

## Vorwort zu Band 3

Der traditionelle Aufbau der klassischen Elektrodynamik in vielen Vorlesungen und Lehrbüchern beginnt mit einer ausführlichen Behandlung von Elektrostatik, Magnetostatik und stationären Strömen, und wendet sich erst dann den vollen, zeitabhängigen Maxwell'schen Gleichungen in deren lokaler Form und einer Reihe von klassischen Anwendungen aus Nachrichtentechnik und Optik zu. In diesem Band schlage ich einen etwas anderen Weg ein: Ausgehend von den Maxwell'schen Gleichungen in integraler Form, d. h. von der phänomenologischen, experimentell erwiesenen Basis der Elektrodynamik, werden die lokalen Gleichungen aufgestellt und von Anfang an in ihrer vollen, zeit- und raumabhängigen Form diskutiert. Statische oder stationäre Verhältnisse erscheinen als Spezialfälle, bei denen die Maxwell'schen Gleichungen in zwei unabhängige Gruppen zerfallen und daher bis zu einem gewissen Grad entkoppelt werden.

Großes Gewicht lege ich auf die Symmetrien der Maxwell'schen Gleichungen und insbesondere auf ihre Kovarianz unter Lorentz-Transformationen. Ihre Einbettung in den Rahmen der klassischen Feldtheorie mittels einer Lagrangedichte und über das Hamilton'sche Extremalprinzip ist ein zentrales Thema des Buches. Damit erleben die allgemeinen Prinzipien, die in der Mechanik entwickelt wurden, eine vertiefte und verallgemeinernde Anwendung, die als Modell und Vorbild für jede klassische Feldtheorie dient. Auch die Notwendigkeit, bei den raum- und zeitabhängigen Feldern der Maxwell-Theorie den traditionellen Rahmen der Tensoranalysis im  $\mathbb{R}^3$  auf den äußeren Kalkül über  $\mathbb{R}^4$  zu erweitern, habe ich hoffentlich klar genug dargestellt. Die ehrwürdige Vektor- und Tensoranalysis, die auf dreidimensionale, Euklidische Räume zugeschnitten ist, reicht nicht aus und muss auf höhere Dimensionen und auf Minkowski-Signatur verallgemeinert werden. So wie das äußere Produkt die Verallgemeinerung des Kreuzprodukts im  $\mathbb{R}^3$  ist, so liefert die Cartan'sche äußere Ableitung die natürliche Verallgemeinerung der Rotation des  $\mathbb{R}^3$ , und fasst zugleich die vertrauten Operationen Gradient und Divergenz mit der (verallgemeinerten) Rotation zusammen.

Unter den Anwendungen gebe ich wenige ausgewählte und wie mir scheint besonders charakteristische Beispiele, darunter eine hoffentlich klare Diskussion von Polarisation elektromagnetischer Wellen. Hier mehr zu tun, hieße eine Reihe von gut eingeführten und bewährten Lehrbüchern der deutschen und der internationalen Literatur, von Cl. Schäfer, A. Sommerfeld, R. Becker und F. Sauter, L. D. Landau und E. M. Lifshits, bis zu J. D. Jacksons Klassiker zu verdoppeln. Zudem

meine ich, dass man heute mehr Gewicht auf neuere Anwendungen, von optischen Pinzetten über bildgebende Verfahren bis zur Laserphysik und der modernen Quantenoptik legen sollte – zu viel, um in einem Band wie diesem den angemessenen Platz zu finden.

Statt dessen verfolge ich im fünften Kapitel – als Novum – eine andere, heute sehr wichtige Richtung: die Konstruktion von nicht-Abel'schen Eichtheorien. Solche sog. Yang Mills-Theorien<sup>1</sup> sind für unser heutiges Verständnis der fundamentalen Wechselwirkungen der Natur wesentlich und unverzichtbar. Obwohl solche Theorien, die die Grundlage des sog. Standardmodells der Elementarteilchenphysik bilden, tief in die *quantisierte* Feldtheorie hinein führen, sind ihr Aufbau und ihre wesentlichen Züge rein *klassischer* Natur, solange man nur die Strahlung, d. h. das Analogon der Maxwell-Felder und klassische skalare Felder betrachtet, die fermionischen Materiebausteine aber außer Acht lässt. Nicht-Abel'sche Eichtheorien werden getreulich nach dem Vorbild der Maxwell-Theorie konstruiert und weisen viele Ähnlichkeiten, aber auch physikalisch bedeutsame Unterschiede zu dieser auf. Sogar das Phänomen der spontanen Symmetriebrechung, das vor dem Ausufern zu zahlreicher masseloser Felder rettet, ist im Wesentlichen auf klassischer Ebene definiert. Angesichts der universalen Bedeutung von Eichtheorien in unserem Verständnis der fundamentalen Wechselwirkungen wäre es schade, wenn man diesen Schritt nicht vollziehen würde, der sich auf natürliche Weise an die Maxwell'sche Theorie anschließt.

Vieles von dem, was in diesen Band aufgenommen wurde, habe ich in zahlreichen Vorlesungen erprobt, die ich an der Johannes Gutenberg-Universität im Laufe der Jahre gehalten habe. Ich danke daher an dieser Stelle den Studenten und Studentinnen, die diese Vorlesungen gehört haben, sowie den getreuen Assistenten und Assistentinnen, die viele Übungsgruppen und Seminare mit Eifer und Engagement betreut haben, für kritische Fragen, Kommentare und viele Anregungen.

Besonders erwähnen möchte ich Mario Paschke, der immer wieder originelle Ideen in die Diskussion warf und auf interessante, manchmal zu Unrecht vergessene Literatur aufmerksam machte, sowie Nikolaos Papadopoulos und Rainer Häußling, die Teile des Entwurfs gelesen und wichtige oder nachdenkliche Anregungen gegeben haben.

Die Zusammenarbeit mit dem Springer-Verlag in Heidelberg und mit der LE-TeX GbR in Leipzig war dieses Mal schon geradezu routiniert und wie bei den drei anderen Bänden ausgezeichnet. Hierfür danke ich besonders Herrn Dr. Thorsten Schneider bei Springer und Herrn Uwe Matrisch bei LE-TeX.

Mainz und Friedrichskoog, August 2003

*Florian Scheck*

<sup>1</sup> Erste Ideen hierzu wurden von Oskar Klein, *Z. Physik* **37** (1926) 895, und der Überlieferung nach von Wolfgang Pauli entwickelt.

Beziehung  $d\tau = dt'/\gamma$  zwischen Eigenzeit und Koordinatenzeit ausführt und hierbei die Formel  $\delta(y^0 - x^0(\tau)) = \delta(ct - ct') = \delta(t - t')/c$  verwendet,

$$j^0(t, \mathbf{y}) = ce \delta^{(3)}(\mathbf{y} - \mathbf{x}(t)) \equiv c\rho(t, \mathbf{y}),$$

$$j^i(t, \mathbf{y}) = e v^i(t) \delta^{(3)}(\mathbf{y} - \mathbf{x}(t)), \quad i = 1, 2, 3.$$

Gleichung (1.25) beschreibt die vom bewegten Teilchen erzeugten Dichten  $\rho$  und  $\mathbf{j}$  richtig und obendrein in einer Form, die ihren Charakter als Lorentz-Vektor offensichtlich macht. Dass  $j(y)$  die Kontinuitätsgleichung  $\partial_\mu j^\mu(y) = 0$  erfüllt, ist eine Übungsaufgabe.

## 1.4 Die Maxwell'schen Gleichungen in lokaler Form

Die integrale Form der Grundgleichungen (1.12), (1.14), (1.16) und (1.18) hat den Vorteil, dass sie tatsächlich messbare Größen enthält und daher direkt mit den Ergebnissen von Experimenten vergleichbar sind. Ihr Nachteil ist, dass sie konkrete Anordnungen wie Leiterschleifen, Volumina, geschlossene Flächen u. dgl. enthalten und dass sie Dinge verknüpfen, die nicht ohne Weiteres als „Ereignisse“ interpretiert werden können, d. h. als physikalische Phänomene, die an einem definierten Ort  $\mathbf{x}$  zur definierten Zeit  $t$  stattfinden. Um von derlei konkreten experimentellen Aufbauten wegzukommen, überführt man die Grundgleichungen unter Verwendung der Integralsätze aus Abschn. 1.2 in lokale Gleichungen, d. h. in partielle Differentialgleichungen, die am selben Raumzeitpunkt  $(t, \mathbf{x})$  formuliert sind. Man gewinnt damit zweierlei: zum Einen sind in solchen lokalen Gleichungen alle (historischen) experimentellen Anordnungen enthalten, aus denen man die Maxwell-Gleichungen in integraler Form abstrahiert hat; zum Anderen erlauben sie es, neue, von den Ersteren unabhängige Experimente vorzuschlagen und auf diese Weise die Theorie neuen Tests zu unterwerfen.

Ein berühmtes Beispiel sind die elektromagnetischen Wellen im Vakuum: Aus den Maxwell'schen Gleichungen in lokaler Form folgt die Wellengleichung, deren Lösungen zu vorgegebenen Randbedingungen berechnet werden können. Diese Konsequenz der Theorie wurde 1887 in den Versuchen Heinrich Hertz' überzeugend bestätigt. Gleichzeitig wurde damit die Realität des Maxwell'schen Verschiebungsstroms bestätigt, den dieser aus theoretischen Überlegungen postuliert hatte.

### 1.4.1 Induktions- und Gauß'sches Gesetz

Das Induktionsgesetz (1.12) ist mit der im eben beschriebenen Sinn lokalen Aussage

$$\nabla \times \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = -f_F \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) \quad (1.26)$$

verträglich. Um dies zu sehen, wende man den Stokes'schen Satz in der Form (1.7) auf die linke Seite von (1.13a) an,

$$\oint_{\mathcal{C}=\partial F} ds \cdot \mathbf{E}(t, \mathbf{x}') = \iint_F d\sigma (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \hat{\mathbf{n}}.$$

Dann argumentiert man, dass der Weg  $\mathcal{C}$  auf stetige Weise zusammen gezogen werden kann, die von ihm eingeschlossene Fläche aber gleichzeitig auf einen Punkt schrumpft. In diesem Grenzfall müssen die Integranden gleich sein und es entsteht die lokale Gleichung (1.26). Man muss aber im Auge behalten, dass das Induktionsgesetz in seiner integralen Form zwar aus (1.26) folgt, dass die lokale Form aber nicht zwingend daraus abgeleitet ist, sondern dass in ihr eine zusätzliche Hypothese steckt. Diese Annahme ist in der Formel (1.13b) zu erkennen, die ja aussagt, dass ein Feld, das in einem Bezugssystem ein reines elektrisches Feld ist, bezüglich eines relativ dazu bewegten Systems als eine Linearkombination von elektrischem und magnetischem Feld erscheint.

Dies ist vielleicht überraschend, aber physikalisch durchaus einsichtig: Betrachten wir noch einmal das Beispiel eines geladenen Punktteilchens, das sich geradlinig-gleichförmig bewegt. In seinem Ruhesystem erzeugt es nichts Anderes als das bekannte elektrische Coulomb-Feld einer Punktladung. In jedem anderen Bezugssystem, in dem es die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  hat, stellt das Teilchen außer einer Ladungs- auch eine Stromdichte dar, die über das Gesetz (1.18) ein Magnetfeld erzeugt.

Auch das Gauß'sche Gesetz (1.14) läßt sich in eine lokale Aussage verwandeln, wenn man die linke Seite mittels des Gauß'schen Integralsatzes (1.7) in ein Volumenintegral verwandelt,

$$\iint_F d\sigma (\mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}) = \iiint_{V(F)} d^3x \nabla \cdot \mathbf{D} = f_G \iiint_{V(F)} d^3x \varrho(t, \mathbf{x}).$$

Da das Volumen beliebig ist und seine Oberfläche  $F$  stetig zusammengezogen werden kann, müssen die Integranden gleich sein. Es entsteht die lokale Gleichung (1.15c), die wir in Abschn. 1.3.2 hergeleitet haben.

### 1.4.2 Lokale Form des Biot-Savart Gesetzes

Hier ist das Ziel, aus dem integralen Gesetz (1.18) eine lokale Gleichung zu destillieren. Zunächst notiert man die Hilfsformeln

$$\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = -\nabla_x \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = +\nabla_{x'} \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right). \quad (1.27)$$

Setzt man die erste dieser Formeln auf der rechten Seite von (1.18) ein und beachtet, dass man die Ableitungen nach  $\mathbf{x}$  aus dem Integral her-

auszählen kann, so ist

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(t, \mathbf{x}) &= -\frac{f_{\text{BS}}}{4\pi} \iiint d^3x' \mathbf{j}(t, \mathbf{x}') \times \nabla_x \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \\ &= +\frac{f_{\text{BS}}}{4\pi} \nabla_x \times \iiint d^3x' \frac{\mathbf{j}(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}.\end{aligned}$$

Der Vorzeichenwechsel kommt von der Vertauschung der Reihenfolge im Vektorprodukt. Jetzt berechnet man die Rotation von  $\mathbf{H}$  und benutzt die bekannte Identität (s. auch (1.47c) unten)

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} . \quad (1.28)$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H}(t, \mathbf{x}) &= \frac{f_{\text{BS}}}{4\pi} \nabla_x \times \left( \nabla_x \times \iiint d^3x' \frac{\mathbf{j}(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \\ &= \frac{f_{\text{BS}}}{4\pi} \nabla_x \iiint d^3x' \left( \mathbf{j}(t, \mathbf{x}') \cdot \nabla_x \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \right) \quad (1.29a)\end{aligned}$$

$$- \frac{f_{\text{BS}}}{4\pi} \iiint d^3x' \mathbf{j}(t, \mathbf{x}') \Delta_x \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) . \quad (1.29b)$$

Im ersten Term (1.29a) der rechten Seite ersetzt man den Gradienten nach der Variablen  $x$  mittels der Hilfsformel (1.27) durch den Gradienten nach  $x'$ . In einem zweiten Schritt integriert man partiell nach dieser Variablen.

Im zweiten Term (1.29b) benutzt man die Relation

$$\Delta_x \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') , \quad (1.30)$$

(s. z. B. Band 2, Anhang A.1, Beispiel A.3, wo diese Formel bewiesen wird.) Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H}(t, \mathbf{x}) &= \frac{f_{\text{BS}}}{4\pi} \nabla_x \left( \iiint d^3x' (\nabla_{x'} \cdot \mathbf{j}(t, \mathbf{x}') \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}) \right) \\ &\quad + f_{\text{BS}} \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) .\end{aligned}$$

Die im Integral auftretende Divergenz von  $\mathbf{j}$  ist aufgrund der Kontinuitätsgleichung (1.21) gleich der negativen Zeitableitung der Ladungsdichte  $\varrho(t, \mathbf{x})$ . Somit folgt

$$\nabla \times \mathbf{H}(t, \mathbf{x}) = -\frac{f_{\text{BS}}}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \nabla_x \iiint d^3x' \frac{\varrho(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + f_{\text{BS}} \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) .$$

Im ersten Term der rechten Seite ist der Gradient des Integrals proportional zu  $\mathbf{D}(t, \mathbf{x})$ ,

$$\nabla_x \iiint d^3x' \frac{\varrho(t, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = -\frac{4\pi}{f_G} \mathbf{D}(t, \mathbf{x}) ;$$

Dies folgt aus der Maxwell'schen Gleichung (1.15c), wenn man davon die Divergenz bildet, und der Relation (1.30) oben. Setzt man dies ein, so ergibt sich die Gleichung

$$\nabla \times \mathbf{H}(t, \mathbf{x}) = \frac{f_{BS}}{f_G} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(t, \mathbf{x}) + f_{BS} \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) , \quad (1.31)$$

die in allen Teilen vollständig lokal ist.

### 1.4.3 Lokale Gleichungen in allen Maßsystemen

Wir fassen die lokalen Gleichungen (1.17), (1.26), (1.15c) und (1.31) zusammen, zunächst noch ohne Festlegung auf eines der in der Physik oder in den angewandten Naturwissenschaften verwendeten Maßsysteme:

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = 0 , \quad (1.32a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) + f_F \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = 0 , \quad (1.32b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(t, \mathbf{x}) = f_G \varrho(t, \mathbf{x}) , \quad (1.32c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(t, \mathbf{x}) - \frac{f_{BS}}{f_G} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(t, \mathbf{x}) = f_{BS} \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) . \quad (1.32d)$$

Diese Gleichungen werden ergänzt durch die Lorentz-Kraft (1.19) und durch die Beziehung zwischen  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{E}$ , bzw. zwischen  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{H}$ , die im Vakuum gelten und die ebenfalls davon abhängen, welches System von Maßeinheiten gewählt wurde,

$$\mathbf{D}(t, \mathbf{x}) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) , \quad \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \mu_0 \mathbf{H}(t, \mathbf{x}) . \quad (1.33)$$

Die positiven Konstanten  $f_F$ ,  $f_G$  und  $f_{BS}$  sind dabei so bezeichnet, dass man noch erkennt, in welchem der integralen Grundgesetze sie vorkommen: „F“ für Faraday, „G“ für Gauß und „BS“ für Biot und Savart. Die ebenfalls positiven Konstanten  $\varepsilon_0$  und  $\mu_0$  werden *Dielektrizitätskonstante*, bzw. *magnetische Permeabilität* genannt. Als Erstes bestätigt man, dass die Kontinuitätsgleichung (1.21) respektiert wird, d. h. dass sie in den inhomogenen Gleichungen (1.32c) und (1.32d) enthalten ist. Aus (1.32c) und (1.32d) folgt

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = \frac{1}{f_G} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{D}) + \frac{1}{f_{BS}} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \frac{1}{f_G} \nabla \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} = 0 .$$

Dies ist in der Tat gleich Null, da die partiellen Ableitungen nach der Zeit und nach den Raumkomponenten vertauschen und da die Divergenz eines Rotationsfeldes verschwindet.

#### 1.4.4 Die Frage der physikalischen Einheiten

Die Maxwell'schen Gleichungen (1.32a)–(1.32d) und der Ausdruck (1.19) für die Lorentz-Kraft werden noch ergänzt durch die Verknüpfungsrelationen (1.33) zwischen dem Verschiebungsfeld  $\mathbf{D}$  und dem elektrischen Feld  $\mathbf{E}$ , bzw. zwischen der magnetischen Induktion  $\mathbf{B}$  und dem magnetischen Feld  $\mathbf{H}$ . Verfügt man über die Konstanten  $f_F$  in (1.32b) und über  $f_{BS}/f_G$  in (1.32d) so, dass

$$f_F = \frac{f_{BS}}{f_G} \quad (1.34)$$

wird, dann hat das Produkt aus  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{D}$  dieselbe Dimension wie das Produkt aus  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{B}$  oder, mit den Relationen (1.33)

$$\frac{[\mu_0]}{[\varepsilon_0]} = \frac{[\mathbf{E}^2]}{[\mathbf{H}^2]} \quad (1.35)$$

Während (1.34) eine Übereinkunft ist, die relative Dimensionen derart festlegt, dass

$$[\mathbf{E}] : [\mathbf{B}] = [\mathbf{H}] : [\mathbf{D}]$$

gilt, kann man über die verbleibende Freiheit in der Wahl des Maßsystems mehr erfahren, wenn man aus (1.32a)–(1.32d) schon anderweitig bekannte Gesetze ableitet.

##### a) Coulomb'sche Kraft zwischen Punktladungen

Aus der dritten Gleichung (1.32c) folgt das Coulomb-Kraftfeld mit einem vom Maßsystem abhängigen Vorfaktor,

$$\mathbf{F}_C = \kappa_C \frac{e_1 e_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad \text{mit } \kappa_C = \frac{f_G}{4\pi\varepsilon_0}. \quad (1.36)$$

Dies sieht man folgendermaßen ein: In einer statischen Situation, d. h. in einer Anordnung, bei der alle Felder unabhängig von der Zeit sind, entkoppeln die beiden Gruppen  $(\mathbf{E}, \mathbf{D})$  und  $(\mathbf{H}, \mathbf{B})$  vollständig von einander. Für die erste Gruppe reduzieren sich die Gleichungen (1.32b) und (1.32c) zusammen mit der Relation (1.33) auf

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{f_G}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{x}).$$

Da das statische elektrische Feld rotationsfrei ist, kann man es als (per Konvention) negatives Gradientenfeld darstellen,  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi(\mathbf{x})$ , womit die zweite Gleichung zur Poisson-Gleichung (1.15b) wird,

$$\Delta\Phi(\mathbf{x}) = -f_G \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\mathbf{x}).$$

Setzen wir jetzt eine Punktladung  $e_1$  beispielsweise in den Punkt  $\mathbf{x}_0$ , so ist

$$\rho(\mathbf{x}) = e_1 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Die Relation (1.30) gibt die entsprechende Lösung der Poisson-Gleichung, nämlich

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{f_G}{4\pi\epsilon_0} \frac{e_1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|}. \quad (1.37)$$

Jetzt genügt es,  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \mathbf{r}$  zu setzen und den negativen Gradienten von  $\Phi$  mit der Ladung  $e_2$  des zweiten Massenpunktes zu multiplizieren, der bei  $\mathbf{x}$  sitzen soll, um die angegebene Formel für die Coulomb-Kraft zu erhalten.

### b) Wellengleichung und Lichtgeschwindigkeit

Betrachtet man die Maxwell-Gleichungen wieder mit ihrer vollen Zeitabhängigkeit, aber ohne äußere Quellen, so folgt aus (1.32a)–(1.32d), wobei dass jede Komponente der elektrischen und magnetischen Felder die Wellengleichung erfüllt. Wir zeigen dies am Beispiel des elektrischen Feldes:

Nimmt man die Rotation der Gleichung (1.32b) und verwendet die Formel (1.28), so erhält man

$$-\Delta \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) + \mu_0 f_F \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{H}(t, \mathbf{x}) = 0.$$

Gleichung (1.32d) mit  $\mathbf{j}(t, \mathbf{x}) \equiv 0$  und die Verknüpfungsrelation (1.33) erlaubt es aber, die Rotation des  $H$ -Feldes durch die Zeitableitung von  $\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$  auszudrücken,

$$\nabla \times \mathbf{H}(t, \mathbf{x}) = \epsilon_0 \frac{f_{BS}}{f_G} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(t, \mathbf{x}).$$

Setzt man dies ein und benutzt die Konvention (1.34), so erhält man

$$\left( f_F^2 \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = 0,$$

d. h. eine partielle Differentialgleichung, die für jede Komponente des elektrischen Feldes im Vakuum gilt. Der Vorfaktor des ersten Terms muss die physikalische Dimension einer inversen Geschwindigkeit zum Quadrat haben, d. h.  $[f_F^2 \mu_0 \epsilon_0] = \text{T}^2 \text{L}^{-2}$ . Gibt man als Lösungsansatz für die Zeit- und die Raumabhängigkeit eine ebene Welle vor, also etwa

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \mathcal{E} e^{-i\omega t} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}},$$

so entsteht die Beziehung  $(f_F^2 \mu_0 \epsilon_0) \omega^2 = \mathbf{k}^2$  zwischen Kreisfrequenz und Wellenzahl. Mit  $\omega = 2\pi\nu$  und  $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$  ergibt dies die bekannte Beziehung  $\nu\lambda = c$  für die Ausbreitung von Licht im Vakuum, wenn

$$f_F^2 \mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2} \quad (1.38)$$

gilt. Dies ist eine weitere Bedingung an die Konstanten des Maßsystems.



### c) Ampère'sche Kraft im Vergleich zur Coulomb-Kraft

Wir merken noch an, dass man zur selben Schlussfolgerung gelangt, wenn man die Ampère'sche Kraft pro Wegelement  $dl$  zwischen zwei parallelen, geradlinigen, von den konstanten Strömen  $J_1$  bzw.  $J_2$  durchflossenen Leitern ausrechnet, die sich im Abstand  $a$  voneinander befinden. Aus der Formel (1.19) für die Lorentz-Kraft und aus (1.32d) findet man für deren Betrag

$$\frac{d}{dl} |F_A| = 2\kappa_A \frac{I_1 I_2}{a}, \quad \text{mit} \quad \kappa_A = \frac{f_F^2 f_G \mu_0}{4\pi}. \quad (1.39)$$

Aus einer einfachen Dimensionsbetrachtung schließt man, dass das Verhältnis  $\kappa_C/\kappa_A$  die Dimension einer quadrierten Geschwindigkeit hat, also  $L^2T^{-2}$ . In ihren Versuchen über diese Kräfte fanden Weber und Kohlrausch (1882), dass die Geschwindigkeit, die hier auftaucht den numerischen Wert von  $c$ , der Lichtgeschwindigkeit hat – obwohl man es mit einer stationären Situation zu tun hat, bei der nur statische Kräfte gemessen werden! Es ist also

$$\frac{\kappa_C}{\kappa_A} = c^2, \quad \text{d. h. wieder} \quad f_F^2 \mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}.$$

Damit sind die wesentlichen Bedingungen zusammengetragen, die erfüllt sein müssen, um ein System von physikalischen Maßeinheiten festzulegen.

#### 1.4.5 Die elektromagnetischen Gleichungen im SI-System

Das SI-System (système international d'unités) oder *rationale MKSA-System* zeichnet sich dadurch aus, dass

$$f_F = f_G = 1 \quad (1.40)$$

gewählt werden und dass außer den Einheiten {m,kg,s} eine eigene Einheit für die Stromstärke, das Ampère, eingeführt wird. Diese wird über die Formel (1.39) wie folgt definiert:

In beiden parallelen Drähten, deren Abstand  $a = 1$  m sein soll, fließe dieselbe Stromstärke  $I_1 = I_2 \equiv I$ . Diese Stromstärke hat den Wert 1 A, wenn die Ampère'sche Kraft pro Einheit der Länge, d. h. pro Meter, gerade gleich  $2 \cdot 10^{-7} \text{ N} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ kgms}^{-2}$  ist. Mit der Definition des Ampère ist auch die Einheit der Ladung, das Coulomb, festgelegt, es gilt (wie schon in Abschn. 1.3.5 festgestellt) der Zusammenhang  $1 \text{ C} = 1 \text{ A s}$ .

Mit der Konvention (1.40) wird der Wert von  $\mu_0$  wie folgt festgelegt,

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ NA}^{-2}. \quad (1.41a)$$

Mit der Relation (1.38) und mit  $f_F = 1$  ist dann

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi c^2} \cdot 10^7, \quad (1.41b)$$

wobei die physikalischen Einheiten dieser beiden Größen voneinander verschieden sind und folgendermaßen mit denen der Masse M, der Länge L, der Stromstärke I und der Zeit T zusammenhängen:

$$[\varepsilon_0] = M^{-1}L^{-3} I^2 T^4, \quad [\mu_0] = M L I^{-2} T^{-2},$$

Die Konstanten im Coulomb'schen bzw. im Ampère'schen Kraftgesetz liegen wie folgt fest:

$$\kappa_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = c^2 10^{-7}, \quad \kappa_A = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7}, \quad (1.41c)$$

mit den aus  $[\varepsilon_0]$  und  $[\mu_0]$  folgenden Dimensionen.

Die lokalen Maxwell-Gleichungen lauten somit in SI-Einheiten

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (1.42a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (1.42b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(t, \mathbf{x}) = \varrho(t, \mathbf{x}), \quad (1.42c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(t, \mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{j}(t, \mathbf{x}). \quad (1.42d)$$

Die Lorentz-Kraft erscheint in der Form

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) = q(\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(t, \mathbf{x})), \quad (1.42e)$$

die Verknüpfungsrelationen bleiben wie in (1.33) angegeben. Für Felder im Vakuum, d. h. außerhalb von Quellen, gilt die Wellengleichung in der Form

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) g(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (1.42f)$$

wo  $g(t, \mathbf{x})$  eine der Komponenten des betrachteten Feldes ist.

In diesem vor allem für die Praxis wichtigen Einheitensystem überlegt man sich leicht, dass elektrische Felder und magnetische Induktionsfelder in den Einheiten

$$[\mathbf{E}] = 1 \text{ kgmA}^{-1} \text{ s}^{-3}, \quad [\mathbf{B}] = 1 \text{ kgA}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

ausgedrückt werden. Die Einheit der Spannung, das Volt, ist

$$[V] = 1 \text{ kgm}^2 \text{ A}^{-1} \text{ s}^{-3},$$

so dass man die bekannte Aussage wiederfindet, dass elektrische Felder in Volt pro Meter gemessen werden,

$$[\mathbf{E}] = 1 \text{ Vm}^{-1} .$$

Für magnetische Induktionsfelder hat man die Maßeinheit Tesla eingeführt, d. h.

$$[\mathbf{B}] = 1 \text{ Tesla} = 1 \text{ Vsm}^{-2} .$$

Magnetische Felder werden in Ampère-Windungen pro Meter ausgedrückt,  $[\mathbf{H}] = 1 \text{ Aw m}^{-1}$ .

#### 1.4.6 Das Gauß'sche Maßsystem

Im Gauß'schen Maßsystem soll keine neue Einheit für die elektrische Ladung bzw. für die Stromstärke eingeführt werden, vielmehr sollen diese durch die schon vorher festgelegten mechanischen Einheiten ausgedrückt werden. Dabei soll der Vorfaktor der Coulomb-Kraft gleich 1 sein,  $\kappa_C = 1$ . Weiterhin sollen die Felder  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{H}$ , aber auch  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{D}$  alle dieselbe Dimension haben, was bedeutet, dass  $f_F$  und  $f_{BS}/f_G = f_F$  die Dimension  $\text{T L}^{-1}$  haben. Ein Blick auf (1.35) und auf (1.38) zeigt, dass  $\varepsilon_0$  und  $\mu_0$  jetzt nicht nur dieselbe Dimension haben, sondern sogar dimensionslos sind. Es liegt also nahe, beide gleich 1 zu setzen,

$$\varepsilon_0 = 1 , \quad \mu_0 = 1 , \quad (1.43a)$$

womit erreicht wird, dass im Vakuum  $\mathbf{D} = \mathbf{E}$  und  $\mathbf{B} = \mathbf{H}$  gilt. Gleichzeitig wird über (1.38)

$$f_F = \frac{1}{c} \quad (1.43b)$$

festgelegt. Legt man den Vorfaktor der Ladungsdichte auf der rechten Seite von (1.32c) als

$$f_G = 4\pi \quad (1.43c)$$

fest, dann hat man erreicht, dass der Vorfaktor der Coulomb-Kraft (1.36) wie gewünscht gleich 1 wird – ein Ergebnis, das mit der Formel (1.30) in Einklang ist.

Mit diesen Setzungen folgen schließlich die Werte

$$f_{BS} = \frac{4\pi}{c} , \quad \kappa_C = 1 , \quad \kappa_A = \frac{1}{c^2} . \quad (1.43d)$$

Da wir im Folgenden bis auf Ausnahmen, die ausdrücklich genannt werden, immer das Gauß'sche Maßsystem verwenden, notieren wir hier noch einmal die Grundgleichungen in Gauß'schen Einheiten:

## Maxwell'sche Gleichungen in Gauß-Einheiten

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (1.44a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (1.44b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(t, \mathbf{x}) = 4\pi \rho(t, \mathbf{x}), \quad (1.44c)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(t, \mathbf{x}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(t, \mathbf{x}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(t, \mathbf{x}). \quad (1.44d)$$

Der Ausdruck für die Lorentz-Kraft lautet hier

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) = q \left( \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) \right), \quad (1.44e)$$

im Vakuum werden elektrisches Feld und elektrische Verschiebung, und ebenso magnetische Induktion und Magnetfeld identifiziert, d. h.

$$\mathbf{D}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{E}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{H}(t, \mathbf{x}), \quad (\text{im Vakuum}). \quad (1.44f)$$

Schließlich notieren wir noch die Wellengleichung in Gauß'schen Einheiten,

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) g(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (1.45)$$

wo  $g(t, \mathbf{x})$  für eine beliebige Komponente des elektrischen oder magnetischen Feldes im Vakuum steht. Natürlich hat sie dieselbe Form wie im SI-System.

Die folgende Tabelle vergleicht noch einmal das SI-System und das Gauß'sche System. Die Abkürzungen „esu“, „esc“ usw. stehen für „electrostatic charge unit“, usw. Die elektrostatische Ladungseinheit „esu“, als Beispiel, ist  $1 \text{ esu} = 1 \text{ g}^{1/2} \text{ cm}^{3/2} \text{ s}^{-1}$ .

Das Gauß'sche System ist ein für die Grundlagen besonders bequemes Maßsystem, für die tägliche Praxis im Labor ist es aber völlig ungeeignet. Da wir hier die Grundlagen der Elektrodynamik behandeln, werden wir im Folgenden fast ausschliesslich das Gauß'sche System verwenden. Die Überlegungen des Abschnitts 1.4.4 und die Tabelle 1.1 sollten das Umrechnen, falls es erforderlich wird, erleichtern. Hier sind einige Beispiele.

Die Elementarladung, d. h. der Betrag der Ladung des Elektrons, in cgs- bzw. SI-Einheiten ausgedrückt ist

$$\begin{aligned} e &= 4,80320420(19) \cdot 10^{-10} \text{ esu} \\ &= 1,602176462(63) \cdot 10^{-19} \text{ C}, \end{aligned} \quad (1.46a)$$

wobei die Zahlen in Klammern den z. Z. bekannten experimentellen Fehler der letzten beiden Ziffern angeben. Da Energien in der Physik häufig in Elektronenvolt oder Zehnerpotenzen von diesen angegeben

**Tab. 1.1.** Zwei wichtige Maßsysteme und ihr Vergleich: Das Gauß'sche oder cgs-System und das SI- oder MKSA-System

	Gauß-System	SI-System	Vergleich
Länge	1 cm	1 m	1 m = $1 \cdot 10^2$ cm
Masse	1 g	1 kg	1 kg = $1 \cdot 10^3$ g
Zeit	1 s	1 s	
Kraft	1 dyn	1 N	1 N = $1 \cdot 10^5$ dyn
Energie	1 erg	1 J	1 J = $1 \cdot 10^7$ erg
Leistung	1 erg s <sup>-1</sup>	1 W	1 W = $1 \cdot 10^7$ erg s <sup>-1</sup>
Ladung	1 esu	1 C	1 C = $3 \cdot 10^9$ esu
Stromstärke	1 esc	1 A	1 A = $3 \cdot 10^9$ esc
Potential	1 esv	1 V	1 V = 1/300 esv
Elektrisches Feld	1 esv cm <sup>-1</sup>	1 Vm <sup>-1</sup>	
Magnetisches Feld	1 Oersted (Oe)	1 Aw m <sup>-1</sup>	1 Aw m <sup>-1</sup> = $4\pi \cdot 10^{-3}$ Oe
Magnetische Induktion	1 Gauß (G)	1 Tesla	1 Tesla = $10^4$ Gauß

werden, ist es wichtig, die Umrechnung in SI-Einheiten zu kennen. Aus den eben genannten Zahlen ergibt sie sich für das Elektronenvolt zu

$$1 \text{ eV} = 1,602176462(63) \cdot 10^{-19} \text{ J} \quad (1.46b)$$

Einigen für die Praxis nützlichen Vielfachen des Elektronenvolts werden eigene Einheitensymbole zugewiesen, so z. B.

$$1 \text{ meV} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ eV}, \quad 1 \text{ keV} = 1 \cdot 10^3 \text{ eV}, \quad 1 \text{ MeV} = 1 \cdot 10^6 \text{ eV}, \\ 1 \text{ GeV} = 1 \cdot 10^9 \text{ eV}, \quad 1 \text{ TeV} = 1 \cdot 10^{12} \text{ eV},$$

wobei „m“ für „Milli-“, „k“ für „Kilo-“, „M“ für „Mega-“, „G“ für „Giga-“ und „T“ für „Tera-“ stehen.

Auch Massen  $m$  von atomaren oder subatomaren Teilchen werden in aller Regel in einer Weise angegeben, dass die Ruheenergie  $mc^2$  in Elektronenvolt oder Vielfachen davon erscheint. Übersetzt in SI-Einheiten ist

$$1 \text{ eV}/c^2 = 1,782661731(70) \cdot 10^{-36} \text{ kg}. \quad (1.46c)$$

Um ein Gefühl für die Größenordnungen zu bekommen, ist es interessant die Masse eines sehr schweren Kerns in Kaufmannseinheiten oder typische elektrische Felder in Atomen in den einem Elektromechaniker geläufigen Einheiten auszudrücken, s. Aufgabe 1.3 und Aufgabe 1.4.

#### Bemerkungen

1. In der Relativitätstheorie und in der Elementarteilchenphysik verwendet man sog. *natürliche Einheiten*, die so gewählt werden, dass die Lichtgeschwindigkeit  $c$  und die (durch  $2\pi$  dividierte) Planck'sche Konstante den Wert 1 annehmen,

$$c = 1, \quad \hbar \equiv \frac{h}{2\pi} = 1.$$

Einige Anleitungen, wie man in dieser Wahl vorgeht und wie man in gewöhnliche, dimensionsbehaftete Größen umrechnet, findet man z. B. in Band 4, Abschn. 2.1.2.

Obwohl ich dies in diesem Band nicht tun werde, sei noch darauf hingewiesen, dass man auch im Gauß'schen System die Faktoren  $4\pi$  auf den rechten Seiten von (1.44c) und (1.44d) zum Verschwinden bringen kann, indem man sie in den Feldern und in den Quellen wie folgt aufnimmt. Es sei

$$E|_{\text{nat}} := \frac{1}{\sqrt{4\pi}} E|_{\text{Gauß}} , \quad \varrho|_{\text{nat}} := \sqrt{4\pi} \varrho|_{\text{Gauß}} .$$

Die entsprechenden Faktoren  $1/\sqrt{4\pi}$  bzw.  $\sqrt{4\pi}$  werden genauso in den Feldern  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$  und  $\mathbf{B}$  bzw. in der Stromdichte absorbiert, so dass – zusammen mit der Konvention  $c = 1$  – die Faktoren in den Maxwell-Gleichungen jetzt alle gleich 1 sind. Damit lässt es sich sehr bequem rechnen und erst am Ende einer konkreten Rechnung muss man wieder auf konventionelle Einheiten umrechnen. So ist z. B. die Sommerfeld'sche Feinstrukturkonstante  $\alpha$  zwar eine dimensionslose Zahl, ihr Zusammenhang mit der Elementarladung hängt aber vom gewählten System ab. Es ist

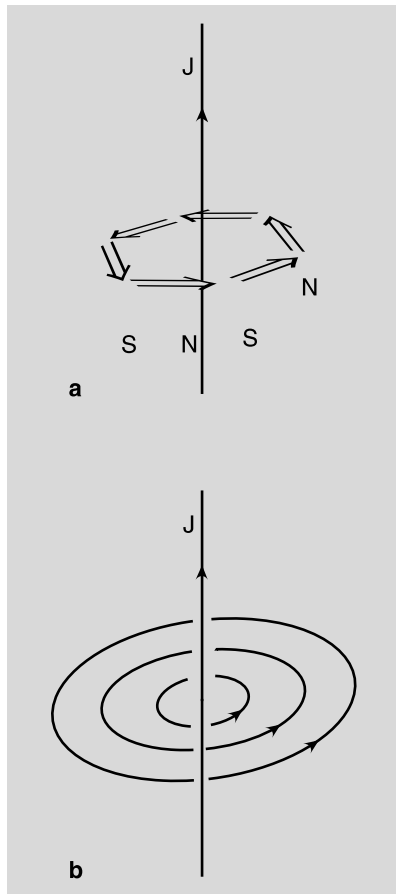
$$\alpha = \frac{e^2|_{\text{Gauß}}}{\hbar c} = \frac{e^2|_{\text{nat}}}{4\pi} = \frac{1}{137,036} .$$

Am Ende einer Rechnung, bei der man natürliche Einheiten verwendet hat, muss man folglich  $e^2|_{\text{nat}}$  durch  $4\pi\alpha$  mit  $\alpha = (137,036)^{-1}$  ersetzen.

- Wie schon weiter oben bemerkt, enthalten die Maxwell-Gleichungen (1.44a)–(1.44d) auf der jeweils linken Seite nur elektromagnetische *Feldgrößen*, auf den rechten Seiten nur *Quellterme*. Die Größen der ersten Gruppe betreffen das, was man das *Strahlungsfeld* nennt, die zweite Gruppe betreffen die *Materie*, deren Bausteine Elektronen, Ionen, Atomkerne sind. Diese Unterscheidung ist physikalisch sinnvoll: Die Materie wird durch eine andere Dynamik als die Maxwell-Felder beschrieben, während die Maxwell-Gleichungen auch ohne äußere Quellen, d. h. mit  $\varrho \equiv 0$  und  $\mathbf{j} \equiv 0$ , interessante physikalische Phänomene beschreiben.
- Es lohnt sich, über die Vorzeichen in den Maxwell'schen Gleichungen nachzudenken und genau abzugrenzen, in wieweit diese Konventionssache sind oder aus physikalischen Gründen festliegen. Wir wollen dies folgendermaßen gliedern:

#### *Elektrisches Feld und positive Ladung*

Es ist üblich, das elektrische Feld einer ruhenden positiven Ladung radial nach außen, vom Zentrum weggehend zu definieren und darzustellen. Was man dabei positive Ladung nennt, ist historisch bedingt: aus der Zeit der einfachen elektrostatischen Versuche, bei denen man verschiedene Materialien – Glas, Kollophonium und Ähnliches – durch Reibung elektrostatisch auflud, stammt die



**Abb. 1.6.** (a) Ein dünner, vom Strom  $J$  durchflossener Leiter erzeugt ein Magnetfeld in seinem Außenraum, in dem Probemagnete sich wie eingezeichnet orientieren; (b) Verlauf des Magnetfeldes im Außenraum des Leiters

Bezeichnungswise positiv für „Glas-elektrisch“, negativ für „Harz-elektrisch“. Mit dieser Festlegung trägt ein Elektron die *negative* Elementarladung, sein Antiteilchen, das Positron  $e^+$ , trägt ebenso wie das Proton die *positive* Elementarladung. Als eine weitere Konsequenz sagt dann die Kontinuitätsgleichung (1.21), dass die Stromdichte durch den Fluss der *positiven* Ladung definiert ist. Sie ist somit dem Fluss der frei beweglichen Elektronen entgegen gerichtet.

#### *Permanentmagnete und Magnetfeld*

Die Pole von Permanentmagneten, mit denen wir schon als Kinder gespielt haben, werden wie in der Geografie Nordpol N bzw. Südpol S genannt. Gibt man einen geradlinigen, von einem stationären Strom  $J$  durchflossenen Leiter vor, so richten sich kleine Probemagnete wie in Abb. 1.6a skizziert aus. Da man traditionell die Richtung der magnetischen Feldlinien im Außenraum eines Permanentmagneten von N nach S wählt, sind die Feldlinien, die der stromdurchflossene Leiter erzeugt, wie in Abb. 1.6b im positiven Schraubensinn gerichtet.

Mit diesen Konventionen legt das Biot-Savart'sche Gesetz die Gleichung (1.44d) mit den dort angegebenen Vorzeichen fest. Ebenso wird das Faraday'sche Induktionsgesetz in der Form (1.44b) mit den dort angegebenen Vorzeichen realisiert.

Natürlich hätte man die Vorzeichenkonventionen anders treffen können und hätte damit an einigen Stellen dieser Gleichungen andere Vorzeichen erhalten. Es ist daher interessant zu fragen, welche relativen Vorzeichen sich *nicht* ändern und welche physikalische Information dahinter steckt. Hätte man die Richtung des elektrischen Feldes so festgelegt, dass ein Elektron (das ja die Ladung  $-|e|$  trägt) ein nach *außen* gerichtetes Feld erzeugt, oder hätte man zwar die oben beschriebene Konvention für elektrische Felder beibehalten, hätte aber beschlossen, das magnetische Feld eines Permanentmagneten im Außenraum von S nach N zeigen zu lassen, so würden sich auf den linken Seiten der Gleichungen (1.44b) und (1.44d) die relativen Vorzeichen ändern. Alles, was physikalisch relevant ist, würde aber invariant bleiben. So z. B.

- der physikalische Inhalt von (1.44b), das Ausdruck des Induktionsgesetzes ist, in Form der Lenz'schen Regel. Die durch die Bewegung von Magneten oder Strömen erzeugten Induktionsströme sind so gerichtet, dass ihr eigenes Magnetfeld der Bewegung entgegen gerichtet ist;
- die Ausrichtung eines Permanentmagneten in dem durch einen stromdurchflossenen Leiters erzeugten Magnetfeld: der Magnet stellt sich so ein, dass sein eigenes Feld und das des Leiters sich möglichst kompensieren, d. h. dass die Feldenergie, die proportional zum Raumintegral über  $H^2$  ist, möglichst klein wird;
- das relative Vorzeichen von  $\mathbf{B}$  bzw.  $\mathbf{H}$  und von  $\mathbf{E}$  bzw.  $\mathbf{D}$  in (1.44b) und (1.44d): wie wir in Abschn. 1.4.4 gezeigt haben, folgt genau

# Lokale Eichtheorien

## Einführung

Obwohl sie ein Prinzip der *klassischen* Feldtheorie ist, hat die Eichinvarianz der Elektrodynamik erst im Zusammenhang der Quantenmechanik von Elektronen und der Schrödinger-Gleichung eine tiefe und weit führende Bedeutung gewonnen. In diesem Kapitel studieren wir die Verallgemeinerung des Konzepts einer lokal eichinvarianten Feldtheorie, die nach dem Vorbild der Maxwell-Theorie aufgebaut wird, auf nicht-Abel'sche Eichgruppen. Diese Verallgemeinerung, die zunächst etwas akademisch wirkt, weil sie neben dem Maxwell-Feld weitere masselose Eichfelder enthält, von denen man in der makroskopischen Physik nichts weiß, wird physikalisch realistisch, wenn sie mit dem Phänomen der spontanen Symmetriebrechung kombiniert wird. Beide Konzepte, das der nicht-Abel'schen Eichtheorie und das der spontanen Symmetriebrechung, sind rein klassischer, also nicht quantenmechanischer Natur. Gleichzeitig legt man damit das (klassische) Fundament für die heute allgemein akzeptierten, durch das Experiment bestätigten Eichtheorien der fundamentalen Wechselwirkungen. Dieses Kapitel legt die Grundlagen für die Konstruktion einer solchen Theorie dar, soweit sie im klassischen Rahmen bleibt. Erst mit der Einführung von fermionischen Teilchen (Quarks und Leptonen) wird die Quantisierung solcher Theorien unausweichlich.

## Inhalt

5.1 Klein Gordon-Gleichung und massive Photonen.....	219
5.2 Die Bausteine der Maxwell-Theorie .....	223
5.3 Nicht-Abel'sche Eichtheorien ..	226
5.4 Die U(2)-Theorie der elektroschwachen Wechselwirkungen .....	251
5.5 Epilog und Ausblick.....	263

## 5.1 Klein-Gordon-Gleichung und massive Photonen

Ein besonders einfaches Beispiel für eine Lorentz-kovariante Feldtheorie, die auf dem Minkowski-Raum  $M = \mathbb{R}^4$  lebt, ist durch die Lagrange-dichte (3.17a)

$$\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) = \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - \kappa^2 \phi^2(x)] - \varrho(x) \phi(x) \quad (5.1)$$

gegeben. Die dort eingefügten Konstanten  $\hbar$  und  $c$  hatten lediglich den Zweck, der Lagrange-dichte die richtige physikalische Dimension, nämlich (Energie/Volumen) zu geben. Da die Euler-Lagrange-gleichungen in  $\mathcal{L}$  homogen sind, hebt sich der Vorfaktor  $1/(\hbar c)$  heraus und kann hier ohne Einschränkung ganz weggelassen werden. Die Punkte des Raumzeitkontinuums sind mit  $x \in \mathbb{R}^4$  bezeichnet, die Ableitungen sind wie



zuvor

$$\partial_\mu = (\partial_0, \nabla)^T, \quad \partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu = (\partial_0, -\nabla)^T,$$

$\phi(x)$  ist ein Lorentz-skalares Feld, d. h. ein Feld, das sich unter der Wirkung einer Lorentz-Transformation  $\Lambda \in L_+^\uparrow$  nicht ändert,

$$x \mapsto x' = \Lambda x : \quad \phi(x) \mapsto \phi'(x') = \phi(x).$$

Die ebenfalls skalare Größe  $\varrho(x)$  ist eine äußere Quelle – im selben Sinne wie die Ladungs- und Stromdichten in den Maxwell'schen Gleichungen äußere Quellen für das Strahlungsfeld sind. Die Konstante  $\kappa$  ist ein Parameter mit der Dimension einer inversen Länge. In der Quantentheorie ist  $\kappa$  der Kehrwert der Compton-Wellenlänge

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{\hbar}{mc} \quad (5.2)$$

eines Teilchens der Masse  $m$ . In natürlichen Einheiten, bei denen sowohl die Lichtgeschwindigkeit als auch die Planck'sche Konstante den Wert 1 haben,  $c = 1$  und  $\hbar = 1$ , ist  $\kappa = m$  einfach die Masse selbst.

Die Euler Lagrange-Gleichungen (3.16), von denen es hier nur eine gibt, liefert die Bewegungsgleichung (3.17b)

$$\left(\square + \kappa^2\right)\phi(x) = -\varrho(x), \quad (5.3a)$$

die wir hier aus folgenden Gründen wiederholt haben:

(i) Setzt man in die zu (5.3a) gehörende homogene Gleichung

$$\left(\square + \kappa^2\right)\phi(x) = 0 \quad (5.3b)$$

einen Wellenansatz wie den in (4.4a) ein,  $\phi(t, \mathbf{x}) = e^{-i\omega t} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ , so folgt die Dispersionsrelation

$$\omega^2 - \mathbf{k}^2 - \kappa^2 = 0. \quad (5.4a)$$

Nach Multiplikation mit  $\hbar^2$  und unter Beachtung von (5.2) wird dies zu einer Relation zwischen der Energie  $E = \hbar\omega$ , dem Impuls  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$  und der Masse  $m$

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + (mc^2)^2, \quad (5.4b)$$

die nichts Anderes darstellt als die speziell-relativistische Beziehung zwischen Energie und Impuls eines freien Teilchens der Masse  $m$ .

(ii) Es ist keineswegs zwingend, die Gleichung (5.3b) nur für Skalarfelder anzusetzen. Sie könnte genauso gut für ein Vektorfeld

$$\mathbf{V}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{v} e^{-i\omega t} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

gefordert werden, wo  $\mathbf{v}$  ein konstanter Vektor ist. Die Klein-Gordon-Gleichung gilt dann für jede der vier Komponenten  $V^\mu(t, \mathbf{x})$  des Vektorfeldes einzeln. Dies gilt genauso für Tensorfelder beliebiger Stufe, im Übrigen auch für Spinorfelder: Jede Komponente erfüllt die Klein-Gordon-Gleichung für sich allein.

(iii) Eine statische Lösung der inhomogenen Gleichung (5.3a) mit der statischen Quelle

$$\varrho(t, \mathbf{x}) \equiv \varrho(\mathbf{x}) = g\delta(\mathbf{x})$$

lässt sich leicht angeben. Bei statischen Verhältnissen reduziert (5.3a) sich mit  $\square = (1/c^2)\partial^2/\partial t^2 - \Delta$  auf die zeitunabhängige Differentialgleichung

$$(\Delta - \kappa^2)\phi(\mathbf{x}) = \varrho(\mathbf{x}) = g\delta(\mathbf{x}).$$

Ohne besondere Randbedingungen lautet die Lösung

$$\phi^{\text{stat}}(\mathbf{x}) = -\frac{g}{4\pi} \frac{e^{-\kappa r}}{r}. \quad (5.5)$$

Diese Lösung kann man direkt herleiten, indem man die entsprechende Fourier-transformierte Gleichung algebraisch löst und das Ergebnis der inversen Fourier-Transformation unterwirft, s. Aufgabe 5.1. Man kann sie aber auch aus der entsprechenden Green-Funktion der Helmholtz-Gleichung (4.8) bzw. (4.32) durch Fortsetzung in der (dort reellen) Wellenzahl  $k$  erhalten:

$$k \longrightarrow i\kappa : -\frac{e^{ikr}}{4\pi r} \longrightarrow -\frac{e^{-\kappa r}}{r}.$$

Eine punktförmige Quelle mit der „Stärke“  $g$ , die im Ursprung sitzt, erzeugt ein Feld (5.5), das exponentiell nach außen abklingt. Die Abklingrate wird durch die Compton-Wellenlänge bestimmt, die zur Masse  $m$  gehört. Je größer die Masse, desto schneller fällt die Lösung ab. Ist die Masse dagegen gleich Null, so nimmt die Lösung (5.5) die mit  $1/r$  abfallende Form des Coulomb-Potentials an. Die Klein-Gordon-Gleichung geht gleichzeitig in die Wellengleichung (1.45) über.

Wir kehren jetzt zur Maxwell-Theorie zurück und versuchen dort einen Massenterm von der Art des in (5.3a) betrachteten einzuführen. Dies geht am einfachsten durch eine Ergänzung der Lagrange-dichte (3.28) in folgender Form

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Proca}}(A_\tau, \partial_\sigma A_\tau) = & -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) \\ & + \frac{\lambda^2}{8\pi} A_\mu(x) A^\mu(x) - \frac{1}{c} j^\mu(x) A_\mu(x). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Auf dem Weg zu den Euler Lagrange-Gleichungen berechnet man

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{Proca}}}{\partial A_\tau} &= -\frac{1}{c} j^\tau + \frac{\lambda^2}{4\pi} A^\tau(x), \\ \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{Proca}}}{\partial(\partial_\sigma A_\tau)} &= -\frac{1}{4\pi} F^{\sigma\tau}(x). \end{aligned}$$

Für zwei der drei Terme auf den rechten Seiten sind dies dieselben Rechnungen wie die in Abschn. 3.3. Bei dem neuen, zu  $\lambda^2$  proportionalen Term muss man auf den Faktor 2 achten, denn es ist

$$A_\tau(x) A^\tau(x) = A_\tau(x) g^{\tau\lambda} A_\lambda(x),$$

wobei über alle wiederholten, kontravarianten Indizes summiert wird. Die Bewegungsgleichungen – hier das Analogon zu den inhomogenen Maxwell-Gleichungen – sind demnach

$$\partial_\sigma F^{\sigma\tau}(x) + \lambda^2 A^\tau(x) = \frac{4\pi}{c} j^\tau. \quad (5.7)$$

Stellt man den Feldstärkentensor durch Potentiale dar,

$$F^{\sigma\tau}(x) = \partial^\sigma A^\tau(x) - \partial^\tau A^\sigma(x),$$

und nimmt an, dass das Potential der Lorenz-Bedingung  $\partial_\mu A^\mu(x) = 0$  genügt, so bleibt die partielle Differentialgleichung

$$(\square + \lambda^2)A^\tau(x) = \frac{4\pi}{c} j^\tau. \quad (5.8)$$

Die Lagrangedichte (5.6) wird *Proca'sche Lagrangedichte* genannt, nach A. Proca, der sie in den dreißiger Jahren zuerst diskutiert hat.

#### Bemerkungen

1. Beim Vergleich der Lagrangedichten (5.1) für das Skalarfeld und (5.6) für das Proca'sche Vektorfeld fällt eine gewisse Analogie auf: Beide enthalten einen Massenterm, der einmal  $-(\kappa^2/2)\phi^2(x)$ , das andere Mal  $(\lambda^2/8\pi)A_\mu(x)A^\mu(x)$  lautet. beide Lagrangedichten enthalten einen Wechselwirkungsterm an äußere Quellen, die in (5.1) durch die skalare Dichte  $\varrho(x)$ , in (5.6) durch die Stromdichte  $j^\mu(x)$  repräsentiert werden. Es liegt nahe, den ersten Term

$$-\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)$$

in (5.6) als kinetischen Term des Vektorfeldes zu bezeichnen, der im Fall der Maxwell-Felder durch  $(1/8\pi)(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)$  gegeben ist (s. (3.25a)). Dieser Anteil in der Lagrangedichte (3.28) der Maxwell-Theorie mit seinem spezifischen Vorzeichen liefert die positiv-definite Energiedichte (3.49a) des freien Maxwell-Feldes.

2. Hätte das Photon eine nichtverschwindende Masse, so wäre (5.8) die richtige Bewegungsgleichung – anstelle der Wellengleichung – für Photonen. Eine interessante Diskussion dieser Bewegungsgleichung und ihrer physikalischen Konsequenzen, einschließlich einer Liste von Originalarbeiten zu diesem Thema findet man bei [Jackson 1999].

Die für die Themen dieses Kapitels wichtige Feststellung ist der Verlust der Eichinvarianz der Lagrangedichte  $\mathcal{L}_{\text{Proca}}$ . Während der erste und der dritte Term in (5.6) eichinvariant sind, wie wir in Abschn. 3.4.2 gesehen haben, gilt dies nicht für den Massenterm: Unter einer Eichtransformation

$$A_\tau(x) \mapsto A'_\tau(x) = A_\tau(x) - \partial_\tau \Lambda(x)$$

wird der in den Potentialen quadratische Term zu

$$\begin{aligned} A_\tau(x)A^\tau(x) &\mapsto A'_\tau(x)A'^\tau(x) \\ &= A_\tau(x)A^\tau(x) - 2A_\tau(x)\partial^\tau\Lambda(x) + \partial_\tau\Lambda(x)\partial^\tau\Lambda(x) \end{aligned}$$

und kann nicht auf die ursprüngliche Form zurück geführt werden. Physikalisch bedeutet dieses Ergebnis einerseits, dass das Potential  $A_\mu(x)$  hier, im Gegensatz zur Maxwell-Theorie, eine eigene physikalische Bedeutung erhält. Andererseits wird ein direkter Zusammenhang zwischen der Masselosigkeit des Photons, der unendlichen Reichweite des Coulomb-Potentials und der Eichinvarianz der Maxwell'schen Gleichungen hergestellt. Als wichtigstes Ergebnis halten wir fest:

*Ein originärer Massenterm in der Lagrangedichte der Maxwell-Theorie ist mit der Eichinvarianz unverträglich.*

## 5.2 Die Bausteine der Maxwell-Theorie

Die Maxwell'sche Theorie der elektromagnetischen Erscheinungen ist der Prototyp einer Eichtheorie, nach deren Vorbild alle anderen, für die Beschreibung der fundamentalen Wechselwirkungen bedeutsamen Eichtheorien konstruiert werden. Bevor wir auf allgemeinere Eichtheorien eingehen, ist es daher hilfreich, sich noch einmal die Bausteine in Erinnerung zu rufen, aus denen die Maxwell-Theorie zusammengesetzt ist. Wir tun dies in folgender Gliederung

### a) Zu Grunde liegende Raumzeit

Soweit wir sie bis hierher kennengelernt haben, setzt die Maxwell'sche Theorie den (flachen) Minkowski-Raum  $M = \mathbb{R}^4$  als Raumzeit voraus, der die Dimension 4 hat und mit der Metrik

$$\mathbf{g} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad (5.9)$$

ausgestattet ist. Präziser formuliert, ist der Minkowski-Raum eine flache semi-Riemann'sche Mannigfaltigkeit mit *Index*  $\nu = 1$  und sollte besser mit  $\mathbb{R}^{(1,3)}$  bezeichnet werden, um die besondere Rolle der Zeitvariablen hervorzuheben. Die Definition des Begriffs Index sei hier wie folgt angefügt:

#### Definition Index einer Bilinearform

Auf einem Vektorraum  $V$  endlicher Dimension  $n = \dim V$  sei eine nicht ausgeartete, symmetrische Bilinearform gegeben. Der Index der Bilinearform ist die Kodimension<sup>1</sup> des größten Unterraums  $W$  von  $V$ ,

$$\nu = \dim V - \dim W \quad (5.10)$$

auf dem diese *definit* ist, positiv-definit oder negativ-definit.

<sup>1</sup> Die Kodimension eines Unterraums  $W$  des endlich dimensionalen Vektorraums  $V$  ist  $\text{codim } W := \dim V - \dim W$ .

Im Fall des Minkowski-Raums ist die Metrik eine solche Bilinearform und ist bei der hier getroffenen Wahl (5.9) auf dem Raumanteil negativ definit. Bei der anderen, zulässigen Wahl  $\mathbf{g} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  wäre sie positiv definit. Dieser Unterraum ist dreidimensional, seine Kodimension ist – unabhängig von der Wahl der Vorzeichen – daher  $\nu = \dim M - 3 = 4 - 3 = 1$ .

Die kausale Struktur auf  $M$  wird durch die Poincaré- bzw. die Lorentz-Gruppe der Transformationen

$$x \mapsto x' = \Lambda x + a, \quad \text{mit} \quad \Lambda^T \mathbf{g} \Lambda = \mathbf{g}$$

bestimmt. Sie äußert sich unter Anderem in den Retardierungseffekten in der Ausbreitung elektromagnetischer Signale.

### b) Die Variablen

Die zentralen Observablen der Theorie sind im Vakuum die Tensorfelder  $F_{\mu\nu}(x)$  (in Materie entsprechend  $\mathcal{F}_{\mu\nu}(x)$ ) der elektromagnetischen Feldstärken und die Ladungs- und Stromdichten  $j^\mu(x) = (c\rho(x), \mathbf{j}(x))^T$  der Materie, die als die treibenden Quellterme in den Maxwell'schen Gleichungen auftreten. Ebenfalls wichtig, wenn auch schon etwas problematisch, ist das Vierer-Potential  $A_\mu(x)$ . Es tritt in der Lagrange-dichte in den Kopplungstermen an die Materie auf, ist aber nicht direkt beobachtbar. Es *kann* ein Vierer-Vektorfeld sein, je nach Klasse der gewählten Eichungen kann es aber auch ein komplizierteres Transformationsverhalten haben, ohne die Lorentz-Kovarianz der Theorie zu tangieren.

Sobald die Aufteilung des Minkowski-Raums  $\mathbb{R}^{(1,3)}$  durch Auswahl einer Klasse von Bezugssystemen in Raumanteil  $\mathbb{R}^3$  und Zeitanteil  $\mathbb{R}_t$  festliegt, wird das Tensorfeld  $F_{\mu\nu}(x)$  bzw.  $\mathcal{F}_{\mu\nu}(x)$  in die elektrischen Feldgrößen  $\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$  bzw.  $\mathbf{D}(t, \mathbf{x})$  und die magnetischen Feldgrößen  $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$  bzw.  $\mathbf{H}(t, \mathbf{x})$  zerlegt. Diese sind zwar für den Test der Theorie im Experiment unverzichtbar, haben aber ein kompliziertes Transformationsverhalten, wenn man das Bezugssystem mittels einer Speziellen Lorentz-Transformation wechselt.

### c) Eichtransformationen, Strukturgruppe und Eichgruppe

Wie wir in Abschn. 3.4.2 und in einer Bemerkung in Abschn. 2.2.5 festgestellt haben, ist die Maxwell-Theorie sowohl unter globalen Eichtransformationen

$$G = \text{U}(1) = \{ e^{i\alpha} \mid \alpha \in \mathbb{R} \pmod{2\pi} \} \quad (5.11a)$$

als auch unter den lokalen Eichtransformationen

$$\mathcal{G} = \{ e^{i\alpha(x)} \mid \alpha \in \mathfrak{F}(\mathbb{R}^{(1,3)}) \pmod{2\pi} \} \quad (5.11b)$$

invariant, wo  $\mathfrak{F}(\mathbb{R}^{(1,3)})$  die Menge der glatten Funktionen auf dem Minkowski-Raum bezeichnet. Die Gruppe selbst, hier also die Gruppe

(5.11a), nennen wir *Strukturgruppe*. Die daraus konstruierte, unendlich dimensionale Gruppe (5.11b) heißt *Eichgruppe* und legt die Form der Eichtransformationen fest.

Die eigentliche Invarianzgruppe der Maxwell-Theorie ist also eine  $U(1)$ , d. h. eine Abel'sche Gruppe. Diese Abel'sche Gruppe hat nur eine Erzeugende, die man als  $\mathbb{1}$  notieren kann.

#### d) Geometrische Struktur der Maxwell-Theorie

Geometrisch gesehen, ist das Potential eine Einsform  $A_\mu(x) dx^\mu$  über dem Minkowski-Raum. Die Wirkung einer durch die Funktion  $\chi(x)$  erzeugten Eichtransformation (2.59) ist eine affine Transformation des Potentials der Form

$$A'_\tau(x) = A_\tau(x) - \partial_\tau \chi(x).$$

In der Sprache der Formen geschrieben lautet diese

$$\omega_{A'} = \omega_A - d\chi,$$

wo  $\omega_A = A_\mu(x) dx^\mu$  wie in (2.82) definiert ist. Dies ist offensichtlich eine infinitesimale Transformation und bedeutet, dass das Potential nicht nur eine Einsform, sondern selbst Element der Lie-Algebra der Eichgruppe ist.<sup>2</sup>

Es ist für das Folgende nützlich, die Einsform des Potentials wie in (2.88a) zu definieren, d. h. indem man eine elektrische Referenzladung  $q$  – z. B. die Elementarladung  $e$  – und einen Faktor  $i$  mit aufnimmt<sup>3</sup>:

$$A := iq \omega_A = iq A_\mu(x) dx^\mu. \quad (5.12)$$

Multipliziert man auch die Eichfunktion mit diesen Faktoren, dann behält die Eichtransformation dieselbe Form wie zuvor,

$$A \mapsto A' = A + d\Lambda, \quad \text{mit } \Lambda(x) = -iq \chi(x). \quad (5.13)$$

Es gelten die Gleichungen (2.88b) und (2.88c) für die kovariante Ableitung und die Krümmungsform (Zweifform der Feldstärken), die wir hier wiederholen

$$D = d + A, \quad (5.14a)$$

$$D^2 = (dA) + A \wedge A = (dA) = F, \quad (5.14b)$$

$$(F = iq F_{\mu\nu}(x) dx^\mu \wedge dx^\nu).$$

Das Beispiel 3.5 der Schrödinger-Gleichung mit Kopplung an das Strahlungsfeld zeigte, dass der Term

$$-\frac{1}{2m}(D\psi^*)(D\psi) \quad (5.15)$$

unter lokalen Eichtransformationen invariant bleibt, wenn die Wellenfunktion, gleichzeitig mit der Transformation (5.13) des Potentials,

<sup>2</sup> Natürlich sind Vorzeichen vor der Eichfunktion  $\chi(x)$  nicht relevant, weil diese ja beliebig wählbar ist. Ich habe hier das Minuszeichen verwendet, um wie in Abschn. 3.4.2 mit den üblichen Konventionen und Vorzeichen wie in (3.39a) übereinzustimmen.

<sup>3</sup> Die Faktoren  $\hbar$  und  $c$ , die dort erscheinen, sind nicht wesentlich. Wir können sie im Kontext einer quantisierten Theorie jederzeit wieder einfügen, wir können sie aber auch durch Wahl von natürlichen Einheiten durch 1 ersetzen.

der Transformation

$$\psi(x) \mapsto \psi'(x) = g(x)\psi(x), \quad \text{mit } g(x) = e^{iq\chi(x)} = e^{-A(x)} \quad (5.16)$$

unterworfen wird. Dies bedeutet, dass die volle Theorie, die die Maxwell'schen Gleichungen und die Schrödinger-Gleichung liefert, eichinvariant ist, wenn in der kinetischen Energie der durch die Schrödinger-Gleichung beschriebenen Teilchen die gewöhnliche Ableitung durch die kovariante Ableitung ersetzt wird.

#### Bemerkungen

1. Die eben getroffene Schlussfolgerung ist nicht auf das Beispiel der Schrödinger-Gleichung beschränkt. Offensichtlich kommt es nur auf die kinetische Energie (5.15) an. Diese Form der kinetischen Energie von Materieteilchen ist aber sehr allgemein, man vergleiche auch mit (5.1)!
2. Die Eichtransformation  $g(x)$ , Gl. (5.16), am Feld  $\psi(x)$  ist ein Element der Eichgruppe  $\mathfrak{G}$ , ihre infinitesimale Form entsteht, wenn man nach  $\chi(x)$  entwickelt,

$$g(x) \simeq 1 + iq\chi(x), \quad |\chi(x)| \ll 1,$$

so dass die entsprechende Variation an  $\psi$

$$\delta\psi = iq\chi(x)\psi(x) \quad (5.16a)$$

ist. Wiederum ist man auf dieser Stufe in der Lie-Algebra  $\text{Lie}(\mathfrak{G})$  der Eichgruppe angelangt. Da die Gruppe  $U(1)$  Abel'sch ist, hat ihre Lie-Algebra nur eine Erzeugende und in der Variation  $\delta\psi$ , Gl. (5.16a), tritt nur ein Term auf.

### 5.3 Nicht-Abel'sche Eichtheorien

Die kurze Zusammenfassung der Maxwell'schen Theorie mit besonderer Betonung ihrer Eichinvarianz und ihrer geometrischen Struktur im vorhergehenden Abschnitt legt es nahe, dieselbe Konstruktion mit anderen, jetzt auch nicht-Abel'schen Lie-Gruppen aufzunehmen, die an die Stelle der  $U(1)$  treten. Es wird berichtet, dass W. Pauli schon sehr früh die Idee ausprobiert habe, den von W. Heisenberg eingeführten Isospin, d. h. die Lie-Gruppe  $SU(2)$  zu „eichen“, diese aber aus physikalischen Gründen (auf die wir weiter unten kurz eingehen) verworfen habe. In publizierter Form wurde diese Konstruktion von C.N. Yang und R.L. Mills 1954 vorgeschlagen<sup>4</sup>. Deshalb spricht man in diesem Zusammenhang auch von *Yang Mills-Theorie* als Synonym für *lokale Eichtheorie*.

In diesem Abschnitt arbeiten wir dieses Konzept nach dem Vorbild der Maxwell-Theorie aus, stellen die Lagrangedichte einer Eichtheorie auf und studieren ihre Ankopplung an Materiefelder in der einfachsten Form.

<sup>4</sup> C.N. Yang and R.L. Mills, Phys. Rev. **96** (1954) 191.