

Vorwort

Dies ist der erste Band einer Lehrbuchreihe „Theoretische Physik 1–4“. Die Reihe basiert auf Notizen zu einem langjährig erprobten Vorlesungszyklus „Theoretische Physik 1–6“, der an der Goethe-Universität, Frankfurt am Main, angeboten wurde.

Der erste Band beschäftigt sich mit der Theoretischen Mechanik. Die Mechanik ist aus zwei Gründen eine der Grundlagen der Physik. Sie fasst den unmittelbar zugänglichen Erfahrungsbereich zusammen und bereitet somit die Grundbegriffe der Physik auf. Sie ist das Teilgebiet der Physik, das aus historischer Sicht als erstes entwickelt und (auf hohem Niveau) abgeschlossen wurde. Die Anfänge im 16. und 17. Jahrhundert sind zum einen durch eine mehr systematische Erfassung von Beobachtungsdaten, zum anderen durch die Zielsetzung, allgemeine Prinzipien der Natur aufzudecken, geprägt. Für die erste Aussage kann man die astronomischen Beobachtungen von T. de Brahe und J. Kepler, für die zweite die Schriften von G. Galilei und I. Newton zitieren. Die dann einsetzende Aufbereitung von mathematischen Methoden, wie der Infinitesimal- und der Variationsrechnung (vor allem durch die Brüder Bernoulli, G. Leibniz und L. Euler) ebnete den Weg für eine schnelle Weiterentwicklung und Formalisierung der Mechanik. Gegen Ende des 18. und zu Anfang des 19. Jahrhunderts wurde diese Entwicklung mit den Arbeiten von J. d’Alembert, J. Comte de Lagrange und Sir W.R. Hamilton abgeschlossen.

Zu der Organisation des ersten Bandes (und cum grano salis der weiteren Bände) ist das Folgende zu bemerken. Eine enge Verzahnung von mathematischen und physikalischen Grundlagen ist eine essentielle Voraussetzung für einen erfolgreichen Lernprozess in der theoretischen Physik. Dieses Credo wurde in dem Vorlesungszyklus durchgehend umgesetzt. In der Buchform schien es jedoch angemessener, den Mathematikteil abzutrennen. Eine ca. 270 Seiten starke „Mathematische Ergänzung“, aufbereitet für Studierende der Physik, ist auf der beiliegenden CD-ROM zu finden. An allen relevanten Stellen des Buchtextes wird auf die entsprechenden Kapitel und Abschnitte dieser Ergänzungen hingewiesen.

Die Theorievorlesungen an der Goethe-Universität setzen mit dem ersten Semester ein. Dies erfordert einen eher adiabatischen Übergang zu der „höheren Mechanik“. Der daraus resultierende, etwas sanftere Einstieg in die eigentliche Theoretische Mechanik wurde aus didaktischen Gründen bewusst beibe-

halten. So enthält das zweite Kapitel, nach einer allgemeinen Einführung in die Physik in Kapitel 1, eine Vorstufe zur Theoretischen Mechanik. Auch die Diskussion der Erhaltungssätze im dritten Kapitel wird zunächst in elementarer Weise geführt, dann aber mit den Mitteln der Vektoranalysis abgerundet. Ab dem vierten Kapitel ist die Darstellung bezüglich der mathematischen Hilfsmittel kompromissloser. Auf der anderen Seite wird ein allgegenwärtiges, mathematisches Hilfsmittel der Physik, Differentialgleichungen, schon in dem zweiten Kapitel eingeführt und betont benutzt.

Die CD-ROM  enthält 70 Aufgaben zu den Kapiteln 2–6, die unter Verwendung der erweiterten Möglichkeiten des elektronischen Mediums in anderer Weise gestaltet worden sind. Für jede der Aufgaben steht neben der Lösung eine Liste von strukturierten, einzeln zu beantwortenden (und direkt oder nach Aufruf beantworteten) Fragen zur Verfügung, die eine enge Führung zur Lösung der Problemstellung erlaubt. Das elektronische Medium ermöglicht auch eine lebendigere Form der Illustration so zum Beispiel die Animation von Bewegungsabläufen oder die dreidimensionale Darstellung von Funktionen im Raum.

Wir danken Margaret D. sowie Hans Jürgen und Melanie L. für Verständnis und Geduld während der Arbeit an diesem Buchprojekt. Hans Jürgen stand stets für Diskussionen zur Verfügung, Margaret hat uns die Bilder für die ‚buttons‘ in der Aufgabensammlung überlassen und Melanie hat den Apfel (mit Anklang an Newton’s nicht nachweisbares Experiment) gemalt. Wir danken den Kontaktpersonen des Springer Verlags für freundliche und vertrauensvolle Zusammenarbeit, insbesondere Frau J. Lenz für die technische Unterstützung.

Frankfurt am Main, im Oktober 2002

*Reiner M. Dreizler
Cora S. Lüdde*

3.1.2 Träge und schwere Massen

Zur Präzisierung des **Massenbegriffes** kann man den folgenden Gedankenversuch durchführen: Beschleunige zwei Massen m_1 und m_2 jeweils mit der gleichen Kraft F . Es spielt keine Rolle, dass man die Kräfte noch nicht quantitativ charakterisieren kann. Es kommt nur darauf an, dass die Kräfte in den beiden ‚Experimenten‘ gleich sind. Im Vertrauen auf Newton kann man in diesem Fall für eine lineare Bewegung schreiben

$$F = m_1 a_1 = m_2 a_2, \quad \text{so dass folgt} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}.$$

Die jeweilige Beschleunigung kann gemessen werden (z.B. über $x_i(t)$). Die Messung der Beschleunigungen ergibt dann das Massenverhältnis. Um die Massenangabe absolut zu machen, benötigt man eine Standardmasse. Diese wurde durch internationale Konvention festgelegt. Es ist die Masse 1 kg, die in Sèvres bei Paris aufbewahrt wird. Mit der Festlegung einer Standardmasse ergibt das zweite Axiom ein dynamisches Verfahren zur quantitativen Massenbestimmung. Je massiver ein Objekt ist, desto kleiner ist bei einer vorgegebenen Kraft seine Beschleunigung. Die Masse ist ein Maß für den Widerstand des Körpers (Massenpunktes) gegen Bewegungsänderungen. Die mit diesem Verfahren bestimmte Masse hat einen eigenen Namen: Man bezeichnet sie als **träge** Masse.

Hat man eine Standardmasse eingeführt, so erhält man mit dem zweiten Axiom eine Maßeinheit für die Stärke der **Kraft**. Im MKS-System ist die Kraft, die eine Masse von 1 kg mit 1 m/s^2 beschleunigt, 1 Newton (N)

$$1 \text{ N} = 1 \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}.$$

Im CGS-System ist die Krafteinheit dyn

$$1 \text{ dyn} = 1 \frac{\text{g cm}}{\text{s}^2}.$$

Der Umrechnungsfaktor ist $1 \text{ N} = 10^5 \text{ dyn}$.

Es ist notwendig, den Begriff ‚träge Masse‘ etwas genauer zu diskutieren. Im täglichen Leben werden Massen in den allerwenigsten Fällen mit der anvisierten dynamischen Methode bestimmt. Gewöhnlich legt man Objekte auf eine Waage (Abb. 3.2a). Man vergleicht damit die Gravitationskräfte, die die Erde auf Objekt und Gewicht ausübt. Für die Gravitationswirkung zwischen zwei Massenpunkten m_1^* und m_2^* im Abstand r wurde von Newton die folgende Gleichung angegeben

$$F = \gamma \frac{m_1^* m_2^*}{r^2}. \quad (3.2)$$

Die Stärke der Wechselwirkung wird durch die allgemeine Gravitationskonstante γ bestimmt. Die Gravitation wird in (Kap. 3.2.4) noch ausführlicher besprochen. Für den Moment genügt die Aussage: Obwohl die Objekte, die

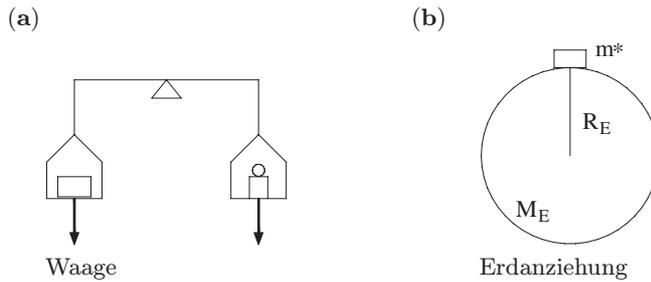


Abb. 3.2. Illustration des Begriffs der schweren Masse

man wiegt, und die Erde keine Massenpunkte sind, kann man diese Formel für die Angabe des Gewichtes G benutzen. An der Erdoberfläche gilt (Abb. 3.2b)

$$G = m^* \left[\frac{M_E^* \gamma}{R_E^2} \right] = m^* g. \quad (3.3)$$

In dieser Gleichung sind die Gravitationskonstante γ und die Gravitationsbeschleunigung g , die schon in Kap. 2.1 angesprochen wurde, über die Erdmasse M_E^* und den Erdradius R_E (ideale Kugelgestalt vorausgesetzt) verknüpft. Zu beachten ist: Das Gewicht eines Objektes ist die Kraft, die die Erde auf ein Objekt mit der Masse m^* ausübt.

Es besteht nun kein logisch zwingender Zusammenhang, dass die Masse m^* , die in die Formel für die Gravitationswirkung eingeht, mit der Masse m , die den Widerstand gegen Bewegungsänderungen misst, identisch ist. Man nennt aus diesem Grund die Masse in dem Gravitationsgesetz vorsichtshalber die **schwere Masse** (zur Unterscheidung charakterisiert durch m^*). Die Bewegungsgleichung für den freien Fall in der Nähe der Erdoberfläche ist dann

$$m\mathbf{a} = m^* \mathbf{g}$$

oder als Differentialgleichung

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{m^*}{m} \mathbf{g}.$$

Seit 1915 (dem Datum der Formulierung der allgemeinen Relativitätstheorie durch A. Einstein) hat man versucht, herauszufinden, ob ein Unterschied zwischen den beiden Massen besteht. Zur Zeit ist die Aussage

$$m = m^*$$

mit einer Messgenauigkeit von $\Delta m/m = (m - m^*)/m \approx 10^{-10}$. Diese Messgenauigkeit entspricht 10^{-8} Prozent.

Man mag sich wundern, warum man solche Anstrengungen in Bezug auf eine anscheinende Haarspalterei unternimmt. Der Grund ist die Frage nach der Gültigkeit der allgemeinen Relativitätstheorie. Es ist nicht opportun, die Grundzüge der allgemeinen Relativitätstheorie an dieser Stelle auszubreiten. Zur Klärung der implizierten Frage genügt es, anhand eines hypothetischen

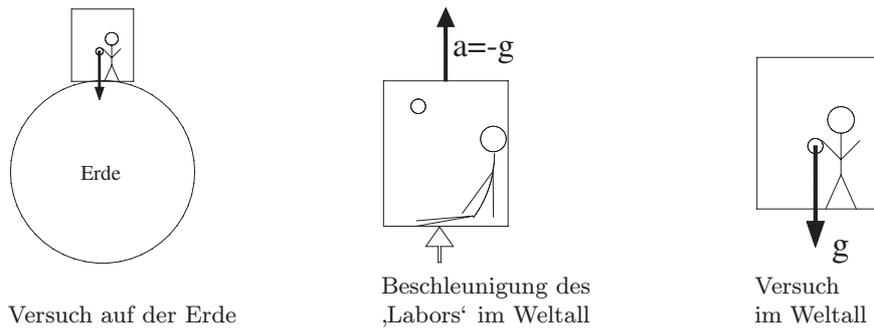


Abb. 3.3. Zum Unterschied von schwerer und träger Masse

Experimentes (siehe Abb. 3.3) zu schildern, worauf es ankommt: Das ‚Labor‘ ist eine großer, geschlossener Behälter, in dem ein Objekt (Massenpunkt) und ein Physiker eingeschlossen sind. Das ‚Labor‘ ruht zunächst auf der Erde. Der Physiker wiegt das Objekt und notiert

$$G = m^* g .$$

Während der Physiker nach getaner Arbeit schläft, wird das ‚Labor‘ in das Weltall gebracht und zwar an eine Stelle, an der Gravitationswirkungen vernachlässigbar sind. Man beschleunigt nun das ‚Labor‘ (samt Inhalt) nichtgravitativ mit einer konstanten Beschleunigung $\mathbf{a} = -\mathbf{g}$. Der schlafende Physiker und das Objekt schweben in dem All zunächst in dem Behälter. Nachdem die nichtgravitative Beschleunigung eingesetzt hat, treffen beide auf eine Seite des ‚Labors‘ auf und werden mit diesem beschleunigt. Die letzten Aussagen beschreiben die Situation aus der Sicht eines außenstehenden Beobachters. Für den Physiker (der in der Zwischenzeit wieder aufgewacht ist) sieht die Situation folgendermaßen aus: Er spürt eine Scheinbeschleunigung $\mathbf{a}' = +\mathbf{g}$, die ihn wie die anfängliche Gravitation am Boden der Kiste hält. Wenn er sein Objekt noch einmal ‚wiegt‘ würde er in diesem Falle feststellen

$$G' = mg .$$

Er bestimmt (auch wenn er es nicht weiß) die träge Masse. Wenn beide Massen verschieden sind ($m \neq m^*$), ist er in der Lage, durch Vergleich der Resultate seiner Messungen ($G \neq G'$) die beiden Situationen (Position auf der Erde in Ruhe mit Gravitationswirkung, Position im Weltall mit nichtgravitativer Beschleunigung) zu unterscheiden. Das ist, nach Einstein, jedoch nicht möglich. Die allgemeine Relativitätstheorie basiert auf dem Postulat: Es besteht prinzipiell kein Unterschied zwischen Beschleunigungen aufgrund von Gravitationswirkungen und einer entsprechenden Beschleunigung aufgrund anderer Einwirkungen. Diese Theorie steht oder fällt mit der Aussage

$$m^* = m ,$$

die im Weiteren benutzt werden soll.

3.1.3 Die Axiome

Mit diesen Bemerkungen ist die eigentliche Diskussion der drei Axiome vorbereitet. Die Axiome lauten:

Axiom 1:	Ein Massenpunkt ist in Ruhe oder bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit, wenn keine Kraft auf ihn einwirkt.
Axiom 2:	<p>Wenn eine Kraft auf einen Massenpunkt einwirkt, so gilt</p> $\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F} \xrightarrow{\dot{m}=0} m\mathbf{a} = \mathbf{F} . \quad (3.4)$ <p>Dies ist eine Variante gegenüber der zunächst angeführten einfachen Form, $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$, die im Falle von zeitlich konstanten Massen gültig ist. Die jetzige Formulierung deckt auch Situationen mit zeitlich veränderlichen Massen ab.</p>
Axiom 3:	<p>Übt ein Massenpunkt m_1 auf einen Massenpunkt m_2 eine Kraft \mathbf{F}_{12} aus, dann übt auch der Massenpunkt m_2 auf m_1 eine Kraft \mathbf{F}_{21} aus und es gilt</p> $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} . \quad (3.5)$ <p>Die beiden Kräfte haben die gleiche Größe und die entgegengesetzte Richtung.</p>

Die kompakte Formulierung der drei Axiome verlangt einen deutlich längeren Kommentar. Zu dem ersten Axiom ist das Folgende zu bemerken.

3.1.4 Zum ersten Axiom, Inertialsysteme

Dieses Axiom bezeichnet man auch als das Trägheitsprinzip. Es wurde schon von G. Galilei in ähnlicher Weise formuliert. Auf den ersten Blick erscheint es überflüssig, denn aus dem zweiten Axiom folgt für $\mathbf{F} = 0$

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = 0 \longrightarrow m\mathbf{v} = \mathbf{const} .$$

Die gesonderte Auflistung hat jedoch durchaus einen Sinn. Das Axiom bringt zum Ausdruck, dass Bewegungsgesetze nur eine Bedeutung haben, wenn man sie auf ein geeignetes Bezugssystem bezieht. Das Axiom stellt den Zustand der Ruhe und den der uniformen Bewegung gleich. Wenn man also die Beschreibung eines Bewegungsablaufes aus der Sicht von zwei Bezugssystemen vergleicht, die sich mit konstanter Geschwindigkeit gegeneinander bewegen, so ist die Beschreibung gleichwertig.

Im Detail sieht die entsprechende Überlegung folgendermaßen aus. Zwei Koordinatensysteme S_1 und S_2 bewegen sich gleichförmig gegeneinander. Die Position des Ursprungs von System S_2 aus der Sicht von S_1 ist (Abb. 3.4a)

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{r}_{\text{rel}} + \mathbf{v}_{\text{rel}}t . \quad (3.6)$$

4.2.1 Das mathematische Pendel

Ein mathematisches Pendel besteht aus einer fiktiven Stange der Länge l , die sich um einen Aufhängepunkt drehen kann und an deren Ende sich ein Massenpunkt m befindet. Fiktiv bedeutet: Die Stange ist gewichtslos und absolut starr. An dem Massenpunkt greifen die folgenden Kräfte an (Abb. 4.14a)

- (i) die Schwerkraft $m\mathbf{g}$.
- (ii) Die (zunächst unbekannte) Führungskraft der Stange \mathbf{S} .

Falls man die Anfangsbedingungen geeignet wählt, führt das Pendel eine ebene Bewegung aus (bei beliebigen Anfangsbedingungen hat man ein sphärisches Pendel, siehe Kap. 5.3.2). Für die Diskussion der ebenen Bewegung benutzt man Polarkoordinaten (Abb. 4.14b). Die Zerlegung der angreifenden Kräfte in Radial- und Winkelanteil ist (Abb. 4.14c)

$$F_r = -S + mg \cos \varphi \quad F_\varphi = -mg \sin \varphi, \quad (4.32)$$

die entsprechende Zerlegung des Beschleunigungsvektors (siehe (2.60))

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \quad a_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}.$$

Für eine starre Stange ist $r = l$ und $\dot{r} = \ddot{r} = 0$. Die Komponentenzerlegung der vektoriellen Bewegungsgleichung $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}$ ergibt somit

$$\begin{aligned} \text{Azimutalanteil:} \quad & ml\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi \\ \text{Radialanteil:} \quad & -ml\dot{\varphi}^2 = -S + mg \cos \varphi. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Die zeitliche Änderung des Winkels mit der Anfangsbedingung $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = \omega_0$ wird alleine durch die erste Differentialgleichung bestimmt. Ist die Lösung dieser Differentialgleichung bekannt, so kann man aus der zweiten Gleichung die Führungskraft

$$S(t) = ml\dot{\varphi}^2 + mg \cos \varphi$$

berechnen. Es gilt offensichtlich *nicht* $S(t) = mg \cos \varphi$, wie man anhand einer statischen Betrachtung erwarten würde.

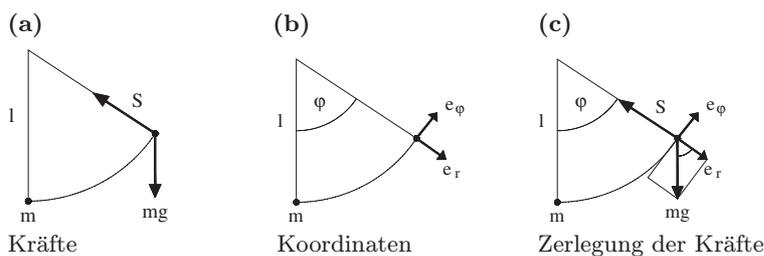


Abb. 4.14. Mathematisches Pendel

4.2.1.1 Lösung der Pendelgleichung. Die Pendelgleichung in (4.33)

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0 \quad (4.34)$$

hat nicht die Form der Differentialgleichung des harmonischen Oszillators. Nur für kleine Ausschläge gilt die harmonische Näherung

$$\sin \varphi \approx \varphi$$

mit der Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0$$

und der allgemeinen Lösung

$$\varphi(t) = \alpha \sin(\omega t + \beta) .$$

Die Schwingungsdauer des mathematischen Pendels ergibt sich bei genügend kleinen Ausschlägen aus der Kreisfrequenz $\omega = \sqrt{g/l}$ zu

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} . \quad (4.35)$$

Diese Schwingungsdauer hängt nur von der Pendellänge und der Konstanten g ab und nicht von der Größe der (kleinen) anfänglichen Auslenkung. Man sagt: Pendel gleicher Länge sind bei kleinen Ausschlägen (nahezu) isochron. Die Hersteller von Pendeluhrern nutzen diese Tatsache.

Für die Lösung der vollständigen Pendelgleichung (4.34) mit der Form $\ddot{\varphi} = F(\varphi)$ ist die Substitution

$$\dot{\varphi} = \gamma \quad \ddot{\varphi} = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \gamma \frac{d\gamma}{d\varphi}$$

zuständig (siehe Math.Kap. 2.2.1). Damit ergibt sich

$$\gamma \frac{d\gamma}{d\varphi} = -\omega^2 \sin \varphi$$

und nach Integration mittels Variablentrennung (die Substitution wurde rückgängig gemacht)

$$\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2(t) - \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2(0) = \omega^2 (\cos \varphi(t) - \cos \varphi(0)) . \quad (4.36)$$

Dieses Ergebnis ist (bis auf einen Faktor ml^2) der Energiesatz. Da \mathbf{S} zu jedem Zeitpunkt senkrecht zu der momentanen Verschiebung $d\mathbf{r}$ ist, trägt die Führungskraft nicht zu der Energiebilanz bei. Man hätte somit direkt mit dem Energiesatz

$$\frac{m}{2} v^2 + mgh = E_0$$

beginnen und die Geometrie des Problems an dieser Stelle einführen können.

Der weitere Lösungsprozess soll für die speziellen Anfangsbedingungen

$$t = 0 \quad \varphi(0) = 0 \quad \dot{\varphi}(0) = \omega_0$$

durchgeführt werden. Das Pendel befindet sich zu der Zeit $t = 0$ in dem tiefsten Punkt und hat die Winkelgeschwindigkeit ω_0 . Bezüglich der anfänglichen Winkelgeschwindigkeit muss man zwei Möglichkeiten unterscheiden.

- (1) ω_0 ist so groß, dass das Pendel überschlägt und im Weiteren eine Drehung um den Aufhängepunkt ausführt. In diesem Falle ist im zweiten Integrationsschritt die Differentialgleichung

$$\dot{\varphi} = \pm [2\omega^2(\cos \varphi - 1) + \omega_0^2]^{1/2}$$

zu lösen. Die Vorzeichen beschreiben eine Drehung im oder gegen den Uhrzeigersinn (siehe ☉ Aufg. 4.12).

- (2) ω_0 ist klein genug, so dass das Pendel nur einen Maximalausschlag φ_m ($0 \leq \varphi_m \leq \pi$) erreicht. Für den Umkehrpunkt mit $\dot{\varphi} = 0$ folgt aus dem Energiesatz (4.36)

$$-\omega_0^2 = 2\omega^2(\cos \varphi_m - 1).$$

Diese Aussage kann man verwenden, um ω_0 aus der Differentialgleichung (4.36) zu eliminieren

$$\dot{\varphi} = \pm \sqrt{2}\omega [\cos \varphi - \cos \varphi_m]^{1/2}. \quad (4.37)$$

Mittels der Vorzeichen in dieser Gleichung kann man den Wechsel in der Bewegungsrichtung beschreiben. Ist für die erste Schwingungsphase ($0 \leq \varphi \leq \varphi_m$) die Winkelgeschwindigkeit positiv ($\dot{\varphi} \geq 0$), so gilt das positive Vorzeichen. In der nächsten Schwingungsphase ($\varphi_m \geq \varphi \geq -\varphi_m$) ist für die rückschwingende Masse das negative Vorzeichen zu benutzen, für die letzte Phase einer vollen Schwingung wieder das positive Vorzeichen.

Nur die zweite Situation soll im Detail diskutiert werden⁶. Die Bewegung des Pendels ist in diesem Fall periodisch (aber nicht harmonisch). Man erhält mittels Variablentrennung für die vier Schwingungsphasen

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau_1} dt &= \frac{1}{\sqrt{2}\omega} \int_0^{\varphi_m} \frac{d\varphi'}{[\cos \varphi' - \cos \varphi_m]^{1/2}} \\ \int_{\tau_1}^{\tau_2} dt &= -\frac{1}{\sqrt{2}\omega} \int_{\varphi_m}^0 \frac{d\varphi'}{[\cos \varphi' - \cos \varphi_m]^{1/2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\omega} \int_0^{\varphi_m} \frac{d\varphi'}{[\cos \varphi' - \cos \varphi_m]^{1/2}} \end{aligned}$$

⁶ Eine zusätzliche Diskussion des mathematischen Pendels findet man unter der Überschrift ‚Ein Blick in den Phasenraum‘ in Kap. 5.4.3.

$$\begin{aligned} \int_{\tau_2}^{\tau_3} dt &= -\frac{1}{\sqrt{2}\omega} \int_0^{-\varphi_m} \frac{d\varphi'}{[\cos \varphi' - \cos \varphi_m]^{1/2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\omega} \int_0^{\varphi_m} \frac{d\varphi'}{[\cos \varphi' - \cos \varphi_m]^{1/2}} \\ \int_{\tau_3}^{\tau_4} dt &= \frac{1}{\sqrt{2}\omega} \int_{-\varphi_m}^0 \frac{d\varphi'}{[\cos \varphi' - \cos \varphi_m]^{1/2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}\omega} \int_0^{\varphi_m} \frac{d\varphi'}{[\cos \varphi' - \cos \varphi_m]^{1/2}} . \end{aligned}$$

Die Schwingungsdauer für jede der vier Phasen ist gleich

$$\tau_1 = \tau_2 - \tau_1 = \tau_3 - \tau_2 = \tau_4 - \tau_3 .$$

Für die Integration bis zu einem Zeitpunkt $t \leq \tau_1$ gilt

$$\omega t = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi'}{[\cos \varphi' - \cos \varphi_m]^{1/2}} \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_m \leq \pi . \quad (4.38)$$

Das Integral auf der rechten Seite lässt sich nicht elementar auswerten. Es ist ein **unvollständiges elliptisches Integral erster Art** (Math.Kap. 4.3.4). Eine Normalform dieser speziellen Funktion erhält man mit der folgenden Substitution

1. Benutze $\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2(\varphi/2)$ und setze $k = \sin(\varphi_m/2)$. Es folgt

$$\cos \varphi - \cos \varphi_m = 2(k^2 - \sin^2(\varphi/2)) .$$

2. Substituiere $\sin(\varphi/2) = k \sin s$. Es entspricht dann

$$\varphi = 0 \rightarrow s = 0 , \quad \varphi = \varphi_m \rightarrow s = \pi/2 .$$

Die Details der Substitution sind

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cos(\varphi/2) d\varphi &= k \cos s ds \\ d\varphi &= \frac{2k \cos s}{[1 - k^2 \sin^2 s]^{1/2}} ds . \end{aligned}$$

Für den Integranden gilt

$$\frac{1}{[\cos \varphi - \cos \varphi_m]^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{[k^2 - k^2 \sin^2 s]^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2} k \cos s} .$$

Setzt man diese Zutaten zusammen, so findet man

$$\omega t = \int_0^s \frac{ds'}{[1 - k^2 \sin^2 s']^{1/2}} \equiv F(s, k) . \quad (4.39)$$

4.2.1.2 Diskussion des Pendelproblems. Für das elliptische Integral $F(s, k)$ existieren Wertetabellen. Eine graphische Darstellung der Funktion F in Abhängigkeit von der Variablen s in dem Bereich $0 \leq s \leq \pi/2$ und dem Parameter $\varphi_m = 2 \arcsin k$ zeigt die Abb. 4.15. Die verschiedenen Kurven entsprechen den Werten $\varphi_m = 0^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 180^\circ$, beginnend mit der untersten Kurve für $\varphi_m = 0^\circ$. Umkehrung dieser numerischen Resultate ergibt mit (4.39) letztlich $\varphi(t)$ für vorgegebene Werte von φ_m .

Die Zeit für die Dauer einer gesamten Schwingung T berechnet sich infolge der Periodizität der Viertelschwingungen zu

$$T = \frac{4}{\omega} \int_0^{\pi/2} \frac{ds'}{[1 - k^2 \sin^2 s']^{1/2}} = \frac{4}{\omega} F(\pi/2, k). \quad (4.40)$$

Das Integral mit der oberen Grenze $\pi/2$, das hier auftritt, bezeichnet man als **vollständiges** elliptisches Integral. Seine Werte sind in der Abb. 4.15 für $s = \pi/2$ abzulesen. Für den etwas extremen Grenzfall $k = 0$, der $\varphi_m = 0$ entspricht, ist

$$F(\pi/2, 0) = \int_0^{\pi/2} ds' = \frac{\pi}{2}.$$

Damit erhält man $T = 2\pi/\omega$, die Schwingungsdauer in der harmonischen Näherung (4.35).

Da sich die Funktion $F(\pi/2, k)$ für kleine Werte von k (also für kleine Maximalausschläge) nur langsam mit k ändert, ist diese Näherung (wie die kleine Tabelle 4.2 zeigt) für einen relativ großen Bereich von Maximalausschlägen akzeptabel. Infolge dieser schwachen Abhängigkeit von der Variablen k kann das elliptische Integral in guter Näherung mit Hilfe einer Reihenentwicklung ausgewertet werden. Die binomische Reihe

$$[1 - x]^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots$$

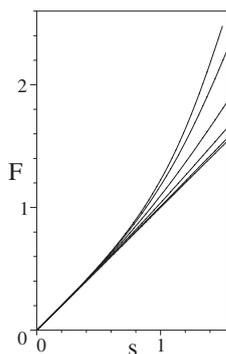


Abb. 4.15. Das elliptische Integral $F(s, \varphi_m)$

Tabelle 4.2. Variation des vollständigen elliptischen Integrals $F(\pi/2, k)$ mit dem Maximalausschlag $k = \sin \varphi_m/2$

φ_m	0°	20°	40°	60°	90°
$F(\pi/2, k)$	1.571	1.583	1.620	1.686	1.854

entspricht in dem vorliegenden Fall

$$[1 - k^2 \sin^2 s']^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}k^2 \sin^2 s' + \frac{3}{8}k^4 \sin^4 s' + \dots$$

Integriert man Term für Term, so benötigt man die Einzelintegrale

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} s' ds' = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \pi}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \frac{\pi}{2} \quad n \geq 1, \quad (4.41)$$

die in elementarer Weise rekursiv berechnet werden können (\odot D.tail 4.2). Die Entwicklung für die Schwingungsdauer bis zu der vierten Potenz in k ist somit

$$T = T_{O(k^4)} + \dots \quad T_{O(k^4)} = \frac{2\pi}{\omega} \left[1 + \frac{k^2}{4} + \frac{9}{64}k^4 \right]. \quad (4.42)$$

Die Schwingungsdauer hängt von dem Maximalausschlag ab. Das mathematische Pendel ist nicht isochron. Eine Vorstellung von der Größenordnung der Korrektur und von der Güte der Näherungsformel bis zu Termen mit k^4 gibt die folgende Tabelle 4.3. Bei einem Maximalausschlag von 90° ist die Abweichung von dem harmonischen Grenzfall 18%, die Näherungsformel ist auf 1.7 % genau. Die Korrektur zu der harmonischen Näherung findet Anwendung bei der Konstruktion mechanischer Uhren mit hoher Präzession (den alten astronomischen Uhren) und bei Präzessionsmessungen der Erdbeschleunigung g .

Der Grenzfall $k = 1 \rightarrow \varphi_m = \pi$ ist ebenfalls von Interesse. Man findet

$$F(\pi/2, 1) = \int_0^{\pi/2} \frac{ds'}{\cos s'} \rightarrow \infty.$$

Tabelle 4.3. Vergleich der exakten Schwingungsdauer des mathematischen Pendels mit der Näherung bis zur vierten Ordnung

φ_m	0°	20°	40°	60°	90°
$k = \sin \varphi_m/2$	0	0.174	0.342	0.500	0.707
$T_{O(k^4)}$	1	1.0077	1.0312	1.0713	1.1602
T_{exakt}	1	1.0077	1.0313	1.0732	1.1803

Wenn das Pendel so angestoßen wird, dass es gerade in die aufrechte Lage schwingt, dauert der Prozess unendlich lange. Die entsprechende anfängliche Winkelgeschwindigkeit ist $\omega_0 = \pm 2\omega = \pm 2\sqrt{g/l}$.

Es bleibt noch die Frage nach der zeitlichen Variation der Führungskraft, die durch die radiale Bewegungsgleichung in (4.33) bestimmt wird

$$S(t) = mg \cos \varphi(t) + ml\dot{\varphi}^2(t).$$

Um den Massenpunkt auf dem Kreisbogen zu halten, ist eine recht komplizierte Führungskraft notwendig. Benutzt man den Energiesatz (4.36)

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{2g}{l}(\cos \varphi - \cos \varphi_m),$$

so ergibt sich für die Führungskraft als Funktion des Ausschlages

$$S = mg(3 \cos \varphi - 2 \cos \varphi_m). \quad (4.43)$$

Die Funktion $S(\varphi)$ ist für $\varphi_m = 60^\circ$ in Abb. 4.16 dargestellt. Ist $\varphi_m \leq 90^\circ$, so ist dieser Ausdruck immer positiv. Dies bedeutet, dass die Masse durch die Führungskraft nach innen gezogen wird. Ersetzt man die fiktive Stange durch einen festen Faden (man spricht dann von einem Fadenpendel), so ergibt sich der gleiche Bewegungsablauf. Ist $\varphi_m > 90^\circ$, so nimmt S auch negative Werte an. Die Abb. 4.17a zeigt die Funktion $S(\varphi)$ für $\varphi_m = 180^\circ$. Bei Auslenkungen, die größer als 132° ($\cos \varphi = -2/3$) sind, ist S negativ. Für solche Winkel muss man die Masse nach außen ziehen, um sie auf der Kreisbahn zu halten. Ein Fadenpendel würde bei diesen Winkeln einschlagen (Abb. 4.17b).

Weitere Pendeltypen (bzw. Schwingungsformen) können diskutiert werden, wie zum Beispiel:

1. Das sphärische oder Kugelpendel: ein mathematisches Pendel mit allgemeinen Anfangsbedingungen, so dass die Schwingung nicht auf eine Ebene beschränkt ist (siehe Kap. 5.3.2).
2. Pendel mit speziellen Führungskurven, wie das Zykloidenpendel, das für beliebige Maximalausschläge isochron schwingt (☉ Aufg. 4.13).
3. Das physikalische Pendel: die Drehbewegung eines starren Körpers um eine beliebige Achse (siehe Kap. 6.3.7).

Einige dieser Beispiele werden nach der Aufbereitung der Lagrangeformulierung (Kap. 5) der Mechanik betrachtet.

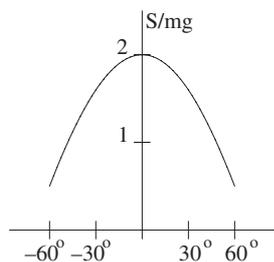


Abb. 4.16. Variation der Führungskraft mit der Auslenkung für $\varphi_m = 60^\circ$

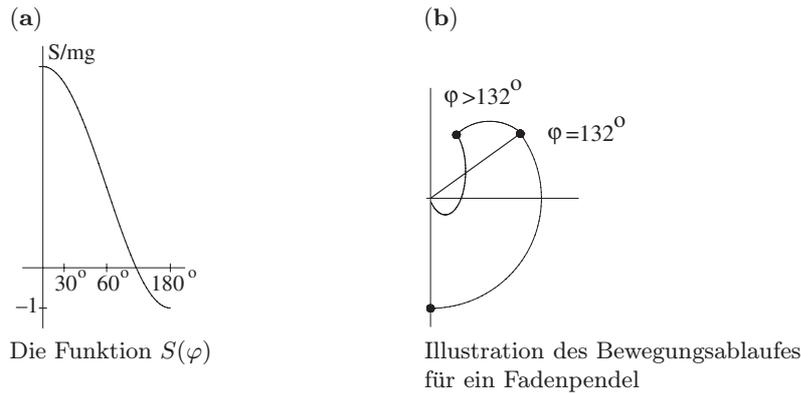


Abb. 4.17. Variation der Führungskraft mit der Auslenkung für $\varphi_m = 180^\circ$

Eine direktere Variante des (eindimensionalen) harmonischen Oszillatorproblems mit einigen Anwendungen in der Messtechnik ist der gedämpfte harmonische Oszillator.

4.2.2 Der gedämpfte harmonische Oszillator

Die eindimensionale Bewegungsgleichung, die hier zur Diskussion steht, lautet

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0. \quad (4.44)$$

Der zweite Term ist die Reibungskraft nach Stokes ($F_S = -b\dot{x}$), der dritte Term die Rückstellkraft nach dem Hookeschen Gesetz ($F_H = -kx$). Die Gesamtkraft ist nicht konservativ, so dass der Energiesatz in der direkten Form nicht gültig ist (siehe jedoch S. 172). Die Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung bereitet keine Schwierigkeiten. Zur Aufbereitung führt man die Standardabkürzungen

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{b}{m} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ein. Die Differentialgleichung lautet dann

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (4.45)$$

Der Exponentialansatz $x = e^{\alpha t}$ führt auf die charakteristische Gleichung

$$\alpha^2 + 2\beta\alpha + \omega_0^2 = 0,$$

mit den Wurzeln

$$\alpha_{1,2} = -\beta \pm [\beta^2 - \omega_0^2]^{1/2}. \quad (4.46)$$