

Vorwort

zur Theoretischen Physik

Mit diesem mehrbändigen Werk lege ich ein Lehrbuch der Theoretischen Physik vor, das dem an vielen deutschsprachigen Universitäten eingeführten Aufbau der Vorlesungen folgt: die Mechanik und die nicht-relativistische Quantenmechanik, die in Geist, Zielsetzung und Methodik nahe verwandt sind, stehen nebeneinander und stellen die Grundlagen für das Hauptstudium bereit, die eine für die klassischen Gebiete, die andere für Wahlfach- und Spezialvorlesungen. Die klassische Elektrodynamik und Feldtheorie und die relativistische Quantenmechanik leiten zu Systemen mit unendlich vielen Freiheitsgraden über und legen das Fundament für die Theorie der Vielteilchensysteme, die Quantenfeldtheorie und die Eichtheorien. Dazwischen steht die Theorie der Wärme und die wegen ihrer Allgemeinheit in einem gewissen Sinn alles übergreifende Statistische Mechanik.

Als Studentin, als Student lernt man in einem Zeitraum von drei Jahren fünf große und wunderschöne Gebiete, deren Entwicklung im modernen Sinne vor bald 400 Jahren begann und deren vielleicht dichteste Periode die Zeit von etwas mehr als einem Jahrhundert von 1830, dem Beginn der Elektrodynamik, bis ca. 1950, der vorläufigen Vollendung der Quantenfeldtheorie, umfasst. Man sei nicht enttäuscht, wenn der Fortgang in den sich anschließenden Gebieten der modernen Forschung sehr viel langsamer ist, diese oft auch sehr technisch geworden sind, und genieße den ersten Rundgang durch ein großartiges Gebäude menschlichen Wissens, das für fast alle Bereiche der Naturwissenschaften grundlegend ist.

Die Lehrbuchliteratur in Theoretischer Physik hinkt in der Regel der aktuellen Fachliteratur und der Entwicklung der Mathematik um einiges nach. Abgesehen vom historischen Interesse gibt es keinen stichhaltigen Grund, den Umwegen in der ursprünglichen Entwicklung einer Theorie zu folgen, wenn es aus heutigem Verständnis direkte Zugänge gibt. Es sollte doch vielmehr so sein, dass die großen Entdeckungen in der Physik der zweiten Hälfte des zwanzigsten Jahrhunderts sich auch in der Darstellung der Grundlagen widerspiegeln und dazu führen, dass wir die Akzente anders setzen und die Landmarken anders definieren als beispielsweise die Generation meiner akademischen Lehrer um 1960. Auch sollten neue und wichtige mathematische Methoden und Erkenntnisse mindestens dort eingesetzt und verwendet werden, wo sie dazu beitragen, tiefere Zusammenhänge klarer hervortreten zu lassen und gemeinsame Züge scheinbar verschiedener Theorien erkennbar zu machen. Ich verwende in diesem Lehrbuch in einem ausgewogenen Maß moderne mathematische Techniken und traditionelle, physikalisch-

intuitive Methoden, die ersteren vor allem dort, wo sie die Theorie präzise fassen, sie effizienter formulierbar und letzten Endes einfacher und transparenter machen – ohne wie ich hoffe in die trockene Axiomatisierung und Algebraisierung zu verfallen, die manche neueren Monographien der Mathematik so schwer leserlich machen; außerdem möchte ich dem Leser, der Leserin helfen, die Brücke zur aktuellen physikalischen Fachliteratur und zur Mathematischen Physik zu schlagen. Die traditionellen, manchmal etwas vage formulierten physikalischen Zugänge andererseits sind für das veranschaulichende Verständnis der Phänomene unverzichtbar, außerdem spiegeln sie noch immer etwas von der Ideen- und Vorstellungswelt der großen Pioniere unserer Wissenschaft wider und tragen auch auf diese Weise zum Verständnis der Entwicklung der Physik und deren innerer Logik bei. Diese Bemerkung wird spätestens dann klar werden, wenn man zum ersten Mal vor einer Gleichung verharrt, die mit raffinierten Argumenten und eleganter Mathematik aufgestellt ist, die aber nicht zu einem *spricht* und verrät, wie sie zu interpretieren sei. Dieser Aspekt der *Interpretation* – und das sei auch den Mathematikern und Mathematikerinnen klar gesagt – ist vielleicht der schwierigste bei der Aufstellung einer physikalischen Theorie.

Jeder der vorliegenden Bände enthält wesentlich mehr Material als man in einer z. B. vierstündigen Vorlesung in einem Semester vortragen kann. Das bietet den Dozenten die Möglichkeit zur Auswahl dessen, was sie oder er in ihrer/seiner Vorlesung ausarbeiten möchte und, bei Wiederholungen, den Aufbau der Vorlesung zu variieren. Für die Studierenden, die ja ohnehin lernen müssen, mit Büchern und Originalliteratur zu arbeiten, bietet sich die Möglichkeit, Themen oder ganze Bereiche je nach Neigung und Interesse zu vertiefen. Ich habe den Aufbau fast ohne Ausnahme „selbsttragend“ konzipiert, so dass man alle Entwicklungen bis ins Detail nachvollziehen und nachrechnen kann. Die Bücher sind daher auch für das Selbststudium geeignet und „verführen“ Sie, wie ich hoffe, auch als gestandene Wissenschaftler und Wissenschaftlerinnen dazu, dies und jenes noch einmal nachzulesen oder neu zu lernen.

Bücher gehen heute nicht mehr, wie noch vor anderthalb Jahrzehnten, durch die klassischen Stadien: handschriftliche Version, erste Abschrift, Korrektur derselben, Erfassung im Verlag, erneute Korrektur etc., die zwar mehrere Iterationen des Korrekturlesens zuließen, aber stets auch die Gefahr bargen, neue Druckfehler einzuschmuggeln. Der Verlag hat ab Band 2 die von mir in LaTeX geschriebenen Dateien (Text und Formeln) direkt übernommen und bearbeitet. Auch bei der siebten Auflage von Band 1, der vom Fotosatz in LaTeX konvertiert wurde, habe ich direkt an den Dateien gearbeitet. So hoffe ich, dass wir dem Druckfehlerteufel wenig Gelegenheit zu Schabernak geboten haben. Über die verbliebenen, nachträglich entdeckten Druckfehler berichte ich, soweit sie mir bekannt werden, auf einer Webseite, die über den Hinweis *Buchveröffentlichungen/book publications*

auf meiner homepage zugänglich ist. Die letztere erreicht man über <http://wwwthep.physik.uni-mainz.de>

Den Anfang hatte die zuerst 1988 erschienene, seither kontinuierlich weiterentwickelte *Mechanik* gemacht. Ich würde mich sehr freuen, wenn auch die anderen Bände sich so rasch etablieren würden und dieselbe starke Resonanz fänden wie dieser erste Band. Dass die ganze Reihe überhaupt zustande kommt, daran hat auch Herr Dr. Hans J. Kölsch vom Springer-Verlag durch seinen Rat und seine Ermutigung seinen Anteil, wofür ich ihm an dieser Stelle herzlich danke.

Mainz, Mai 2002

Florian Scheck

Vorwort zu Band 1

Die Mechanik ist nicht nur das älteste Teilgebiet der Physik, sie stellt bis heute die Grundlage für die ganze theoretische Physik dar. So ist z.B. die Quantenmechanik ohne die klassische Mechanik kaum verständlich, vielleicht sogar nicht einmal formulierbar. Aber auch jede klassische Feldtheorie, wie etwa die Elektrodynamik, baut auf dem von der Mechanik vorgegebenen Fundament auf. Dabei geht es nicht nur um die physikalischen Grundbegriffe, die man hier kennen und anwenden lernt, sondern auch um den formalen Rahmen der Mechanik, ihre mathematisch-geometrische Struktur als Prototyp einer physikalischen Theorie. Diese Leitfunktion zieht sich bis hinein in Fragen der modernen Forschung, wo man immer wieder – wenn auch oft in ganz anderen Zusammenhängen – auf die Mechanik zurückkommt.

Es ist daher nicht verwunderlich, wenn ihre *Darstellung* stets auch Entwicklungen der modernen Physik widerspiegelt. Wir setzen heute die Akzente in diesem klassischen Gebiet wesentlich anders als zu Zeiten von Arnold Sommerfeld oder in den fünfziger Jahren des vergangenen Jahrhunderts. Zum Beispiel spielen *Symmetrien* und *Invarianzprinzipien* eine wichtige Rolle, ebenso die *Struktur des Raum-Zeitkontinuums* und die *geometrische Natur* der Mechanik, während die Anwendungen der Theorie der Differentialgleichungen etwas mehr in den Hintergrund gerückt sind. Anhand der Mechanik lernt man das Aufstellen von allgemeinen Prinzipien, aus denen physikalische Bewegungsgleichungen folgen und die sich über die Mechanik hinaus verallgemeinern lassen; man gewinnt die Erkenntnis, welche Bedeutung Symmetrien für die Behandlung physikalischer Systeme haben und, nicht zuletzt, die Übung, wie man ein präzises Begriffssystem aufstellt, mit dem sich ein physikalisches Teilgebiet verstehen und klar formulieren lässt. Das sind grundsätzliche Bezüge, die man anhand der noch weitgehend anschaulichen klassischen Mechanik lernt, dann aber soweit abstrahieren soll, dass sie in anderen Bereichen der Physik erkennbar und anwendbar werden.

Über ihrer Bedeutung als Fundament der ganzen theoretischen Physik und als erstes, noch weitgehend anschauliches Übungsfeld für physikalische Begriffsbildungen wollen wir aber nicht vergessen, dass die Mechanik für sich genommen ein wunderschönes Gebiet ist. Sie ist für Anfänger und Anfängerinnen im Allgemeinen zunächst schwer zu lernen, weil sie vielschichtig und in ihrem Aufbau heterogener ist als etwa die Elektrodynamik. Man wird dieses reizvolle, aber etwas spröde Gebiet in der Regel nicht im ersten Anlauf meistern, sondern wird im Laufe der Zeit immer wieder auf Teilaspekte der Mechanik zurückkom-

men und dabei – vielleicht mit Überraschung – feststellen, dass man sie dabei noch einmal und ein Stück tiefer versteht.

Es ist auch ein Irrtum zu glauben, die Mechanik sei ein abgeschlossenes und längst archiviertes Gebiet. Spätestens im 6. Kapitel wird man lernen, dass sie auch heute noch ein interessantes Forschungsgebiet ist und dass die moderne, qualitative Mechanik noch viele interessante Forschungsthemen bereithält.

Ziele und Aufbau

Einige allgemeine Leitlinien für den Aufbau dieses Buches waren die Folgenden:

I) Dieser Kurs über Mechanik ist so konzipiert, dass er als Einstieg in die theoretische Physik im modernen Sinne dienen kann. Anhand von Systemen der makroskopischen, „vorstellbaren“ Mechanik werden Konzepte und Methoden eingeführt, die in allen Bereichen der Physik vorkommen. Dabei werden diejenigen betont und besonders motiviert, deren Tragfähigkeit über die klassische Mechanik hinausreicht. So hat die Theorie des Kreisels, um nur ein Beispiel zu nennen, unter anderem auch deshalb besondere Bedeutung, weil man in ihr ein erstes anschauliches Beispiel für eine Lie-Gruppe in der Physik, der Drehgruppe im dreidimensionalen Raum, kennenlernt.

II) So wichtig die (wenigen) integrierbaren Fälle für das Verständnis sind, es bleibt unbefriedigend, wenn man sich auf diese und auf lokale Existenzaussagen für Lösungen von nichtintegrierbaren Systemen beschränkt. Im fortlaufenden Text und in den *Praktischen Übungen* habe ich daher eine Reihe einfacher, aber nichttrivialer Beispiele ausgearbeitet oder beschrieben, die jeder Leser, jede Leserin auf einem PC nachvollziehen, erweitern und variieren kann. Diese Beispiele dienen der Vertiefung, sind aber einfach genug, dass man kaum Gefahr läuft, über der Beschäftigung mit dem Rechner die Physik zu vergessen, die man vertiefen wollte.

III) Schon die Mechanik trägt deutliche geometrische Züge. Im 5. Kapitel wird der geometrische Charakter dieses Gebietes klar herausgearbeitet. Gleichzeitig wird damit eine Einführung in die strenge, differentialgeometrische Formulierung gegeben, die man unbedingt kennen muss, wenn man die moderne mathematische Literatur zur Mechanik lesen möchte. Ich hoffe hier ein wenig dazu beizutragen, dass die Kluft zwischen den „physikalischen“ Büchern über Mechanik und der modernen, mathematischen Literatur etwas kleiner und leichter überwindbar wird.

IV) Auch wenn man die Mechanik nicht in ihrem vollen Umfang lernen möchte, sollte man doch eine Vorstellung über globale und qualitative Fragestellungen der Mechanik haben, die Gegenstand der modernen Forschung auf diesem Gebiet sind. Das 6. Kapitel gibt daher einen Überblick über die notwendigen Begriffsbildungen und die wichtigsten Fragen der qualitativen Dynamik, die in so faszinierende Phänomene wie das deterministische Chaos überleiten.

Der Schwierigkeitsgrad der einzelnen Kapitel ist unterschiedlich. Das 4. Kapitel ist aus physikalischer Sicht vermutlich das schwierigste, das Fünfte ist sicher das mathematisch anspruchsvollste Kapitel. Dabei ist mir natürlich klar, dass diese Bewertung subjektiv ist und dass verschiedene Leser und Leserinnen je nach persönlichen Neigungen und Vorkenntnissen an ganz unterschiedlichen Stellen ihren ersten Schwierigkeiten begegnen werden. Auf das 4. Kapitel wird man in der Elektrodynamik zurückkommen und die physikalische Bedeutung der Speziellen Relativitätstheorie aus einem anderen Blickwinkel erkennen. Wenn man möchte, kann man das 5. Kapitel (Geometrische Aspekte) beim ersten Durchgang auslassen und erst auf der Basis einer gründlichen Kenntnis des 2. und des 6. Kapitels studieren. Ich habe mich bemüht, den Text weitgehend „selbsttragend“ zu konzipieren, d. h. unter anderem, dass man fast alle Herleitungen nachrechnen und nachvollziehen kann. Das mag an manchen Stellen nicht einfach sein und einige Zeit des Grübelns erfordern. Man sollte aber nicht zu rasch aufgeben, denn was man nicht selbst einmal „durchspielt“, versteht man nicht wirklich.

Zum Umfang dieses Buches

Das Buch enthält wesentlich mehr Stoff als man in einer vierstündigen Vorlesung in einem Semester bewältigen kann. In diesem Fall wird man also eine Auswahl treffen müssen und den übrigen Text als ergänzende Lektüre verwenden. Das erste Kapitel, das noch keinen Gebrauch von Variationsprinzipien und Begriffen der kanonischen Mechanik macht, habe ich so angelegt, dass man es als Begleittext zu einer Vorlesung über Experimentalphysik (bzw. einem integrierten Kursus) oder zu einer Einführung in die theoretische Physik verwenden kann. In diesem Fall kann die eigentliche Mechanikvorlesung im Wesentlichen mit dem zweiten Kapitel beginnen und dann auch bis in das 6. oder 7. Kapitel vordringen.

Neben den Praktischen Übungen enthält das Buch zahlreiche Aufgaben und deren Lösungen. Ein kurzer historischer Exkurs gibt die Lebensdaten einiger Forscherpersönlichkeiten, die zur Entwicklung der Mechanik beigetragen haben.

Mathematische Hilfsmittel

Als Physiker oder Physikerin muss man eine gewisse Flexibilität im Gebrauch der Mathematik lernen: Einerseits kann man unmöglich alle deduktiven Schritte bis in alle Einzelheiten und in aller Strenge durchführen, da man auf diese Weise erst sehr spät zu den physikalisch wesentlichen Aussagen kommt. Andererseits muss man wenigstens einige der Grundlagen in ihrer mathematischen Gestalt kennen und im Übrigen wenigstens „wissen, wie es geht“, d. h. man sollte immer in der Lage sein, Einzelheiten der Argumentation mit den Hilfsmitteln zu ergänzen, die man in den Kursen über Mathematik gelernt hat. Für die Mechanik ist charakteristisch, dass sie Begriffe, Methoden und Sätze

aus ganz unterschiedlichen mathematischen Gebieten verwendet. Diesen etwas großzügigen Umgang mit den mathematischen Grundlagen wird man auch in diesem Band finden. Einige mathematische Aspekte sind weitgehend ausgearbeitet, bei anderen wird auf Kenntnisse aus der Analysis und der Linearen Algebra verwiesen. Man kann auch hier nicht erwarten, dass man alle Begriffe aus der Mathematik schon parat hat, wenn sie in der Physik verwendet werden. Im Einzelfall ist es ratsam, die Dinge punktuell nachzulesen oder – im Idealfall – sich aus den Grundlagen selbst abzuleiten.

Im Anhang A habe ich einige generelle Aussagen zusammengestellt, die für den Text hilfreich sein mögen.

Besonderheiten der 7. Auflage

Die siebte Auflage habe ich mit einer Reihe von ausführlichen Erklärungen und Bemerkungen, oft stimuliert durch Fragen der Teilnehmer und Teilnehmerinnen an meinen Vorlesungen, sowie einigen neuen Beispielen, ergänzt und überarbeitet.

Der Text ist fast durchweg auf die neue Rechtschreibung umgeschrieben. Zu den wenigen Ausnahmen, in denen ich die alte Schreibweise der Klarheit halber beibehalten habe, gehören *Potential*, *potentielle Energie*. Hier möchte ich den physikalischen Begriff auch durch die Schreibung vom umgangssprachlich anders definierten *Potenzial* absetzen. Bei *Differential*, *Differentialgleichung* und *differenzieren* – im Gegensatz zum vorhergehenden Beispiel von den neuen Regeln toleriert – habe ich die bisherige Schreibweise beibehalten. Die Begriffe *tangential*, *Tangentialraum* usw. werden ohnehin wie bisher geschrieben. Bei langen, zusammen gesetzten Begriffen habe ich mich von der Lesbarkeit leiten lassen, so z. B. *Viel-Teilchen-System*, aber *Dreikörperproblem*.

Eine eigene Tabelle mit den verwendeten Symbolen erschien mir nicht hilfreich, da alle Notationen in den einzelnen Kapiteln erklärt werden. Auch was sich typografisch gegenüber den früheren Auflagen geändert hat, ist leicht zu erkennen. So sind – wie bisher – \dot{x} Punkte des Phasenraums, fett-kursiv gedruckte Symbole \mathbf{v} , \mathbf{J} sind Vektoren über dem \mathbb{R}^3 , während Matrizen wie \mathbf{R} , \mathbf{J}_3 , \mathbf{M} jetzt fett und gerade gedruckt sind. Die Einträge von Matrizen werden wie gewöhnliche Symbole gedruckt, z. B. $(\mathbf{A}^T)_{ik} = A_{ki}$.

Danksagungen

Dieses Buch ist aus Vorlesungen im Rahmen des Mainzer Theoriekursus entstanden, angereichert durch ein Seminar über geometrische Aspekte der Mechanik. Daher möchte ich an erster Stelle den Studierenden und meinen Mitarbeitern danken, die durch ihr Interesse, ihre Begeisterung und durch ihre kritischen Fragen viel zu seiner Gestaltung beigetragen haben.

In meinen Zürcher Jahren habe ich viel Anregung durch Diskussionen und Gespräche mit Res Jost, Klaus Hepp und Norbert Straumann

erfahren, die mein Interesse an diesem wunderschönen Gebiet vertieft haben. Klaus Hepp danke ich besonders für freundschaftlichen und hilfreichen Rat bei der Gestaltung dieses Buches. Ebenso möchte ich Nikolaos Papadopoulos, mit dem ich besonders gerne geometrische Aspekte der Mechanik diskutiere, und Manfred Stingl für konstruktive Kritik und Verbesserungsvorschläge danken. In vielen Zuschriften von Kollegen und Studierenden – zu viele um sie hier namentlich aufzuzählen – habe ich viel positive Resonanz erfahren sowie konstruktive Bemerkungen bekommen, für die ich allen danke und von denen ich einige gerne aufgenommen habe.

Rainer Schöpf danke ich für die Mitarbeit bei den Lösungen der Aufgaben, die wir ursprünglich als eigenes Bändchen publiziert hatten. Peter Beckmann hat mir freundlicherweise die schönen Figuren zur logistischen Gleichung (Kap. 6) zur Verfügung gestellt und mir einige Hinweise zur Auswahl von Beispielen zum deterministischen Chaos gegeben.

Die Zusammenarbeit mit den Mitarbeitern des Springer-Verlags und des für diesen tätigen Unternehmens LE-TeX in Leipzig war ausgezeichnet, wofür ich besonders Herrn Dr. Hans J. Kölsch und Herrn Uwe Matrisch danke.

Dieses Buch widme ich allen Studierenden, die sich mit der Mechanik intensiv auseinandersetzen möchten. Wenn ich ihre Begeisterung wecken und sie für die Faszination der Physik empfänglich machen konnte, dann ist ein wesentliches Ziel dieses Buches erreicht.

Mainz, Mai 2002

Florian Scheck

Elementare Newton'sche Mechanik

Einführung

Dieses erste Kapitel befasst sich mit der Kinematik und Dynamik von endlich vielen Massenpunkten, die zwar inneren und eventuell auch äußeren Kräften unterworfen sein mögen, deren Bewegung aber nicht durch zusätzliche Bedingungen (wie die Vorgabe von starren Abständen, von Kurven, entlang derer einzelne Massenpunkte gleiten sollen, Begrenzungsflächen und dergleichen) eingeschränkt sind. Dies bedeutet, dass man solche mechanischen Systeme direkt mit den Newton'schen Gleichungen angehen kann und noch nicht gezwungen ist, zunächst die dynamisch wirklich unabhängigen, verallgemeinerten Koordinaten aufzusuchen, bevor man die Bewegungen selbst studieren kann. Hierauf bezieht sich die Bezeichnung „elementar“ in der Überschrift dieses Kapitels, auch wenn vieles in seinem Inhalt sich als keineswegs elementar herausstellt. Insbesondere werden schon bald einige zentrale Aussagen über den Zusammenhang zwischen Invarianzeigenschaften und Transformationen von Koordinatensystemen und Erhaltungssätzen der Theorie auftreten, die sich als tragende Elemente der ganzen Mechanik herausstellen werden, ja, die wie ein *cantus firmus*¹ die ganze theoretische Physik durchziehen. Auch wird man schon in den ersten, etwas tiefer gehenden Analysen dieser Zusammenhänge dazu angeregt, über die Natur der räumlichen und zeitlichen Mannigfaltigkeiten nachzudenken, in denen sich das physikalische Geschehen abspielt, und damit in eine Diskussion einzutreten, die noch heute in der Physik der kleinsten und größten Dimensionen von großer Bedeutung ist.

Man lernt in diesem ersten Kapitel auch schon den Phasenraum kennen, also die Beschreibung physikalischer Bewegungen durch die Koordinaten und die zugehörigen Impulse, die die Ausgangsbasis der Hamilton-Jacobi'schen Formulierung der kanonischen Mechanik ist.

Wir beginnen mit den Newton'schen Grundgesetzen der Mechanik, die wir zunächst erklären und in präzise mathematische Aussagen umsetzen, und die wir dann durch eine Reihe von Beispielen und wichtigen Anwendungen illustrieren.

1.1 Die Newton'schen Gesetze (1687) und ihre Interpretation

An den Anfang der Mechanik stellen wir Newtons Grundgesetze in ihrer ursprünglichen Formulierung:

¹„Mag den Nahmen wol daher bekommen haben: weil der Choral-Gesang in der Tieffe angebracht, den andern Stimmen ein starcker Grund ist, worüber sie figuriren, und gebauet werden können ...“ (Walther, 1732)

Interessanterweise lässt sich der Grenzfall $E = 2mgl$ (labile Gleichgewichtslage bzw. Kriechbahn) wieder elementar integrieren. Kehren wir zur Notation des Abschn. 1.17.2 zurück, so erfüllt $z_1 = \varphi$ jetzt die Differentialgleichung

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dz_1}{d\tau} \right)^2 + (1 - \cos z_1) = 2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{dz_1}{d\tau} = \sqrt{2(1 + \cos z_1)}.$$

Setzt man $u := \tan(z_1/2)$, so folgt die Differentialgleichung für u

$$\frac{du}{\sqrt{u^2 + 1}} = d\tau,$$

die sich elementar integrieren lässt. Zum Beispiel gilt für die Lösung, die zur Zeit $\tau = 0$ bei $z_1 = 0$ losläuft,

$$\int_0^u \frac{du'}{\sqrt{u'^2 + 1}} = \int_0^\tau d\tau', \quad \text{bzw.} \quad \ln(u + \sqrt{u^2 + 1}) = \tau,$$

woraus man die Lösung $u = \frac{1}{2}(e^\tau - e^{-\tau})$ und die Lösung für z_1 erhält,

$$z_1(\tau) = 2 \arctan(\sinh \tau).$$

Setzt man wieder $z_1 = \pi - \varepsilon$, d. h. $u = \cot(\varepsilon/2) \simeq (2/\varepsilon)$, so ist $u + \sqrt{u^2 + 1} \simeq (4/\varepsilon)$ und $\tau(\varepsilon) \simeq \ln(4/\varepsilon)$. Die Laufzeit von $z_1 = 0$ nach $z_1 = \pi$ divergiert logarithmisch.

1.24 Das Zwei-Teilchen-System mit Zentralkraft

Als weiteres und wichtiges Beispiel betrachten wir das Zwei-Teilchen-System (im \mathbb{R}^3) mit Zentralkraft, das sich mit sehr ähnlichen Methoden wie das eindimensionale Problem des Abschn. 1.22 behandeln lässt.

Das Zwei-Teilchen-System haben wir allgemein im Abschn. 1.7 analysiert. Da es sich um eine *Zentralkraft* handeln soll, die wir als stetig voraussetzen, kann man für diese ein kugelsymmetrisches Potential $U(r)$ angeben und es gilt

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -\nabla U(r) \quad \text{mit} \quad \mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2), \quad (1.61)$$

wo $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ die Relativkoordinate ist, $r = |\mathbf{r}|$. Lautet die Zentralkraft $\mathbf{F} = F(r)\hat{\mathbf{r}}$, so ist das zugehörige Potential $U(r) = -\int_{r_0}^r F(r') dr'$. Die Bewegung findet in der Ebene statt, die auf dem erhaltenen Relativdrehimpuls $\ell_{\text{rel}} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ senkrecht steht. In dieser Ebene kann man z. B. Polarkoordinaten einführen, $x = r \cos \varphi$ und $y = r \sin \varphi$, und es ist $\dot{\mathbf{r}}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$.

Die Energie E der Relativbewegung ist erhalten, da der Schwerpunkt sich kräftefrei bewegt und somit der Gesamtimpuls erhalten ist,

$$T_S + E = \frac{\mathbf{P}^2}{2M} + \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + U(r) = \text{const.} \quad (1.62)$$

Es gilt also mit $\ell \equiv |\boldsymbol{\ell}| = \mu r^2 \dot{\varphi}$,

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} + U(r) = \text{const.} \quad (1.63)$$

$T_r := \mu \dot{r}^2/2$ ist die kinetische Energie der Radialbewegung. Der Term $\ell^2/2\mu r^2 = \mu r^2 \dot{\varphi}^2/2$ lässt sich sowohl als kinetische Energie der Rotationsbewegung lesen als auch, dazu äquivalent, als potentielle Energie der Zentrifugalkraft,

$$\mathbf{Z} = -\nabla \left(\frac{1}{2} \mu r \dot{\varphi}^2 \right) = -\hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{2} \mu r^2 \dot{\varphi}^2 \right) = -\mu r \dot{\varphi}^2 \hat{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r} \mathbf{v}_r^2 \hat{\mathbf{r}}.$$

Aus dem Drehimpulssatz

$$\ell = \mu r^2 \dot{\varphi} = \text{const} \quad (1.64)$$

und dem Energiesatz (1.63) folgen die Differentialgleichungen für $r(t)$ und $\varphi(t)$

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - U(r)) - \frac{\ell^2}{\mu^2 r^2}} \equiv \sqrt{\frac{2}{\mu} [E - U_{\text{eff}}(r)]} \quad (1.65)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\ell}{\mu r^2}, \quad (1.66)$$

wo

$$U_{\text{eff}}(r) := U(r) + \frac{\ell^2}{2\mu r^2} \quad (1.67)$$

als effektives Potential betrachtet werden kann. Man sieht dann besonders deutlich die nahe Verwandtschaft zu (1.52), der eindimensionalen Bewegung. Wie dort ist auch (1.65) eine Differentialgleichung mit trennbaren Variablen. Diese kann man weiter behandeln wie dort, man kann aber auch die aus (1.65) und (1.66) folgende Differentialgleichung

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\ell}{r^2 \sqrt{2\mu(E - U_{\text{eff}})}} \quad (1.68)$$

diskutieren, aus der folgt, dass

$$\varphi - \varphi_0 = \ell \int_{r_0}^{r(\varphi)} \frac{dr}{r^2 \sqrt{2\mu[E - U_{\text{eff}}]}}. \quad (1.69)$$

Wir schreiben $E = T_r + U_{\text{eff}}(r)$. Da $T_r \geq 0$ ist, folgt wiederum, dass $E \geq U_{\text{eff}}(r)$ sein muss. Wenn also $r(t)$ einen Punkt r_1 erreicht, für den $E = U_{\text{eff}}(r_1)$ ist, so ist dort $\dot{r}(r_1) = 0$. Hier heißt das aber (im Fall $\ell \neq 0$) nicht, dass der Massenpunkt wie bei einer eindimensionalen Bewegung wirklich zur Ruhe kommt und dann umkehrt. Vielmehr hat er einen Punkt größter Ferne (*Aphel*) oder einen Punkt größter Nähe (*Perihel*) vom Kraftzentrum erreicht. Solange $\ell \neq 0$, hat das Teilchen im Punkt r_1

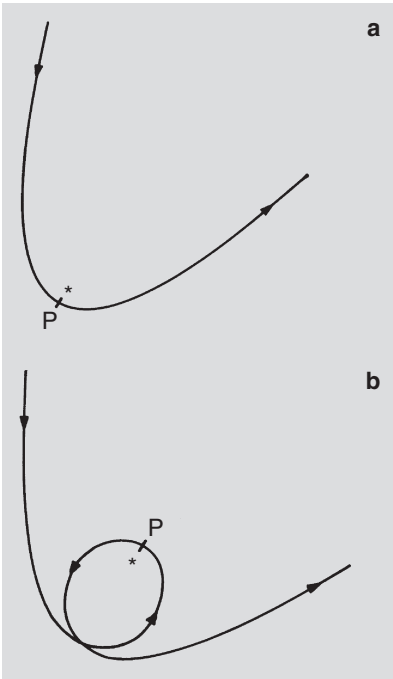


Abb. 1.14. Verschiedene, infinite Bahntypen bei attraktiver, potentieller Energie. P ist der Punkt größter Annäherung an das Kraftzentrum

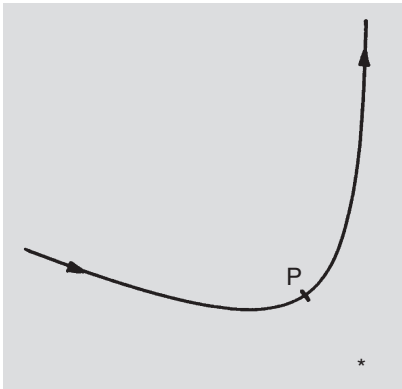


Abb. 1.15. Typische infinite Bahnkurve bei repulsivem Zentralpotential

zwar keine radiale Geschwindigkeit mehr, wohl aber eine Winkelgeschwindigkeit. Es sind verschiedene Fälle möglich:

- i) *Es ist $r(t) \geq r_{\min} \equiv r_P$ (von Perihel).* Dies ist eine infinite Bewegung. Das Teilchen kommt aus dem Unendlichen, erreicht sein Perihel und verschwindet wieder im Unendlichen. Bei *attraktivem* Potential kann das so aussehen wie in Abb. 1.14 skizziert. Bei *repulsivem* Potential kann das etwa wie in Abb. 1.15 skizziert aussehen. Im ersten Fall umläuft das Teilchen das Kraftzentrum einmal oder mehrmals. Im zweiten Fall wird es vom Kraftzentrum abgestoßen und somit abgelenkt.
- ii) *$r_{\min} \equiv r_P \leq r(t) \leq r_{\max} \equiv r_A$ (von Aphel).* Hier liegt die ganze Bahn des Teilchens im Kreisring zwischen den beiden Kreisen mit Radius r_P bzw. r_A . Der Teil der Bahn, der zwischen einem Apheldurchgang und dem darauf folgenden Periheldurchgang liegt, und den wir in Abb. 1.16 skizziert haben, reicht aus, um die ganze Bahn zu konstruieren. Man kann sich nämlich überlegen, dass die Bahn symmetrisch sowohl bezüglich der Achse SA als auch bezüglich der Achse SP sein muss. Man betrachte dazu zwei zu A symmetrische Polarwinkel $-\Delta\varphi$ und $\Delta\varphi$, mit $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_A$ und (Abb. 1.17)

$$\Delta\varphi = \ell \int_{r_A}^{r(\varphi)} \frac{dr}{r^2 \sqrt{2\mu[E - U_{\text{eff}}]}}$$

Es ist

$$\begin{aligned} U_{\text{eff}}(r) &= U_{\text{eff}}(r_A) + [U_{\text{eff}}(r) - U_{\text{eff}}(r_A)] \\ &= E + [U_{\text{eff}}(r) - U_{\text{eff}}(r_A)] \end{aligned}$$

und somit

$$\Delta\varphi = \ell \int_{r_A}^{r(\varphi)} \frac{dr}{r^2 \sqrt{2\mu[U_{\text{eff}}(r_A) - U_{\text{eff}}(r)]}} \quad (1.70)$$

Man sieht aber, dass man genauso gut von A nach C_2 , statt C_1 , laufen kann, indem man in dieser Gleichung für $\Delta\varphi$ das andere Vorzeichen der Wurzel wählt. Nach (1.68) heißt das, dass man die Durchlaufrichtung ändert, oder, nach (1.65) und (1.66), dass man die Zeitrichtung umkehrt. Da für $\Delta\varphi$ und $-\Delta\varphi$ jedesmal $r(\varphi)$ dasselbe ist, ist mit jedem Bahnpunkt $C_1 = \{r(\varphi), \varphi = \varphi_A + \Delta\varphi\}$ auch $C_2 = \{r(\varphi), \varphi = \varphi_A - \Delta\varphi\}$ ein Bahnpunkt. Dieselbe Überlegung gilt bei P . Die behauptete Symmetrie ist somit bewiesen.

Wir illustrieren diese Ergebnisse am Beispiel eines Zentralpotentials vom Typus $U(r) = -a/r^\alpha$, $a > 0$.

Zentralpotential vom Typus $U(r) = -a/r^\alpha$, $a > 0$. Seien $(r, \varphi) =$ Polarkoordinaten in der Bahnebene. Es gilt

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2E}{\mu} - \frac{2U(r)}{\mu} - \frac{\ell^2}{\mu^2 r^2}} \quad (1.71)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\ell}{\mu r^2} \quad (1.72)$$

Wir betrachten hier speziell die Bahnen mit $E < 0$ und setzen daher $B := -E$. Außerdem führen wir dimensionslose Variable ein, die wie folgt definiert seien:

$$\varrho(\tau) := \frac{\sqrt{\mu B}}{\ell} r(t)$$

$$\tau := \frac{B}{\ell} t.$$

Dann lauten die Bewegungsgleichungen (1.71) und (1.72)

$$\frac{d\varrho}{d\tau} = \pm \sqrt{\frac{2b}{\varrho^\alpha} - \frac{1}{\varrho^2} - 2} \quad (1.71')$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1}{\varrho^2} \quad (1.72')$$

Dabei ist

$$b := \frac{a}{B} \left(\frac{\sqrt{\mu B}}{\ell} \right)^\alpha.$$

Im Spezialfall $\alpha = 1$ erhalten wir wieder das Kepler-Problem, und die Lösungen von (1.71') und (1.72') lauten dann

$$\varrho(\varphi) = 1/b[1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)] \quad \text{mit} \quad \varepsilon = \sqrt{1 - 2/b^2},$$

(φ_0 ist frei wählbar, z. B. $\varphi_0 = 0$).

In den folgenden Abb. 1.18–22 sind Bahnkurven $\varrho(\varphi)$ für verschiedene α und b aufgetragen.

Abbildung 1.18 zeigt zwei Keplerellipsen für $b = 1,5$ und $b = 3$. Die Abb. 1.19, 20 illustrieren, wie die Bahn für $\alpha > 1$ der Keplerellipse „voreilt“. Ebenso zeigen die Bilder 1.21, 1.22, wie die Bahn für $\alpha < 1$ „nachhinkt“. In beiden Fällen tritt (gegenüber dem Kepler'schen

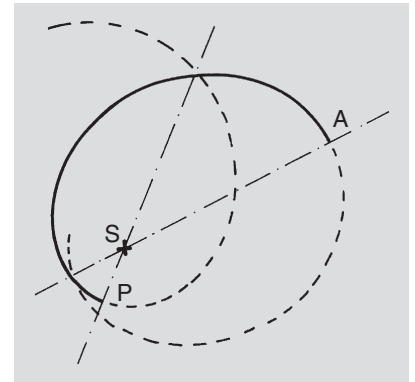


Abb. 1.16. Gebundene oder finite Bahnkurve bei attraktivem Zentralpotential. Die Bahn hat als Symmetrieachsen die Linien SA, vom Kraftzentrum S zum Punkt A größter Ferne, und SP, wo P der Punkt größter Annäherung ist. Daher kann man aus dem Zweig PA der Bahn die ganze Rosettenkurve konstruieren. (Die gezeigte Kurve gehört zu $a = 1,3$, $b = 1,5$ des weiter unten diskutierten Beispiels)

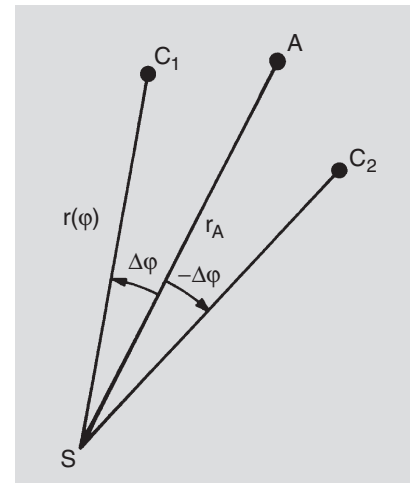


Abb. 1.17. Zwei symmetrische Positionen vor und nach Durchlaufen des Aphels

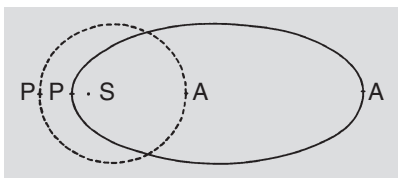


Abb. 1.18. Zwei Kepler-Ellipsen mit verschiedener Exzentrizität. (Im Potential $U(r) = -a/r^\alpha$ ist $\alpha = 1$). Siehe auch die Praktische Übung 4

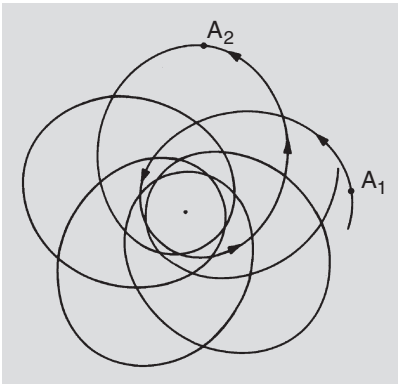


Abb. 1.19. Im Potential $U(r) = -a/r^\alpha$ ist $\alpha = 1,3$ gewählt, d.h. die Rosettenbahn „eilt voraus“. Es ist $b = 1,5$ gewählt

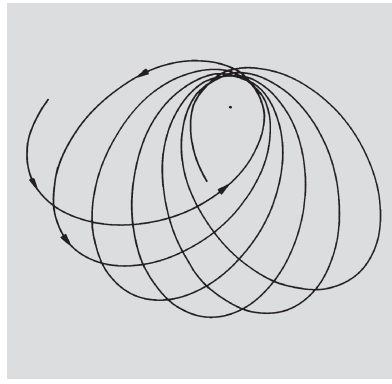


Abb. 1.20. Ähnliche Situation wie in Abb. 1.19, hier mit der Wahl $\alpha = 1,1$, $b = 2$

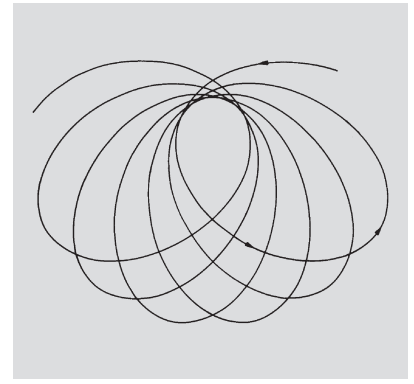


Abb. 1.21. Beispiel für eine Rosettenbahn, die „nachhinkt“, mit der Wahl $\alpha = 0,9$, $b = 2$ für die Parameter

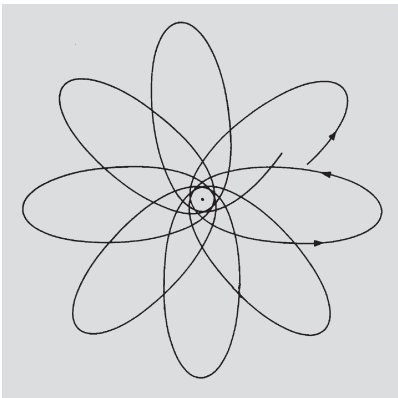


Abb. 1.22. Eine Rosettenbahn, die noch stärker als die in Abb. 1.21 nachhinkt mit der Wahl $\alpha = 0,8$, $b = 3$

Fall $\alpha = 1$) eine Drehung des Perihels auf. Für $\alpha > 1$ ist die Anziehung bei kleinen Abständen stärker, es entsteht eine Rosettenbahn, bei der das Perihel voreilt. Für $\alpha < 1$ ist die Anziehung bei kleinen Abständen schwächer als für $\alpha = 1$, es entsteht ebenfalls eine Rosettenbahn, bei der aber das Perihel gegenüber der Keplerellipse ständig zurückbleibt.

1.25 Rotierendes Koordinatensystem: Coriolis- und Zentrifugalkräfte

Sei \mathbf{K} ein Inertialsystem; \mathbf{K}' sei ein zweites System, das bei $t = 0$ mit \mathbf{K} zusammenfällt und das mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = |\omega|$ um die Richtung $\hat{\omega} = \omega/\omega$ rotiert, wie in Abb. 1.23 gezeigt. Da die Drehung zeitabhängig ist, ist das Bezugssystem \mathbf{K}' kein Inertialsystem! Der Ortsvektor eines Massenpunktes sei mit $\mathbf{r}(t)$ bezüglich \mathbf{K} , mit $\mathbf{r}'(t)$ bezüglich \mathbf{K}' bezeichnet. Es ist $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t)$.

Für die *Geschwindigkeiten* gilt folgendes:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' ,$$

wo \mathbf{v}' sich auf \mathbf{K}' , \mathbf{v} sich auf \mathbf{K} bezieht, oder, wenn wir die zeitliche Änderung, wie sie von \mathbf{K}' aus beobachtet wird, mit d'/dt bezeichnen,

$$\frac{d'}{dt}\mathbf{r} = \frac{d}{dt}\mathbf{r} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad \text{bzw.} \quad \frac{d}{dt}\mathbf{r} = \frac{d'}{dt}\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} .$$

Dabei bedeuten

d/dt : zeitliche Änderung, von \mathbf{K} aus beobachtet

d'/dt : zeitliche Änderung, von \mathbf{K}' aus beobachtet.

Die Prinzipien der kanonischen Mechanik

Einführung

Dies ist ein zentrales Stück der allgemeinen Mechanik, in dem man an einigen, zunächst recht künstlich anmutenden Beispielen lernt, sich von dem engen Rahmen der Newton'schen Mechanik für Bahnkoordinaten im dreidimensionalen Raum ein wenig zu lösen, zugunsten einer allgemeineren Formulierung von mechanischen Systemen, die einer wesentlich größeren Klasse angehören. Das ist der erste Schritt der Abstraktion, weg von Wurfparabeln, Satellitenbahnen, schiefen Ebenen und schlagenden Pendeluhren; er führt auf eine neue Ebene der Beschreibung, die sich in der Physik weit über die Mechanik hinaus als tragfähig erweist. Man lernt, zunächst über die „Räuberleiter“ des d'Alembert'schen Prinzips, die Lagrangefunktion und das auf ihr ruhende Gebäude der Lagrange'schen Mechanik kennen. Mit ihrer Hilfe bekommt man einen ersten Einblick in die Bedeutung von Symmetrien und Invarianzen eines vorgegebenen Systems für dessen Beschreibung. Über den Weg der Legendre-Transformation wird man dann zur Hamiltonfunktion geleitet, die der Angelpunkt der Hamilton-Jacobi'schen, kanonischen Formulierung der Mechanik ist.

Das scheinbar Künstliche und die Abstraktion dieser Beschreibungen zahlen sich in vielfacher Weise aus: Unter anderem gewinnt man einen wesentlich tieferen Einblick in die dynamische und geometrische Struktur der Mechanik, die bei ihrer Formulierung im Phasenraum hervortritt. Damit werden auch gleichzeitig das Fundament und ein Begriffsrahmen geschaffen, ohne die andere Theorien wie z. B. die Quantenmechanik nicht verständlich, vielleicht nicht einmal formulierbar wären.

2.1 Zwangsbedingungen und verallgemeinerte Koordinaten

2.1.1 Definition von Zwangsbedingungen

Falls die Massenpunkte eines mechanischen Systems sich nicht völlig unabhängig voneinander bewegen können, sondern gewissen Nebenbedingungen unterliegen, so spricht man von *Zwangsbedingungen*. Diese muss man gesondert diskutieren, da sie ja die Zahl der Freiheitsgrade verkleinern und somit die Bewegungsgleichungen abändern.

2.29 Der Liouville'sche Satz

Die Lösungen der Hamilton'schen Gleichungen $-\mathbf{J}\dot{x} = H_{,x}$ bezeichnen wir wie in Abschn. 1.20 mit

$$\Phi_{t,s}(\underline{x}) = (\varphi_{t,s}^1(\underline{x}), \dots, \varphi_{t,s}^{2f}(\underline{x})) \quad (2.116)$$

und nennen sie *Flüsse* im Phasenraum. In der Tat beschreiben sie, wie die Anfangskonfiguration \underline{x} , die zur Anfangszeit s vorliegt, durch den Phasenraum fließt und in die Konfiguration $\underline{x}_t = \Phi_{t,s}(\underline{x})$ übergeht, die zur Zeit t angenommen wird. Die zeitliche Entwicklung eines kanonischen Systems kann man sich wie das Fließen einer inkompressiblen Flüssigkeit vorstellen: Es stellt sich heraus, dass dieser Fluss volumen- und orientierungserhaltend ist. Gibt man also eine Menge von Anfangskonfigurationen vor, die zur Zeit s ein gewisses orientiertes Gebiet U_s im Phasenraum mit Volumen V_s ausfüllen, so wird man dieses Ensemble zu einer anderen Zeit t (später oder auch früher als s) in einem Phasenraumgebiet U_t antreffen, das mit U_s volumengleich ist, $V_t = V_s$, und das sogar dieselbe Orientierung wie U_s hat. Diese Aussage ist der Inhalt des Liouville'schen Satzes.

Diesen Satz formulieren und beweisen wir auf zwei äquivalente Weisen, um seine Bedeutung klar herauszuarbeiten. In der ersten Formulierung zeigen wir, dass die Matrix der partiellen Ableitungen (2.117), die ja genau die Jacobi-Matrix der Transformation $d\underline{x} \rightarrow d\underline{y} = (\mathbf{D}\Phi) d\underline{x}$ ist, symplektisch ist und daher Determinante $+1$ hat. In der zweiten, dazu äquivalenten Formulierung zeigt man, dass der Fluss divergenzfrei ist, dass also aus dem Anfangsgebiet U_s nichts heraus- und in U_s auch nichts hineinfließen kann.

2.29.1 Lokale Form

Die Matrix der partiellen Ableitungen von Φ werde wie folgt abgekürzt,

$$\mathbf{D}\Phi_{t,s}(\underline{x}) := \left(\frac{\partial \Phi_{t,s}^i(\underline{x})}{\partial x_k} \right). \quad (2.117)$$

Der *Liouville'sche Satz* sagt folgendes aus:

Satz

Es sei $\Phi_{t,s}(\underline{x})$ der Fluss zu $-\mathbf{J}\dot{x} = H_{,x}$. Für alle \underline{x} , t und s , für die der Fluss definiert ist, gilt

$$\mathbf{D}\Phi_{t,s}(\underline{x}) \in \text{Sp}_{2f}. \quad (2.118)$$

Die Matrix der partiellen Ableitungen ist symplektisch und hat insbesondere die Determinante $\det(\mathbf{D}\Phi_{t,s}(\underline{x})) = 1$.

Durch den Fluss $\Phi_{t,s}(\underline{x})$ wird der Anfangspunkt \underline{x} , der zur Zeit s angenommen wird, auf den Punkt $\underline{x}_t = \Phi_{t,s}(\underline{x})$ abgebildet, der zur Zeit t

angenommen wird. Betrachtet man benachbarte Anfangskonfigurationen, die das infinitesimale Volumen $dx_1 \dots dx_{2f}$ ausfüllen, so besagt die Aussage (2.118), dass dieses Volumen unter dem Fluss erhalten bleibt, inklusive seiner Orientierung, (denn die Matrix (2.117) ist genau die Jacobi-Matrix der Transformation).

Es gilt auch folgende Umkehrung:

Es sei $\Phi_{t,s}$ der Fluss zur Differentialgleichung $-\mathbf{J}\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}, t)$, es gelte außerdem die Aussage (2.118). Dann gibt es lokal eine Hamiltonfunktion $H(\underline{x}, t)$ derart, dass $H_{,x} = \underline{F}(\underline{x}, t)$ ist.

Beweis

Es ist $-\mathbf{J}[\partial\Phi_{t,s}(\underline{x})/\partial t] = H_{,x}(t) \circ \Phi_{t,s}$. Differenziert man die Gleichung $-\mathbf{J}\dot{\underline{x}} = H_{,x}$ bei $\underline{x} = \Phi_{t,s}$ nach \underline{x} , so folgt mit Hilfe der Kettenregel $-\mathbf{J}[\partial\mathbf{D}\Phi_{t,s}(\underline{x})/\partial t] = (\mathbf{D}H_{,x})(\Phi_{t,s}, t)\mathbf{D}\Phi_{t,s}(\underline{x})$ und schließlich

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[(\mathbf{D}\Phi_{t,s}(\underline{x}))^T \mathbf{J} (\mathbf{D}\Phi_{t,s}(\underline{x})) \right] &= -(\mathbf{D}\Phi_{t,s})^T [\mathbf{D}H_{,x} - (\mathbf{D}H_{,x})^T] (\mathbf{D}\Phi_{t,s}) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.119)$$

weil $\mathbf{D}H_{,x} = (\partial^2 H / \partial x_k \partial x_i)$ symmetrisch ist.

Für $t = s$ gilt die Aussage (2.118) trivialerweise. Das Resultat (2.119) sagt, dass sie dann für alle t richtig ist.

Zur Umkehrung: Die zu (2.119) analoge Gleichung sagt jetzt aus, dass $\mathbf{D}\underline{F} - (\mathbf{D}\underline{F})^T = 0$ bzw. $\text{rot } \underline{F} = 0$. Dann gibt es aber (zumindest lokal) eine Funktion H derart, dass $\underline{F} = H_{,x}$.

2.29.2 Integrale Form

Man kann die Aussage des Liouville'schen Satzes am Beispiel einer Menge von Anfangskonfigurationen, die zur Zeit s das orientierte Phasenraumgebiet U_s mit Volumen V_s ausfüllen, anschaulich machen. Zum Zeitpunkt s gilt

$$V_s = \int_{U_s} d\underline{x},$$

wobei über das vorgegebene Gebiet U_s integriert wird. Zu einer anderen Zeit t ist dann

$$V_t = \int_{U_t} d\underline{y} = \int_{U_s} d\underline{x} \det \left(\frac{\partial \underline{y}}{\partial \underline{x}} \right) = \int_{U_s} d\underline{x} \det(\mathbf{D}\Phi_{t,s}),$$

denn bei der Transformation eines orientierten Vielfachintegrals auf neue Variable wird das Volumenelement mit der Determinante der entsprechenden Jacobi-Matrix multipliziert. Für t in der Nähe von s kann

man nach $(t-s)$ entwickeln,

$$\underline{\Phi}_{t,s}(\underline{x}) = \underline{x} + \underline{F}(\underline{x}, t) \cdot (t-s) + O((t-s)^2); ,$$

$$\text{wo } \underline{F}(\underline{x}, t) = \mathbf{J}H_{,x} = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q} \right)$$

ist. Für die Ableitung nach \underline{x} gilt nach der Definition (2.117) somit

$$\mathbf{D}\underline{\Phi}_{t,s}(\underline{x}) = \mathbf{1} + \mathbf{D}\underline{F}(\underline{x}, t) \cdot (t-s) + O((t-s)^2) ,$$

oder ausgeschrieben,

$$\frac{\partial \varphi_{t,s}^i(\underline{x})}{\partial x^k} = \delta_{ik} + \frac{\partial F^i}{\partial x^k}(t-s) + O((t-s)^2) .$$

Bildet man hiervon die Determinante, so kann man folgende, leicht zu beweisende Hilfsformel benutzen,

$$\det(\mathbf{1} + \mathbf{A}\varepsilon) \equiv \det(\delta_{ik} + A_{ik}\varepsilon) = 1 + \varepsilon \text{Sp}\mathbf{A} + O(\varepsilon^2) ,$$

wo $\text{Sp } \mathbf{A} = \sum_i A_{ii}$ die Spur der Matrix \mathbf{A} ist und ε in unserem Fall mit $(t-s)$ identifiziert werden muss. Es folgt

$$\det(\mathbf{D}\underline{\Phi}_{t,s}(\underline{x})) = 1 + (t-s) \sum_{i=1}^{2f} \frac{\partial F^i}{\partial x^i} + O((t-s)^2) .$$

Die Spur $\sum_{i=1}^{2f} \partial F^i / \partial x^i$ ist nichts anderes als eine Divergenz im $2f$ -dimensionalen Phasenraum, von der man leicht zeigt, dass sie verschwindet: Mit $\underline{F} = \mathbf{J}H_{,x}$ folgt

$$\text{div } \underline{F} := \sum_{i=1}^{2f} \frac{\partial F^i}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial \underline{q}} \left(\frac{\partial H}{\partial \underline{p}} \right) + \frac{\partial}{\partial \underline{p}} \left(-\frac{\partial H}{\partial \underline{q}} \right) = 0 .$$

Damit ist gezeigt, dass $V_t = V_s$ ist. Solange der Fluss definiert ist, kann das ursprüngliche Gebiet U_s im Laufe der Zeit seine Lage und Form zwar ändern, nicht aber sein Volumen und seine Orientierung.

2.30 Beispiele zum Liouville'schen Satz

Beispiele

- i) Ein sehr einfaches Beispiel ist durch die linearen, autonomen Systeme mit $f = 1$ gegeben, die wir in Abschn. 2.26 studiert haben. Hier ist der Fluss $\underline{\Phi}_{t,s}(\underline{x})$ dadurch gegeben, dass die Anfangskonfiguration \underline{x} mit der Matrix $\underline{P}(t-s)$ multipliziert wird, deren Determinante gleich 1 ist. Im Spezialfall des harmonischen Oszillators etwa laufen alle Phasenraumpunkte mit konstanter Winkelgeschwindigkeit auf Kreisen um den Ursprung wie Zeiger an der Kirchturmuh. Ein vor-

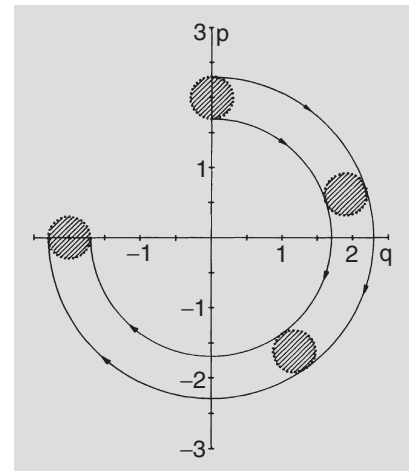


Abb. 2.12. In den Einheiten von Abschn. 1.17.1 ist die Periode τ^0 des harmonischen Oszillators gleich 2π . Ein kreisförmiges Gebiet von Anfangskonfigurationen wandert unverändert und gleichförmig wie auf einem Uhrzeiger um den Ursprung. Die vier eingezeichneten Positionen werden zu den Zeiten $\tau = 0, 0,2\tau^0, 0,4\tau^0$, bzw. $0,75\tau^0$ angenommen

gegebenes U_s wandert also unverändert um den Ursprung. Das ist in Abb. 2.11 und 2.12 skizziert.

- ii) Weniger trivial ist das Beispiel des ebenen mathematischen Pendels, das wir in der dimensionslosen Form des Abschn. 1.17.2 notieren,

$$\frac{dz_1}{d\tau} = z_2(\tau), \quad \frac{dz_2}{d\tau} = -\sin z_1(\tau),$$

wo τ die dimensionslose Zeitvariable $\tau = \omega t$ ist und die reduzierte Energie als

$$\varepsilon := E/mgl = \frac{1}{2}z_2^2 + (1 - \cos z_1)$$

definiert waren. ε ist entlang jeder Phasenbahn konstant.

Abb. 2.13. Ein kreisförmiges Gebiet von Anfangskonfigurationen (bei $\tau = 0$) des ebenen mathematischen Pendels unterhalb der Kriechbahn wandert langsamer als im Fall des Oszillators aus Abb. 2.12 um den Ursprung und wird dabei mehr und mehr deformiert. Die eingezeichneten Positionen werden, dem Uhrzeigersinn nach, zu den Zeiten $\tau = 0, \tau^0/4, \tau^0/2$, bzw. τ^0 angenommen. τ^0 ist dabei die Periode des harmonischen Oszillators, der dem Grenzfall kleiner Ausschläge entspricht

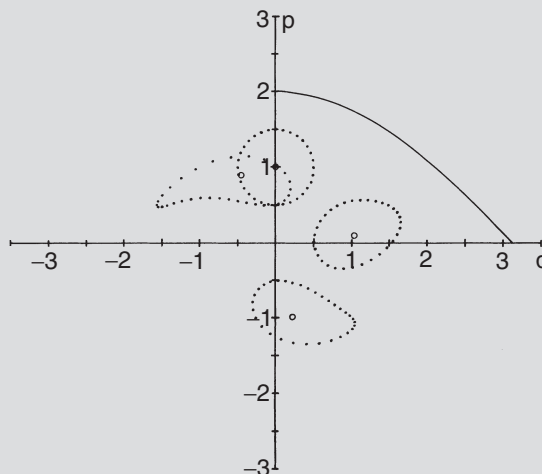
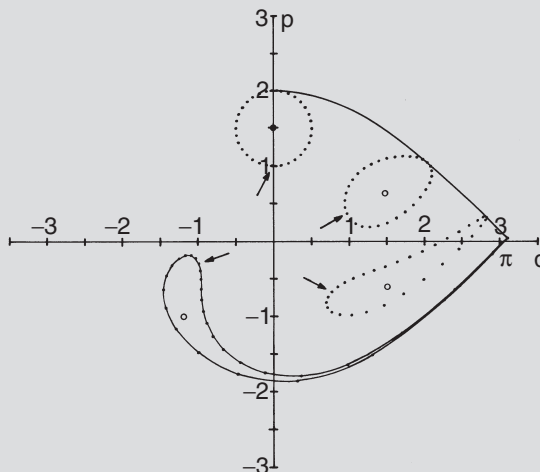


Abb. 2.14. Selbes System wie in Abb. 2.13, allerdings liegt jetzt ein Randpunkt auf der Kriechbahn. Die eingezeichneten Lagen gehören zu den Zeiten $\tau = 0, 0,2\tau^0, 0,4\tau^0$, bzw. $0,75\tau^0$. Die Pfeile verfolgen den Punkt mit der Anfangskonfiguration ($q = 0, p = 1$), die offenen Punkte zeigen das Wandern des ursprünglichen Kreismittelpunkts



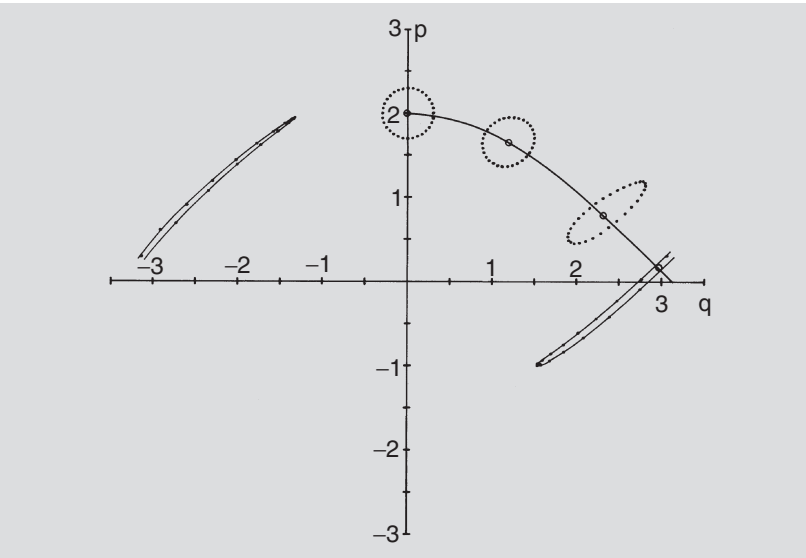


Abb. 2.15. Selbes System wie in Abb. 2.13, 2.14, wobei jetzt der Mittelpunkt des Kreises auf der Kriechbahn liegt. Die Punkte auf der Kriechbahn laufen asymptotisch in den Punkt $(q = \pi, p = 0)$, während Punkte unterhalb und oberhalb der Kriechbahn umlaufen bzw. durchschwingen können. Die eingezeichneten Lagen gehören zu den Zeiten $\tau = 0, 0,1\tau^0, 0,25\tau^0$, bzw. $0,5\tau^0$ (im Uhrzeigersinn)

Die Abb. 1.10 aus Abschn. 1.17 zeigt die Phasenbahnen im Phasenraum (z_1, z_2) , (der Klarheit halber dort mit q anstelle von z_1 , p anstelle von z_2 bezeichnet). Gibt man z. B. ein kreisförmiges Gebiet U_s von Anfangskonfigurationen vor, so ergeben sich Bilder von der Art der in den Abb. 2.13–15 gezeigten. Die Periode des harmonischen Oszillators ist, in diesen dimensionslosen Einheiten, $\tau^{(0)} = \omega T^{(0)} = 2\pi$. Die Bilder zeigen jeweils drei Positionen des Gebietes U_t , die das Anfangsgebiet U_s zu den in den Bildunterschriften angegebenen Zeiten $\kappa\tau^{(0)}$ (also Vielfachen von $\tau^{(0)}$) annimmt. Da die Bewegung periodisch ist, muss man sich die Bilder auf einen Zylinder mit Umfang 2π aufgebracht denken, so dass die beiden Punkte $(\pi, 0)$ und $(-\pi, 0)$ identifiziert werden. Man sieht die Verformung des Konfigurationsgebietes, die besonders dann sehr ausgeprägt ist, wenn ein Phasenraumpunkt auf einer „Kriechbahn“ (vgl. Abschn. 1.23, (1.60)) mit reduzierter Energie $\varepsilon = 2$ liegt, d. h. beispielsweise die Anfangskonfiguration $(z_1 = 0, z_2 = 2)$ hat. Ein solcher Punkt kann auch für sehr große Zeiten nur bis zum Punkt $(q = \pi, p = 0)$ wandern, während Nachbarpunkte mit $\varepsilon > 2$ mehrfach „durchschwingen“, solche mit $\varepsilon < 2$ den Ursprung mehrfach umlaufen.

Man sieht aber deutlich, dass bei der Deformation des ursprünglichen Gebietes Volumen und Orientierung erhalten bleiben.

- iii) Geladene Teilchen in äußeren elektromagnetischen Feldern gehorchen der Bewegungsgleichung (2.28)

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{e}{c}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t),$$

die sich aus einer Lagrangefunktion ableiten lässt. Gleichung (2.30) aus dem Abschn. 2.8 (ii) gibt ein Beispiel. In Abschn. 2.16 (ii) hatten wir gesehen, dass die Bedingung (2.42) für die Durchführbarkeit der Legendre-Transformation erfüllt ist und dass (2.49) eine mögliche Hamiltonfunktion darstellt. Gibt man einen Satz von geladenen Teilchen in äußeren elektrischen und magnetischen Feldern vor, so tritt zur Wechselwirkung mit den äußeren Feldern noch die Coulomb-Wechselwirkung zwischen den Teilchen hinzu, die sich ebenfalls in die Hamiltonfunktion einfügen lässt. Ein solches System ist demnach kanonisch und genügt dem Liouville'schen Satz. Beim Bau von Beschleunigern und von Strahlführungen für Elementarteilchen spielt dieser Satz über die Erhaltung des Phasenraumvolumens eine zentrale Rolle.

2.31 Die Poisson-Klammer

Die Poisson-Klammer ist eine schiefsymmetrische Bilinearkombination aus Ableitungen von dynamischen Größen nach Koordinaten und Impulsen. Mit dynamischer Größe ist damit jede physikalisch relevante Funktion der verallgemeinerten Koordinaten und Impulse gemeint wie z. B. die kinetische Energie, die Hamiltonfunktion, der gesamte Drehimpuls oder andere. Es sei $g(q, p, t)$ eine solche dynamische Größe. Die Poisson-Klammer aus g und der Hamiltonfunktion taucht in natürlicher Weise auf, wenn man die gesamte zeitliche Änderung von g entlang einer physikalischen Bahn im Phasenraum berechnet. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \frac{d g}{d t} &= \frac{\partial g}{\partial t} + \sum_{i=1}^f \frac{\partial g}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^f \frac{\partial g}{\partial p_i} \dot{p}_i \\ &= \frac{\partial g}{\partial t} + \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \equiv \frac{\partial g}{\partial t} + \{H, g\}, \end{aligned}$$

wobei wir im zweiten Schritt die kanonischen Bewegungsgleichungen (2.43) verwendet und die Summe im zweiten Ausdruck durch das Klammersymbol $\{, \}$ abgekürzt haben. Die Poisson-Klammer aus g und H beschreibt die zeitliche Entwicklung der Größe g ; außerdem stellt sich heraus, dass die Poisson-Klammer unter kanonischen Transformationen invariant ist. Natürlich kann man diese Klammer auch aus zwei beliebigen dynamischen Größen $f(q, p)$ und $g(q, p)$ bilden. Schließlich sei noch erwähnt, dass die Poisson-Klammer formal und inhaltlich ein Analogon in der Quantenmechanik findet, nämlich den Kommutator. In der Quantenmechanik werden dynamische Größen (man sagt auch *Observable*) durch Operatoren (genauer, durch selbstadjungierte Operatoren über einem Hilbertraum) dargestellt. Der Kommutator zweier Operatoren gibt Auskunft darüber, ob die entsprechenden Observablen

Mechanik des starren Körpers

Einführung

Die Theorie des starren Körpers ist ein besonders wichtiges Teilgebiet der allgemeinen Mechanik: Zum einen ist der Kreisel nächst den kugelsymmetrischen Massenverteilungen des Abschn. 1.30 das einfachste Beispiel eines ausgedehnten Körpers. Zum zweiten stellt die Dynamik des starren Körpers einen besonders schönen Modellfall dar, an dem man die allgemeinen Prinzipien der kanonischen Mechanik ausprobieren und die Folgerungen aus den jeweiligen räumlichen Symmetrien besonders anschaulich studieren kann. Zum dritten stellen die Bewegungsgleichungen des Kreisels, die Euler'schen Gleichungen, ein interessantes Beispiel für *nichtlineare* Dynamik dar. (Damit ist gemeint, dass diese Gleichungen nicht in linearer Weise von den gesuchten dynamischen Variablen und deren Ableitungen abhängen.) Zum vierten schließlich führt die Beschreibung des starren Körpers wieder auf die kompakte Lie'sche Gruppe $SO(3)$, die wir im Zusammenhang mit der Invarianz von mechanischen Bewegungsgleichungen unter Drehungen des Koordinatensystems studiert haben: Der Konfigurationsraum des nichtausgearteten Kreisels ist das direkte Produkt aus dem dreidimensionalen Raum \mathbb{R}^3 und der Gruppe $SO(3)$ in dem Sinne, dass seine momentane Konfiguration durch die Angabe (i) der Lage des Schwerpunktes, (ii) der Orientierung des Körpers relativ zu einem vorgegebenen Inertialsystem vollständig bestimmt ist. Der Schwerpunkt wird durch einen Bahnvektor $\mathbf{r}_S(t)$ im \mathbb{R}^3 , die Orientierung durch drei zeitabhängige Winkel beschrieben, die die Mannigfaltigkeit der $SO(3)$ aufspannen. (Nichtausgeartet heißt hier, dass nicht alle Punkte des Körpers auf einer Achse liegen. Ist dies der Fall, so spricht man von einer Hantel. Der Konfigurationsraum der Hantel ist die Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^3 \times S^2$.) Schließlich gibt es einige Spezialfälle in der Theorie des starren Körpers, die sich integrieren, und solche, die sich geometrisch lösen lassen; man lernt also noch einige weitere integrable Systeme kennen.

3.1 Definition des starren Körpers

Einen starren Körper kann man sich auf zwei Arten realisiert denken:

- A) Ein System von n Massenpunkten mit den Massen m_1, \dots, m_n , die durch *starre* Abstände verbunden sind, stellt einen starren Körper dar. Abbildung 3.1 zeigt das Beispiel $n = 4$.

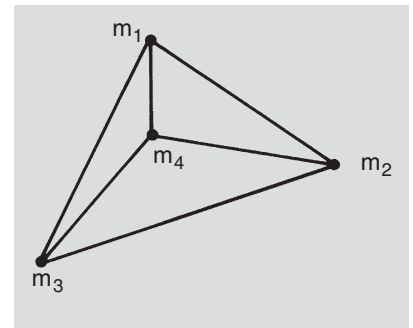


Abb. 3.1. Endlich viele Massenpunkte, deren sämtliche Abstände für alle Zeiten fest sind, bilden einen starren Körper. Das Bild zeigt das Beispiel $n = 4$

Relativistische Mechanik

Einführung

Die Mechanik, wie wir sie in den ersten drei Kapiteln kennengelernt haben, enthält zwei fundamentale Aspekte: Zum einen macht sie Gebrauch von einfachen Funktionalen wie etwa den Lagrangefunktionen, deren Eigenschaften gut zu übersehen sind. Diese stellen zwar im Allgemeinen keine direkt messbaren Größen dar, erlauben es aber, die in Form und Transformationsverhalten komplizierten Bewegungsgleichungen in einfacher Weise herzuleiten und deren besondere Symmetrien transparenter zu machen. Zum anderen setzt die bis hierher betrachtete Mechanik eine ganz spezielle Struktur der Raumzeit-Mannigfaltigkeit voraus, in der die mechanischen Bewegungen tatsächlich stattfinden: In allen bisher betrachteten Fällen haben wir als selbstverständlich vorausgesetzt, dass Bewegungsgleichungen bezüglich der allgemeinen Galilei-Transformationen (Abschn. 1.13) forminvariant sind (vgl. auch mit der Diskussion in Abschn. 1.14). Das bedeutete unter anderem, dass Lagrangefunktionen, kinetische und potentielle Energien unter solchen Transformationen invariant sein mussten.

Während das erste „Bauprinzip“, wenn man es nur genügend verallgemeinert, weit über die unrelativistische Punktmechanik hinaus trägt, hat das Prinzip der Galilei-Invarianz der physikalischen Kinematik und Dynamik nur beschränkte Gültigkeit. Die mikroskopische Mechanik des täglichen Lebens, wie sie uns beim Billardspiel, bei der Arbeit mit Flaschenzügen oder beim Fahrradfahren begegnet, ebenso wie die Himmelsmechanik werden zwar bis zu sehr hoher Genauigkeit durch die Galilei-invariante Theorie der Gravitation beschrieben. Für mikroskopische Objekte wie die Elementarteilchen gilt das aber im Allgemeinen nicht mehr, ebensowenig wie für nichtmechanische Theorien wie die Maxwell'sche Theorie der elektromagnetischen Erscheinungen. Ohne den allgemeinen, *formalen* Rahmen zu sprengen, muss man das Prinzip der Galilei-Invarianz durch das allgemeinere der Lorentz- bzw. Poincaré-Invarianz ersetzen. Während in einer hypothetischen Galilei-invarianten Welt Teilchen beliebig große Geschwindigkeiten annehmen können, tritt in den Poincaré-Transformationen die (universelle) Lichtgeschwindigkeit als obere Grenzggeschwindigkeit auf. Die Galilei-invariante Mechanik erscheint so als Grenzfall, der dann eintritt, wenn alle Geschwindigkeiten klein im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit sind.

In diesem Kapitel lernt man, warum die Lichtgeschwindigkeit eine ausgezeichnete Rolle spielt, auf welche Weise die Lorentz-Transformationen folgen und was deren wichtigste Eigenschaften sind. Aufgrund langer Erfahrung und aufgrund von vielerlei präziser experimenteller Information glauben wir, dass *jede* physikalische Theorie (lokal) Lorentz-invariant ist.¹ Mit der Speziellen Relativitätstheorie am Beispiel der Mechanik kommt man daher mit einem weiteren Grundpfeiler der Physik in Berührung, der weit über die Mechanik hinaus von grundlegender Bedeutung ist.

4.1 Schwierigkeiten der nichtrelativistischen Mechanik

Wir wollen hier an drei Beispielen zeigen, warum die Galilei-invariante Mechanik nur begrenzte Gültigkeit haben kann.

a) Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

In der experimentellen Physik lernt man, dass die Lichtgeschwindigkeit bezüglich Inertialsystemen eine universelle Naturkonstante mit dem Zahlenwert

$$c = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1} \quad (4.1)$$

ist. Unsere Überlegungen in Abschn. 1.14 zeigen deutlich, dass es in der Galilei-invarianten Mechanik keine universelle Geschwindigkeit geben kann, insbesondere auch keine höchste Geschwindigkeit. Man kann ja jeden mit Geschwindigkeit v bezüglich eines Inertialsystems \mathbf{K}_1 ablaufenden Prozess genauso gut von einem zweiten solchen System \mathbf{K}_2 aus anschauen, das sich gegenüber \mathbf{K}_1 mit der konstanten Geschwindigkeit w bewegt. Bezüglich \mathbf{K}_2 hat der Prozess dann die Geschwindigkeit

$$v' = v + w, \quad (4.2)$$

d. h. die Geschwindigkeiten addieren sich linear.

b) Teilchen ohne Masse tragen Energie und Impuls

Für ein kräftefreies Teilchen der Masse m hängen kinetische Energie und Impuls über die Beziehung

$$E = T = \frac{1}{2m} p^2 \quad (4.3)$$

zusammen. Wir kennen in der Natur elementare Teilchen, deren Masse verschwindet. Zum Beispiel ist das Photon (oder Lichtquant), der Träger der elektromagnetischen Wirkungen, ein Teilchen mit verschwindender Masse. Ein Photon trägt aber durchaus Energie und Impuls (man denke

¹Raumspiegelung \mathbf{P} und Zeitumkehr \mathbf{T} ausgenommen. Es gibt Wechselwirkungen, die unter \mathbf{P} und unter \mathbf{T} nicht invariant sind.

Geometrische Aspekte der Mechanik

Einführung

Die Mechanik trägt in vielerlei Hinsicht geometrische Züge, die an verschiedenen Stellen in den ersten vier Kapiteln deutlich hervorgetreten sind. Die Struktur des Raumzeit-Kontinuums in der nichtrelativistischen und der speziell-relativistischen Mechanik, in welches die Dynamik eingebettet ist, ist ein erstes und wichtiges Beispiel. Besonders aber die Formulierung der Lagrange'schen Mechanik sowie der kanonischen Hamilton-Jacobi'schen Mechanik auf dem Raum der verallgemeinerten Koordinaten bzw. dem Phasenraum bringt starke geometrische Züge dieser Mannigfaltigkeiten zutage. (Man denke z. B. an die symplektische Struktur des Phasenraums und den Liouville'schen Satz.) Die geometrische Natur der Mechanik wird allein schon dadurch deutlich, dass sie wesentliche Impulse für die Entwicklung der modernen Differentialgeometrie gegeben hat. Umgekehrt hat die abstrakte Ausformulierung der Differentialgeometrie (und einiger damit verwandter mathematischer Disziplinen) erst das Rüstzeug für die Behandlung moderner Probleme der qualitativen Mechanik geschaffen – ein eindrucksvolles Beispiel für die gegenseitige Befruchtung von reiner Mathematik und Theoretischer Physik.

In diesem Kapitel zeigen wir, wie die kanonische Mechanik auf ganz natürliche Weise zu einer differentialgeometrischen Beschreibungsweise überleitet. Wir entwickeln die wichtigsten elementaren Hilfsmittel der Differentialgeometrie und formulieren die Mechanik in dieser Sprache.

Aus Platzgründen kann dieses Kapitel die geometrische Formulierung der Mechanik nicht in allen Aspekten behandeln. Es bietet eine Einführung, die die Notwendigkeit der geometrischen Sprache motiviert und die Grundlagen soweit bereitstellt, dass ein relativ glatter Übergang zu den mathematischen Büchern (siehe Literaturhinweise) über Mechanik hergestellt wird. Der für den Anfänger große Abstand zwischen den mehr physikalisch formulierten Texten und der modernen mathematischen Literatur soll auf diese Weise verringert oder ganz überwunden werden. Gleichzeitig öffnet sich damit der Zugang zu den neueren Forschungsrichtungen der modernen Mechanik.

Das Studium der geometrischen Struktur der Mechanik hat über dieses Gebiet hinaus in den letzten Jahren an Bedeutung gewonnen. Wir wissen heute, dass alle fundamentalen Wechselwirkungen der

Natur ausgeprägte geometrische Strukturen tragen. Auch hier ist die Mechanik Eingangstor und Basis für die ganze Theoretische Physik: Studiert man jene geometrischen Aspekte der elementaren Wechselwirkungen, so kommt man immer wieder auf die Mechanik zurück, die viele der wesentlichen Bauprinzipien entwickelt.

5.1 Mannigfaltigkeiten von verallgemeinerten Koordinaten

Im Abschn. 2.11 wurde bewiesen, dass jede diffeomorphe Abbildung der Koordinaten $\{q\}$ auf neue Koordinaten $\{q'\}$

$$F : \{q\} \rightarrow \{q'\} : q_i = f_i(q', t), \dot{q}_i = \sum_{k=1}^f \frac{\partial f_i}{\partial q'_k} \dot{q}'_k + \frac{\partial f_i}{\partial t} \quad (5.1)$$

die Bewegungsgleichungen forminvariant lässt. Dies besagt, dass eine Auswahl eines Satzes $\{q\}$ von generalisierten Koordinaten, abgesehen von rein praktischen Gesichtspunkten, so gut ist wie jede andere, die mit der Ersten umkehrbar eindeutig und in differenzierbarer Weise verknüpft ist. Das physikalische System, das man beschreiben möchte, ist unabhängig von der speziellen Wahl, die man trifft, oder, etwas lockerer geschrieben, „die Physik ist die gleiche“, welche Koordinaten man auch verwendet. Dass die Transformation *umkehrbar eindeutig* sein muss, ist selbstverständlich, denn man darf weder in der einen noch in der anderen Richtung Information verlieren. Die Zahl der unabhängigen Freiheitsgrade muss die gleiche bleiben. Dass die Abbildung in beiden Richtungen *differenzierbar* sein soll, ist eine sinnvolle Forderung, denn die differenzierbare Struktur der Bewegungsgleichungen soll unangetastet erhalten bleiben.

Jede solche Wahl der Koordinaten gibt eine mögliche konkrete Darstellung des mechanischen Systems. Natürlich gibt es geschickte oder ungeschickte Auswahlmöglichkeiten, d. h. solche, die dem Problem optimal angepasst sind, indem sie z. B. möglichst viele zyklische Koordinaten enthalten, bzw. solche, die eine Lösung der Bewegungsgleichungen eher erschweren. Diese Bemerkung betrifft die praktische *Lösbarkeit* der Bewegungsgleichungen, nicht aber die *Struktur* der Koordinaten-Mannigfaltigkeit, in die das mechanische System eingebettet ist.

In der Mechanik entsteht ein Satz von f verallgemeinerten Koordinaten aus der Einschränkung von Freiheitsgraden, die ursprünglich – beispielsweise für ein N -Teilchen-System – im \mathbb{R}^{3N} liegen, durch $\Lambda = 3N - f$ holonome Zwangsbedingungen. Diese neuen Variablen liegen im Allgemeinen nicht mehr im \mathbb{R}^f . Wir betrachten zwei Beispiele zur Illustration:

Stabilität und Chaos

Einführung

In diesem Kapitel studieren wir eine größere Klasse von dynamischen Systemen, die über die Hamilton'schen Systeme hinausgehen. Dabei sind einerseits Systeme mit Dissipation besonders interessant, bei denen Energie durch Reibung verloren geht und bei denen Energie aus äußeren Quellen eingespeist wird, andererseits diskrete oder diskretisierte Systeme, wie sie auf natürliche Weise beim Studium von Flüssen mittels der Poincaré-Abbildung auftreten. Dissipation bedeutet immer, dass das dynamische System an andere Systeme in einer kontrollierbaren Weise gekoppelt ist. Die Stärke solcher Kopplungen erscheint in der betrachteten Dynamik in Form von Parametern, von denen die Lösungsscharen abhängen. Verändert man diese Parameter, so kann es vorkommen, dass der Fluss des Systems beim Überschreiten gewisser kritischer Werte der Parameter eine wesentliche strukturelle Änderung erfährt. Das führt ganz natürlich auf Fragen nach der Stabilität der Lösungsmannigfaltigkeit gegenüber Veränderungen der Kontrollparameter und nach dem Charakter solcher eventuell auftretenden Strukturänderungen. Dabei lernt man, dass deterministische Systeme nicht nur das wohlgeordnete und klar beschreibbare Verhalten besitzen, das wir in den integrablen Beispielen der ersten Kapitel gefunden haben, sondern dass sie auch völlig ungeordnetes, chaotisches Verhalten zeigen können. Entgegen jahrhundertalter Vorstellung und vielleicht entgegen eigener Intuition ist chaotisches Verhalten nicht auf dissipative Systeme beschränkt (Turbulenz viskoser Flüssigkeiten, Klimadynamik, etc.). Auch rein Hamilton'sche Systeme der Himmelsmechanik haben Bereiche, in denen die Bewegungen chaotischen Charakter haben.

6.1 Qualitative Dynamik

In den früheren Kapiteln haben wir uns überwiegend mit den grundlegenden Eigenschaften mechanischer Systeme, mit Prinzipien, die zur Aufstellung ihrer Bewegungsgleichungen führen, und mit Lösungsverfahren für diese Gleichungen beschäftigt. Die integrablen Fälle hatten dabei eine besonders wichtige Bedeutung, an die wir hier nur mit zwei Argumenten erinnern: Sie ermöglichen es, spezifische Bahnkurven analytisch zu verfolgen und insbesondere die Tragweite und Bedeutung von

Kontinuierliche Systeme

Einführung

Die mechanischen Systeme, die wir bisher diskutiert haben, zeichnen sich dadurch aus, dass die Zahl ihrer Freiheitsgrade *endlich* und daher abzählbar ist. Die Mechanik deformierbarer, makroskopischer Medien verlässt diesen Rahmen, weil man die Reaktion eines Festkörpers auf äußere Kräfte, das Strömungsverhalten einer Flüssigkeit in einem Kraftfeld, oder die Dynamik von Gasen nicht mehr mit endlich vielen Variablen beschreiben kann. An die Stelle der Koordinaten- und Impuls-artigen Variablen treten Feldgrößen, d. h. Funktionen oder Felder, die über dem Raum und der Zeit definiert sind und die die Dynamik des betrachteten Systems beschreiben. Die Kontinuumsmechanik ist ein eigenes, sehr umfangreiches Gebiet der klassischen Physik, das über den Rahmen dieses Buches hinausgeht. (Eine gute Einführung findet man z. B. bei Honerkamp, Römer, 1993). In diesem kurzen Kapitel zum Ausklang beschränken wir uns daher darauf, den wichtigen Feldbegriff und die Verallgemeinerung der Prinzipien der kanonischen Mechanik für kontinuierliche Systeme einzuführen und durch Beispiele zu illustrieren. Gleichzeitig wird damit eine erste Grundlage für die Elektrodynamik bereitgestellt, die eine typische und besonders wichtige Feldtheorie ist.

7.1 Diskrete und kontinuierliche Systeme

Wir haben schon mehrfach auf die Unsymmetrie zwischen der Zeitvariablen einerseits und den Raumvariablen andererseits hingewiesen, die für die nichtrelativistische Physik charakteristisch ist, vgl. Abschn. 1.6 und 4.7. In einer Galilei-invarianten Welt hat die Zeit absoluten Charakter, der Raum dagegen nicht. In der Mechanik von Massenpunkten und von starren Körpern gibt es noch eine andere Unsymmetrie, auf die wir ebenfalls in Abschn. 1.6 hingewiesen haben: Die Zeit spielt die Rolle eines *Parameters*, während der Ort $\mathbf{r}(t)$ eines Teilchens, bzw. die Koordinaten $\{\mathbf{r}_s(t), \vartheta_i(t)\}$ eines starren Körpers, oder, noch allgemeiner, der Fluss $\Phi(t, t_0, x_0)$ im Phasenraum, die eigentlichen *dynamischen Variablen* sind, für die man die mechanischen Bewegungsgleichungen aufstellt. Bildlich gesprochen ist Φ die „geometrische Kurve“, t der Kurvenparameter (die Bogenlänge), der angibt, in welcher Weise die Kurve durchlaufen wird.