1 Grundbegriffe

Die *Statik* ist die Lehre von den Kräften an Körpern, die sich im Gleichgewicht befinden. Um statische Probleme untersuchen zu können, müssen wir uns zunächst mit einigen Grundbegriffen, Erfahrungssätzen und Arbeitsprinzipien beschäftigen.

1.1 Die Kraft

Den Begriff der *Kraft* entnehmen wir unserer täglichen Erfahrung. Obwohl man Kräfte nicht sehen oder direkt beobachten kann, sind uns doch ihre Wirkungen geläufig: eine Schraubenfeder verlängert sich, wenn wir ein Gewicht daran hängen oder wenn wir daran ziehen. Die Muskelspannung vermittelt uns dabei ein qualitatives Gefühl für die Kraft in der Feder. Ein Stein wird beim freien Fall durch die Schwerkraft, beim Abwerfen durch die Muskelkraft beschleunigt. Wir spüren den Druck auf die Handfläche, wenn wir einen darauf liegenden Körper heben. Gehen wir davon aus, dass uns die Schwerkraft und ihre Wirkungen aus der Erfahrung bekannt sind, so können wir als Kraft eine Größe bezeichnen, die mit der Schwerkraft vergleichbar ist.

Die Statik untersucht ruhende Körper. Aus Erfahrung wissen wir, dass ein Körper, der *nur* der Wirkung der Schwerkraft überlassen ist, sich bewegt: er fällt. Damit ein Stein nicht fällt, sich also im Gleichgewicht befindet, müssen wir auf ihn einwirken, zum Beispiel durch unsere Muskelkraft. Wir können somit auch sagen:

> Eine Kraft ist eine physikalische Größe, die sich mit der Schwerkraft ins Gleichgewicht setzen lässt.

1.2 Eigenschaften und Darstellung der Kraft

Die Kraft ist durch drei Eigenschaften bestimmt: Betrag, Richtung und Angriffspunkt.

Der *Betrag* gibt die Größe der wirkenden Kraft an. Ein qualitatives Gefühl dafür vermittelt die unterschiedliche Muskelspannung, wenn wir verschiedene Körper heben oder wenn wir mit unterschiedlicher Intensität gegen eine Wand drücken. Gemessen werden kann der Betrag F einer Kraft, indem man sie mit der Schwerkraft, d.h. mit geeichten Gewichten vergleicht: befindet sich in Abb. 1.1 der Körper vom Gewicht G im Gleichgewicht, so gilt $F = G$. Als Maßeinheit für die Kraft verwenden wir das „Newton" oder abgekürzt N (vgl. Abschnitt 1.6).

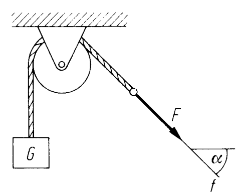

Abb. 1.1

Dass eine Kraft eine *Richtung* hat, ist uns ebenfalls geläufig. Während die Schwerkraft immer lotrecht nach unten wirkt, können wir mit der Hand senkrecht oder schräg auf eine Tischplatte drücken. Die Kiste auf der glatten Unterlage in Abb. 1.2 wird sich in verschiedene Richtungen bewegen, je nachdem in welcher Richtung man an ihr mit der Kraft F einwirkt. Die Richtung der Kraft können wir durch ihre *Wirkungslinie* und den Richtungssinn auf ihr beschreiben. In Abb. 1.1 ist die Wirkungslinie f der Kraft F unter dem Winkel α zur Horizontalen geneigt. Der Richtungssinn wird durch den Pfeil ausgedrückt.

Schließlich wirkt die Kraft an einem bestimmten *Angriffspunkt*. Abhängig davon, wo sich dieser Punkt A in Abb. 1.2 an der Kiste befindet, wird die Kraft unterschiedliche Bewegungen verursachen.

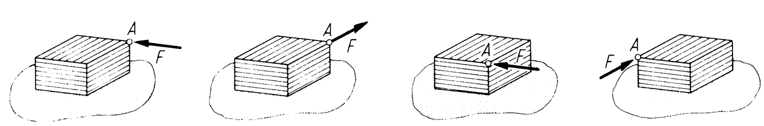

Abb. 1.2

Durch Betrag und Richtung ist mathematisch ein *Vektor* bestimmt. Im Unterschied zu einem freien Vektor (der im Raum beliebig parallel verschoben werden kann) ist die Kraft an ihre Wirkungslinie gebunden und besitzt einen Angriffspunkt:

Die Kraft ist ein gebundener Vektor.

Entsprechend der Symbolik der Vektorrechnung schreiben wir für die Kraft $\boldsymbol{F}$ und für den Betrag der Kraft $|\boldsymbol{F}|$ oder F. In Zeichnungen stellen wir die Kraft wie in den Abbildungen 1.1 und 1.2 durch einen Pfeil dar. Da aus dem Pfeilbild der Vektorcharakter meist eindeutig hervorgeht, begnügt man sich oft damit, nur den Betrag F der Kraft an den Pfeil zu schreiben.

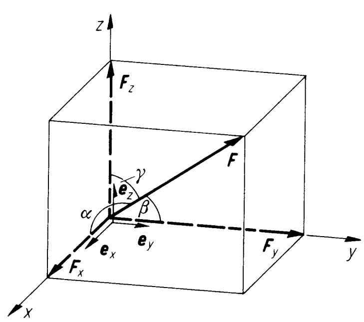

Abb. 1.3

In kartesischen Koordinaten (vgl. Abb. 1.3 und Anhang) können wir den Kraftvektor mit Hilfe der Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_z$ darstellen als

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_x + \boldsymbol{F}_y + \boldsymbol{F}_z = F_x\,\boldsymbol{e}_x + F_y\,\boldsymbol{e}_y + F_z\,\boldsymbol{e}_z\,. \tag{1.1}$$

Für den Betrag F gilt nach dem Satz von Pythagoras im Raum

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}\,. \tag{1.2}$$

Die Richtungswinkel und damit die Richtung der Kraft folgen aus

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F}\,, \quad \cos\beta = \frac{F_y}{F}\,, \quad \cos\gamma = \frac{F_z}{F}\,. \tag{1.3}$$

1.3 Der starre Körper

Als *starren Körper* bezeichnen wir einen Körper, der unter der Wirkung von Kräften keine Deformationen erfährt; die gegenseitigen Abstände beliebiger Körperpunkte bleiben immer gleich. Dies stellt natürlich eine Idealisierung eines realen Körpers dar, die allerdings oft mit hinreichender Näherung erfüllt ist. Aus Erfahrung an solchen Körpern weiß man, dass eine Einzelkraft entlang ihrer Wirkungslinie beliebig verschoben werden kann, ohne dass die Wirkung auf diesen Körper als Ganzes verändert wird.

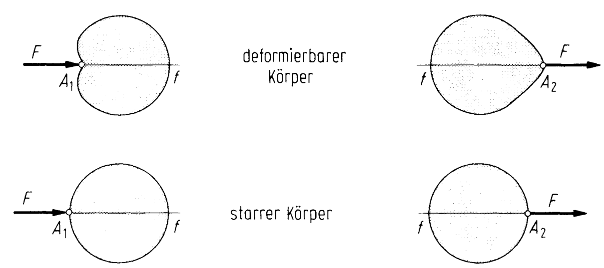

Abb. 1.4

Wir veranschaulichen dies in Abb. 1.4. Während bei der deformierbaren Kugel die Wirkung der Kraft vom Angriffspunkt abhängt, ist es bei der starren Kugel hinsichtlich der Wirkung der Kraft F auf den ganzen Körper gleichgültig, ob an der Kugel gezogen oder gedrückt wird. Diese Tatsache drücken wir durch die Sätze aus:

> Die Wirkung einer Kraft auf einen starren Körper ist von der Lage des Angriffspunktes auf der Wirkungslinie unabhängig. Die Kräfte an starren Körpern sind linienflüchtige Vektoren: sie können entlang der Wirkungslinie beliebig verschoben werden.

Eine *Parallelverschiebung* von Kräften ändert ihre Wirkung jedoch wesentlich. So zeigt die Erfahrung, dass wir einen Körper vom Gewicht G im Gleichgewicht halten können, wenn wir ihn geeignet (unterhalb des Schwerpunktes) durch die Kraft F mit $F = G$ unterstützen (Abb. 1.5a). Verschieben wir die Kraft F parallel, so kommt es zu einer Drehwirkung, und der Körper wird rotieren (Abb. 1.5b).

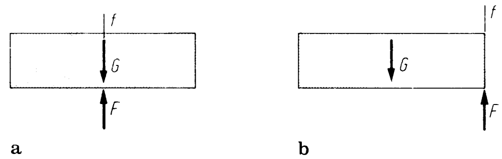

Abb. 1.5

1.4 Einteilung der Kräfte, Schnittprinzip

Die Kraft mit Wirkungslinie und Angriffspunkt stellt eine Idealisierung dar. Wir bezeichnen sie als *Einzelkraft*. Man kann sie sich weitgehend realisiert vorstellen, wenn ein Körper über einen dünnen Faden oder eine Nadelspitze belastet wird. In der Natur sind nur zwei Arten von Kräften bekannt: die Volumenkräfte und die Flächenkräfte.

Als *Volumenkräfte* bezeichnet man Kräfte, die über das Volumen eines Körpers verteilt sind. Ein Beispiel hierfür ist das Gewicht. Jedes noch so kleine Teilchen des Gesamtvolumens hat ein bestimmtes Teilgewicht. Die Summe aller dieser im Volumen kontinuierlich verteilten Kräfte $\mathrm{d}G$ ergibt das Gesamtgewicht (Abb. 1.6a). Andere Beispiele für Volumenkräfte sind magnetische und elektrische Kräfte.

Flächenkräfte treten in der Berührungsfläche zweier Körper auf. So sind beispielsweise der Wasserdruck p auf eine Staumauer (Abb. 1.6b), die Schneelast auf einem Dach oder der Druck eines Körpers auf der Handfläche flächenförmig verteilt.

Als Idealisierung findet in der Mechanik noch die *Linienkraft* (Streckenlast) Verwendung. Es handelt sich dabei um Kräfte, die entlang einer Linie kontinuierlich verteilt sind. Drückt man mit einer Schneide gegen einen Körper und sieht von der endlichen Dicke der Schneide ab, so wirkt entlang der Berührungslinie die Linienkraft q (Abb. 1.6c).

Kräfte können auch noch nach anderen Gesichtspunkten eingeteilt werden. So unterscheidet man *eingeprägte Kräfte* und *Reaktionskräfte*.

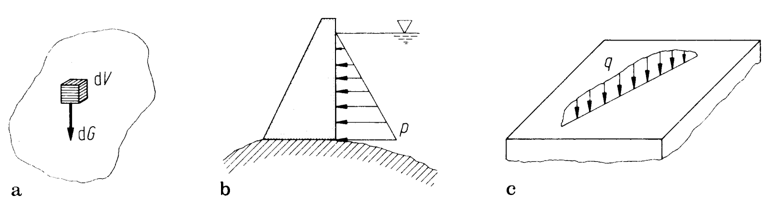

Abb. 1.6

Als *eingeprägt* bezeichnet man die bei einem mechanischen System physikalisch vorgegebenen Kräfte, wie zum Beispiel das Gewicht, den Winddruck oder eine Schneelast.

Reaktionskräfte oder Zwangskräfte entstehen durch die Einschränkung der Bewegungsfreiheit, d.h. durch die Zwangsbedingungen, denen ein System unterliegt. Auf einen fallenden Stein wirkt nur die eingeprägte Gewichtskraft. Hält man den Stein in der Hand, so ist seine Bewegungsfreiheit eingeschränkt; auf den Stein wird dann von der Hand zusätzlich eine Zwangskraft ausgeübt.

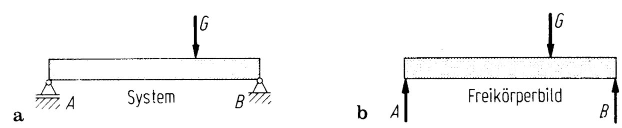

Abb. 1.7

Reaktionskräfte kann man sich nur veranschaulichen, indem man den Körper von seinen geometrischen Bindungen löst. Man nennt dies *Freimachen* oder *Freischneiden*. In Abb. 1.7a ist ein Balken durch die eingeprägte Kraft G belastet. Die Lager A und B verhindern, dass sich der Balken bewegt: sie wirken mit Reaktionskräften auf ihn. Wir machen diese Reaktionskräfte, die wir der Einfachheit halber ebenfalls mit A und B bezeichnen, im sogenannten *Freikörperbild* (Abb. 1.7b) sichtbar. In ihm sind anstelle der geometrischen Bindungen durch die Lager die dort wirkenden Kräfte eingezeichnet. Durch dieses „Freimachen“ werden die entsprechenden Kräfte einer Analyse zugänglich gemacht (vgl. Kapitel 5). Dies gilt auch dann, wenn durch das Freischneiden ein mechanisches System beweglich wird. In diesem Fall denken wir uns bei der Bestimmung der Reaktionskräfte das System in der gegebenen Lage „erstarrt“: *Erstarrungsprinzip* (vgl. Abschnitt 5.3).

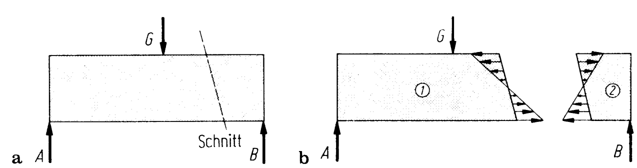

Abb. 1.8

Eine weitere Einteilung erfolgt durch die Begriffe *äußere Kraft* und *innere Kraft*. Eine *äußere Kraft* wirkt von außen auf ein mechanisches System. Sowohl eingeprägte als auch Reaktionskräfte sind äußere Kräfte. Die *inneren Kräfte* wirken zwischen den Teilen eines Systems.

Auch sie kann man sich nur durch gedankliches Zertrennen oder *Schneiden* des Körpers veranschaulichen. Führt man in Abb. 1.8a durch den Körper in Gedanken einen Schnitt, so müssen anstelle der Bindung in der Schnittfläche die flächenförmig verteilten inneren Kräfte eingezeichnet werden (Abb. 1.8b). Dem liegt die Hypothese zugrunde, dass die mechanischen Gesetze auch für Teile eines Systems gültig sind. Betrachten wir danach das System zunächst als einen Gesamtkörper, der sich in Ruhe befindet. Nach dem gedachten Schnitt fassen wir es dann als aus *zwei* Teilen bestehend auf, die über die Schnittflächen gerade so aufeinander einwirken, dass sich jeder Teil für sich im Gleichgewicht befindet. Man bezeichnet diese Hypothese, durch die die inneren Kräfte erst berechenbar werden, als *Schnittprinzip*.

Die Einteilung nach äußeren und inneren Kräften hängt davon ab, welches System wir untersuchen wollen. Fassen wir den Gesamtkörper in Abb. 1.8a als das System auf, so sind die durch den Schnitt freigelegten Kräfte innere Kräfte; sie wirken ja zwischen den Teilen des Systems. Betrachten wir dagegen nur den Teilkörper ① oder nur den Teilkörper ② in Abb. 1.8b als unser System, so sind die entsprechenden Kräfte jetzt äußere Kräfte.

Wie wir in Abschnitt 1.3 festgestellt haben, kann eine Kraft hinsichtlich ihrer Wirkung auf einen starren Körper entlang ihrer Wirkungslinie verschoben werden. Dies bedeutet insbesondere, dass wir die Linienflüchtigkeit der Kraft bei der Analyse der äußeren Kräfte nutzen können. Dagegen ist bei den inneren Kräften dieses Prinzip im allgemeinen *nicht* anwendbar. Bei ihnen wird ja der Körper gedanklich geschnitten oder geteilt, und es spielt dann doch eine Rolle, ob eine äußere Kraft auf den einen oder den anderen Teilkörper wirkt.

Die Bedeutung der inneren Kräfte für den berechnenden Ingenieur ist in der Tatsache begründet, dass ihre Größe ein Maß für die Materialbeanspruchung ist.

1.5 Wechselwirkungsgesetz

Ein Gesetz, das wir aus Erfahrung als richtig akzeptieren, ist das *Wechselwirkungsgesetz*. Dieses Axiom besagt, dass zu jeder Kraft immer eine gleich große Gegenkraft gehört, eine Kraft allein also nie existieren kann. Stemmen wir uns mit der Hand gegen eine Wand (Abb. 1.9a), so übt die Hand eine Kraft F auf die Wand aus. Eine gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kraft wirkt aber auch von der Wand auf unsere Hand. Wir können die entsprechenden Kräfte wieder sichtbar machen, indem wir

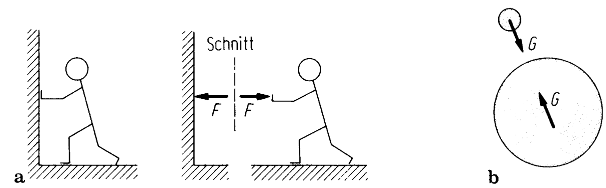

Abb. 1.9

die beiden Körper, Wand und Hand, an der Kontaktstelle trennen. Zu beachten ist, dass die Kräfte an zwei verschiedenen Körpern angreifen. Ganz analog hat aufgrund der Gravitation ein Körper auf der Erde ein Gewicht G. Mit der gleich großen Kraft wirkt jedoch der Körper auch auf die Erde: beide ziehen sich gegenseitig an (Abb. 1.9b). Wir formulieren diesen Sachverhalt im Satz:

> Die Kräfte, die zwei Körper aufeinander ausüben, sind gleich groß, entgegengesetzt gerichtet und liegen auf der gleichen Wirkungslinie.

Dieses Prinzip, das man kurz als

> actio = reactio

aussprechen kann, stellt das dritte Newtonsche Axiom dar (vgl. Band 3). Es gilt sowohl für Nah- als auch für Fernkräfte und ist unabhängig davon, ob die Körper ruhen oder bewegt werden.

1.6 Dimensionen und Einheiten

In der Mechanik beschäftigen wir uns mit den drei physikalischen Grundgrößen Länge, Zeit und Masse; hinzu kommt die Kraft als wichtige, im physikalischen Sinn aber abgeleitete Größe. Alle anderen Größen lassen sich hierdurch ausdrücken. Der geometrische Raum, in dem sich mechanische Vorgänge abspielen, ist dreidimensional. Der Einfachheit halber werden wir uns jedoch manchmal auf ebene oder auf eindimensionale Probleme beschränken.

Verbunden mit Länge, Zeit, Masse und Kraft sind ihre Dimensionen $[l]$, $[t]$, $[M]$ und $[F]$, die entsprechend dem internationalen Einheiten-system SI (Système International d'Unités) in den Grundeinheiten Meter (m), Sekunde (s) und Kilogramm (kg) sowie der abgeleiteten Einheit Newton (N) angegeben werden. Eine Kraft vom Betrag 1 N erteilt einer Masse von 1 kg die Beschleunigung 1 m/s^2; formelmäßig gilt 1 N = 1 kg m/s^2. Volumenkräfte haben die Dimension Kraft pro Volumen $[F/l^3]$ und werden z.B. in Vielfachen der Einheit N/m^3 gemessen. Analog haben Flächen- bzw. Linienkräfte die Dimensionen $[F/l^2]$ bzw. $[F/l]$ und die Einheiten N/m^2 bzw. N/m.

Der Betrag einer physikalischen Größe wird vollständig angegeben durch die Maßzahl und die Einheit. So bedeuten die Angaben $F = 17\,\mathrm{N}$ bzw. $l = 3\,\mathrm{m}$ eine Kraft von siebzehn Newton bzw. eine Länge von drei Metern. Mit Einheiten kann man genauso rechnen wie mit Zahlen. Es gilt zum Beispiel mit den obigen Größen $F \cdot l = 17\,\mathrm{N} \cdot 3\,\mathrm{m} = 17 \cdot 3\,\mathrm{Nm} = 51\,\mathrm{Nm}$. Bei physikalischen Gleichungen haben jede Seite und jeder additive Term die gleiche Dimension; dies sollte zur Kontrolle von Gleichungen immer beachtet werden.

1.7 Lösung statischer Probleme, Genauigkeit

Die Lösung von Ingenieuraufgaben aus dem Bereich der Mechanik bedarf einer überlegten Vorgehensweise, die in gewissem Maße von der Art der Problemstellung abhängt. Wichtig ist jedoch in jedem Fall, dass sich ein Ingenieur verständlich und klar ausdrückt, da er sowohl die Formulierung als auch die Lösung eines Problems Fachleuten oder Laien mitzuteilen hat und von ihnen verstanden werden muss. Diese Klarheit ist auch für den eigenen Verständnisprozeß wichtig, denn klare, saubere Formulierungen bergen in sich schon den Keim der richtigen Lösung. Obwohl es, wie schon erwähnt, kein festes Schema zur Behandlung von mechanischen Problemen gibt, so müssen doch meist die folgenden Schritte getan werden:

1. Formulierung des Ingenieurproblems.
2. Erstellen eines mechanischen Ersatzmodells, Überlegungen zur Güte der Abbildung der Realität auf das Modell.
3. Lösung des mechanischen Problems am Ersatzmodell. Dies schließt ein:
   – Feststellen der gegebenen und der gesuchten Größen. Dies geschieht in der Regel mit Hilfe einer Skizze des mechanischen Systems. Den Unbekannten ist ein Symbol zuzuweisen.
   – Zeichnen des Freikörperbildes mit allen angreifenden Kräften.

- Aufstellen der mechanischen Gleichungen (z.B. der Gleichgewichtsbedingungen).
- Aufstellen geometrischer Beziehungen (falls benötigt).
- Auflösung der Gleichungen nach den Unbekannten. Zuvor muss geprüft werden, ob die Zahl der Gleichungen mit der Zahl der Unbekannten übereinstimmt.
- Kenntlichmachen des Resultats.

4. Diskussion und Deutung der Lösung.

Wir werden in der Technischen Mechanik meist nicht vom Ingenieurproblem ausgehen, sondern uns auf den dritten Punkt, die Lösung von mechanischen Problemen am Modell, konzentrieren. Trotzdem dürfen wir nicht aus dem Auge verlieren, dass unsere Modelle Abbilder realer Körper oder Systeme sind, deren Verhalten wir manchmal anschaulich aus der Erfahrung heraus beurteilen können. Es ist deshalb immer zweckmäßig, die Ergebnisse einer Rechnung mit der Anschauung zu überprüfen.

Was die Genauigkeit von Ergebnissen anbelangt, so müssen wir zwischen der numerischen Genauigkeit unserer Rechnungen am Modell und der Treffsicherheit der ingenieurmäßigen Aussage über das Verhalten realer Körper unterscheiden. Das numerische Ergebnis hängt dabei von der Genauigkeit der Eingangsdaten und von der Rechengenauigkeit ab. So können Ergebnisse nie präziser als die Eingangsdaten sein. Sie sollten auch nie in einer Weise angegeben werden (z.B. viele Stellen hinter dem Komma), die eine nicht vorhandene Genauigkeit vortäuscht.

Die Treffsicherheit der Ingenieuraussage ist von der Güte des Modells abhängig. So können wir zum Beispiel den Wurf eines Steines beschreiben, indem wir den Luftwiderstand berücksichtigen oder ihn vernachlässigen; die Ergebnisse werden natürlich voneinander abweichen. Es ist die Aufgabe des Ingenieurs, ein Modell gerade so zu bilden, dass es die für sein Problem *erforderliche* Genauigkeit auch liefern kann.