1	Natürliche Einheiten	331
7.2	Die physikalischen Probleme der Klein-Gordon-Gleichung	332
7.3	Der Weg zur Dirac-Gleichung	336
7.4	Die Eigenschaften der γ -Matrizen	340
7.5	Die Dirac-Gleichung und die elektromagnetische Wechselwirkung	346
7.6	Der Dirac-Strom	349
7.7	Die freie Dirac-Gleichung, Interpretation der Spinoren	354
7.7.1	Dirac-Spinoren für positive Energien, die Helizitäten	357
7.7.2	Die Polarisationen eines relativistischen Teilchens	361
7.8	Die physikalischen Erfolge der Dirac-Theorie	366
7.8.1	g -Faktor des Elektrons	368
7.8.2	Die Spin-Bahn Kopplung	369
7.8.3	Ursprung des Thomas-Faktors	371
7.8.4	Dirac-Theorie des Wasserstoff-Atoms	372
7.9	Spinserhaltung und Zitterbewegung	377
7.10	Die negativen Energien und die Löchertheorie	381
7.10.1	Die Dirac-Spinoren als Feldoperatoren	388
7.10.2	Teilchen-Antiteilchen-Konjugation	391
7.11	Die relativistische Kovarianz der Dirac-Gleichung	395
7.11.1	Allgemeiner Beweis	396
7.11.2	Explizite Form der eigentlichen Lorentz- Transformationen für Spinoren	398
7.11.3	Die diskreten Symmetrie-Transformationen	402
7.12	Die Observablen der Dirac-Theorie	405
7.12.1	Die bilinearen Observablen	405
7.12.2	Chiralität und die Darstellungen der eigentlichen Lorentz-Gruppe	408
7.12.3	Die elektrischen und chiralen Ladungen	411
	Sachverzeichnis	417