

Franz Schwabl

Quantenmechanik für Fortgeschrittene (QM II)

Mit 79 Abbildungen, 4 Tabellen
und 101 Aufgaben



Springer

Professor Dr. Franz Schwabl
Institut für Theoretische Physik
Technische Universität München
James-Franck-Strasse
85747 Garching
e-mail: schwabl@physik.tu-muenchen.de

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Schwabl, Franz:

Quantenmechanik für Fortgeschrittene: QM II / Franz Schwabl. –

Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Budapest; Hongkong; London; Mailand; Paris; Santa Clara;
Singapur; Tokio: Springer, 1997

(Springer-Lehrbuch)

ISBN 3-540-63382-0

ISBN 3-540-63382-0 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funk- sendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1997

Printed in Germany

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Satz: Reproduktionsfertige Vorlage vom Autor

Einbandgestaltung: design & production GmbH, Heidelberg

SPIN: 10639186

56/3144 - 5 4 3 2 1 0 – Gedruckt auf säurefreiem Papier

Inhaltsverzeichnis

Teil I. Nichtrelativistische Vielteilchen-Systeme

1. Zweite Quantisierung	3
1.1 Identische Teilchen, Mehrteilchenzustände und Permutationssymmetrie	3
1.1.1 Zustände und Observable von identischen Teilchen	3
1.1.2 Beispiele	6
1.2 Vollkommen symmetrische und antisymmetrische Zustände	8
1.3 Bosonen	10
1.3.1 Zustände, Fock-Raum, Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren	10
1.3.2 Teilchenzahloperator	13
1.3.3 Allgemeine Einteilchen- und Mehrteilchenoperatoren	14
1.4 Fermionen	17
1.4.1 Zustände, Fock-Raum und Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren	17
1.4.2 Ein- und Mehrteilchenoperatoren	19
1.5 Feldoperatoren	21
1.5.1 Transformationen zwischen verschiedenen Basissystemen	21
1.5.2 Feldoperatoren	21
1.5.3 Feldgleichungen	23
1.6 Impulsdarstellung	25
1.6.1 Impulseigenfunktionen, Hamilton-Operator	25
1.6.2 Fouriertransformation der Dichte	27
1.6.3 Berücksichtigung des Spins	28
Aufgaben	29
2. Spin-1/2 Fermionen	33
2.1 Nichtwechselwirkende Fermionen	33
2.1.1 Fermi-Kugel, Anregungen	33
2.1.2 Einteilchenkorrelationsfunktion	35
2.1.3 Paarverteilungsfunktion	36
2.1.4 Paarverteilungsfunktion, Dichtekorrelationsfunktionen und Strukturfaktor	39

2.2	Grundzustandsenergie und elementare Theorie des Elektronengases	41
2.2.1	Hamilton-Operator	41
2.2.2	Grundzustandsenergie in Hartree-Fock-Näherung	43
2.2.3	Änderung der elektronischen Energieniveaus durch die Coulomb-Wechselwirkung	46
2.3	Hartree-Fock Gleichungen für Atome	49
	Aufgaben	52
3.	Bosonen	55
3.1	Freie Bosonen	55
3.1.1	Paarverteilungsfunktion für freie Bosonen	55
*3.1.2	Zweiteilchenzustände von Bosonen	57
3.2	Schwach wechselwirkendes, verdünntes Bose-Gas	60
3.2.1	Quantenflüssigkeiten und Bose-Einstein-Kondensation	60
3.2.2	Bogoliubov-Theorie des schwach wechselwirkenden Bose-Gases	62
*3.2.3	Suprafluidität	69
	Aufgaben	72
4.	Korrelationsfunktionen, Streuung und Response	77
4.1	Streuung und Response	77
4.2	Dichtematrix, Korrelationsfunktionen	84
4.3	Dynamische Suszeptibilität	88
4.4	Dispersionsrelationen	91
4.5	Spektraldarstellung	92
4.6	Fluktuations-Dissipations-Theorem	93
4.7	Anwendungsbeispiele	94
*4.8	Symmetrieeigenschaften	101
4.8.1	Allgemeine Symmetrierelationen	101
4.8.2	Symmetrieeigenschaften der Responsefunktion für hermitesche Operatoren	104
4.9	Summenregeln	108
4.9.1	Allgemeine Struktur von Summenregeln	108
4.9.2	Anwendung auf die Anregungen in He II	110
	Aufgaben	111
	Literatur zu Teil I	113

Teil II. Relativistische Wellengleichungen

5. Aufstellung von relativistischen Wellengleichungen	117
5.1 Einleitung	117
5.2 Klein-Gordon-Gleichung	118
5.2.1 Aufstellung mittels des Korrespondenzprinzips	118
5.2.2 Kontinuitätsgleichung	121
5.2.3 Freie Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung	122
5.3 Dirac-Gleichung	123
5.3.1 Aufstellung der Dirac-Gleichung	123
5.3.2 Kontinuitätsgleichung	124
5.3.3 Eigenschaften der Dirac-Matrizen	125
5.3.4 Die Dirac-Gleichung in kovarianter Form	126
5.3.5 Nichtrelativistischer Grenzfall und Kopplung an das elektromagnetische Feld	127
Aufgaben	133
6. Lorentz-Transformationen und Kovarianz der Dirac-Gleichung	135
6.1 Lorentz-Transformationen	135
6.2 Lorentz-Kovarianz der Dirac-Gleichung	139
6.2.1 Die Lorentz-Kovarianz und Transformation von Spinoren	139
6.2.2 Bestimmung der Darstellung $S(\Lambda)$	140
6.2.3 Weitere Eigenschaften der S	146
6.2.4 Transformation von Bilinearformen	148
6.2.5 Eigenschaften der γ -Matrizen	149
6.3 Lösungen der Dirac-Gleichung für freie Teilchen	150
6.3.1 Spinoren mit endlichem Impuls	150
6.3.2 Orthogonalitätsrelationen und Dichte	153
6.3.3 Projektionsoperatoren	155
Aufgaben	156
7. Drehimpuls – Bahndrehimpuls und Spin	159
7.1 Passive und aktive Transformationen	159
7.2 Drehungen und Drehimpuls	160
Aufgaben	163
8. Bewegung im Coulomb-Potential	165
8.1 Klein-Gordon-Gleichung mit elektromagnetischem Feld	165
8.1.1 Ankopplung an das elektromagnetische Feld	165
8.1.2 Klein-Gordon-Gleichung im Coulomb-Feld	166
8.2 Dirac-Gleichung für das Coulomb-Potential	172
Aufgaben	184

9. Elektronen im elektromagnetischen Feld:	
Näherungsmethoden	185
9.1 Die Foldy-Wouthuysen-Transformation	185
9.1.1 Problemstellung	185
9.1.2 Transformation für freie Teilchen	186
9.1.3 Wechselwirkung mit elektromagnetischem Feld	187
9.2 Relativistische Korrekturen und Lamb-Verschiebung	192
9.2.1 Relativistische Korrekturen	192
9.2.2 Abschätzung der Lamb-Verschiebung	193
Aufgaben	198
10. Physikalische Interpretation der Lösungen der	
Dirac-Gleichung	201
10.1 Wellenpakete und Zitterbewegung	201
10.1.1 Superposition von Zuständen positiver Energie	202
10.1.2 Allgemeines Wellenpaket	203
*10.1.3 Allgemeine Lösung der freien Dirac-Gleichung	
im Heisenberg-Bild	207
*10.1.4 Klein-Paradoxon, Potentialschwelle	208
10.2 Löcher-Theorie	211
Aufgaben	213
11. Symmetrien und weitere Eigenschaften	
der Dirac-Gleichung	215
*11.1 Aktive und passive Transformationen, Transformation von	
Vektoren	215
11.2 Invarianz und Erhaltungssätze	218
11.2.1 Allgemeine Transformation	218
11.2.2 Drehungen	219
11.2.3 Translationen	219
11.2.4 Raumspiegelung (Paritätstransformation)	220
11.3 Ladungskonjugation	220
11.4 Zeitumkehr (Bewegungsumkehr)	224
11.4.1 Bewegungsumkehr in der klassischen Physik	224
11.4.2 Zeitumkehr in der Quantenmechanik	228
11.4.3 Zeitumkehrinvarianz der Dirac-Gleichung	236
*11.4.4 Racah-Zeitspiegelung	243
*11.5 Helizität	244
*11.6 Fermionen mit Masse Null (Neutrinos)	246
Aufgaben	251
Literatur zu Teil II	253

Teil III. Relativistische Felder

12. Quantisierung von relativistischen Feldern	257
12.1 Gekoppelte Oszillatoren, lineare Kette, Gitterschwingungen . .	257
12.1.1 Lineare Kette von gekoppelten Oszillatoren	257
12.1.2 Kontinuumsrenzfall, schwingende Saite	263
12.1.3 Verallgemeinerung auf drei Dimensionen, Zusammen- hang mit dem Klein–Gordon–Feld	266
12.2 Klassische Feldtheorie	269
12.2.1 Lagrange–Funktion und Euler–Lagrange Bewegungs- gleichungen	269
12.3 Kanonische Quantisierung	274
12.4 Symmetrien und Erhaltungssätze, Noether Theorem	275
12.4.1 Energie–Impuls–Tensor, Kontinuitätsgleichungen und Erhaltungssätze	275
12.4.2 Herleitung der Erhaltungssätze für Viererimpuls, Dreh- impuls und Ladung aus dem Noetherschen Theorem . .	277
Aufgaben	283
13. Freie Felder	285
13.1 Das reelle Klein–Gordon–Feld	285
13.1.1 Lagrange–Dichte, Vertauschungsrelationen, Hamilton- Operator	285
13.1.2 Propagatoren	289
13.2 Das komplexe Klein–Gordon–Feld	293
13.3 Quantisierung des Dirac–Feldes	296
13.3.1 Feldgleichungen	296
13.3.2 Erhaltungsgrößen	297
13.3.3 Quantisierung	298
13.3.4 Ladung	302
*13.3.5 Grenzfall unendlichen Volumens	303
13.4 Spin–Statistik–Theorem	304
13.4.1 Propagatoren und Spin–Statistik–Theorem	304
13.4.2 Ergänzungen zum Antikommutator und Propagator des Dirac–Feldes	309
Aufgaben	311
14. Quantisierung des Strahlungsfeldes	315
14.1 Klassische Elektrodynamik	315
14.1.1 Maxwell–Gleichungen	315
14.1.2 Eichtransformationen	317
14.2 Coulomb–Eichung	317
14.3 Lagrange–Dichte für das elektromagnetische Feld	319
14.4 Freies elektromagnetisches Feld und dessen Quantisierung . .	320

14.5	Berechnung des Photon–Propagators	324
	Aufgaben	328
15.	Wechselwirkende Felder, Quantenelektrodynamik	329
15.1	Lagrange-Funktionen, wechselwirkende Felder	329
15.1.1	Nichtlineare Lagrange-Funktionen	329
15.1.2	Fermionen in einem äußeren Feld	330
15.1.3	Wechselwirkung von Elektronen mit dem Strahlungsfeld: Quantenelektrodynamik (QED)	330
15.2	Wechselwirkungsdarstellung, Störungstheorie	332
15.2.1	Wechselwirkungsdarstellung (auch Dirac–Darstellung)	332
15.2.2	Störungstheorie	335
15.3	S –Matrix	337
15.3.1	Allgemeine Formulierung	337
15.3.2	Einfache Übergänge	341
*15.4	Wicksches Theorem	344
15.5	Einfache Streuprozesse, Feynman–Diagramme	348
15.5.1	Der Term erster Ordnung	349
15.5.2	Mott–Streuung	350
15.5.3	Prozesse zweiter Ordnung	355
15.5.4	Feynman–Regeln der Quantenelektrodynamik	365
*15.6	Strahlungskorrekturen	368
15.6.1	Selbstenergie des Elektrons	368
15.6.2	Selbstenergie des Photons, Vakuumpolarisation	374
15.6.3	Vertexkorrekturen	376
15.6.4	Ward-Identität und Ladungsrenormierung	377
15.6.5	Anomales magnetisches Moment des Elektrons	380
	Aufgaben	383
	Literatur zu Teil III	385
	Anhang	387
A	Alternative Herleitung der Dirac-Gleichung	387
B	Formeln	389
B.1	Standarddarstellung	389
B.2	Chirale Darstellung	389
B.3	Majorana-Darstellungen	390
C	Projektionsoperatoren für den Spin	390
C.1	Definition	390
C.2	Ruhsystem	390
C.3	Bedeutung des Projektionsoperators $P(n)$ im allgemeinen	391
D	Wegintegraldarstellung der Quantenmechanik	395
E	Kovariante Quantisierung des elektromagnetischen Feldes, Gupta–Bleuler–Methode	397

E.1	Quantisierung und Feynman-Propagator	397
E.2	Die physikalische Bedeutung von longitudinalen und skalaren Photonen	399
E.3	Der Feynman-Photonen-Propagator.....	402
E.4	Erhaltungsgrößen.....	404
F	Die Ankopplung von geladenen skalaren Mesonen an das elek- tromagnetische Feld	404
Sachverzeichnis		407