

6 Lineare Schwinger mit mehreren Freiheitsgraden

6.1 Einleitung

Viele Maschinen und deren Baugruppen lassen sich auf ein lineares Berechnungsmodell mit endlich vielen Freiheitsgraden reduzieren. Man kann auf zwei Wegen zu so einem Berechnungsmodell kommen – durch die Modellierung als Mehrkörpersystem und/oder als FEM-Modell. Ein Berechnungsmodell, das aus diskreten Federn (Zug-, Druck-, Torsions- oder Biegefedern) und einzelnen starren Körpern (gekennzeichnet durch Masse, Schwerpunktlage, Trägheits- und Zentrifugalmomente) besteht, wird als Mehrkörpersystem bezeichnet. Ursprünglich kontinuierliche Berechnungsmodelle mit verteilter Elastizität und Masse, wie z. B. Balken, Platten, Scheiben, räumlich ausgedehnte Körper oder Schalen, lassen sich mit der Methode der finiten Elemente (FEM) ebenfalls auf Berechnungsmodelle mit endlich vielen Freiheitsgraden zurückführen.

Zur dynamischen Berechnung vieler Maschinen sind oft Berechnungsmodelle mit wenigen Freiheitsgraden ausreichend, aber es werden manchmal auch Berechnungsmodelle mit $n > 10^6$ Freiheitsgraden benutzt. Mit der Anzahl der Freiheitsgrade steigt in jedem Fall der Rechenaufwand, aber nicht immer die Genauigkeit der Ergebnisse. Die Genauigkeit hängt von der Genauigkeit der Eingabedaten und davon ab, ob die wesentlichen Einflussgrößen richtig erfasst werden. Man kann mit einem Modell mit wenigen Freiheitsgraden das reale Verhalten oft schon hinreichend genau beschreiben, wenn man alle nebensächlichen Parameter vernachlässigt. Durch Berechnungsmodelle mit mehreren (endlich vielen) Freiheitsgraden können

- Längsschwingungen (z. B. von gekoppelten Fahrzeugen)
- Torsionsschwingungen (z. B. von Wellen und Antriebssystemen)
- Biegeschwingungen (z. B. von Maschinengestellen, Balken, Rahmen, Platten)
- Schwingungen elastisch gekoppelter Körper (z. B. von Fundamentblöcken, Fahrzeugverbänden, Werkzeugmaschinen)
- Schwingungen von Stab- und Flächentragwerken

und beliebig gekoppelte Modelle beliebiger geometrischer Struktur behandelt werden.

Lineare Schwingungserscheinungen sind im Grunde genommen alle von gleicher physikalischer Natur. Sie werden mathematisch einheitlich durch lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten beschrieben. Beispiele für solche Berechnungsmodelle zeigt Bild 6.1. Viele der in den bisherigen Abschnitten behandelten Berechnungsmodelle (vgl. z. B. die Abschnitte 3.2.2, 3.3, 4.2.2, 4.3 und 5.2.5), lassen sich als lineare Schwinger mit n Freiheitsgraden einordnen. Das Schwingungssystem mit

n Freiheitsgraden gestattet die Untersuchung des Verhaltens beliebig strukturierter ebener und räumlicher Antriebs- und Tragsysteme von Maschinen.

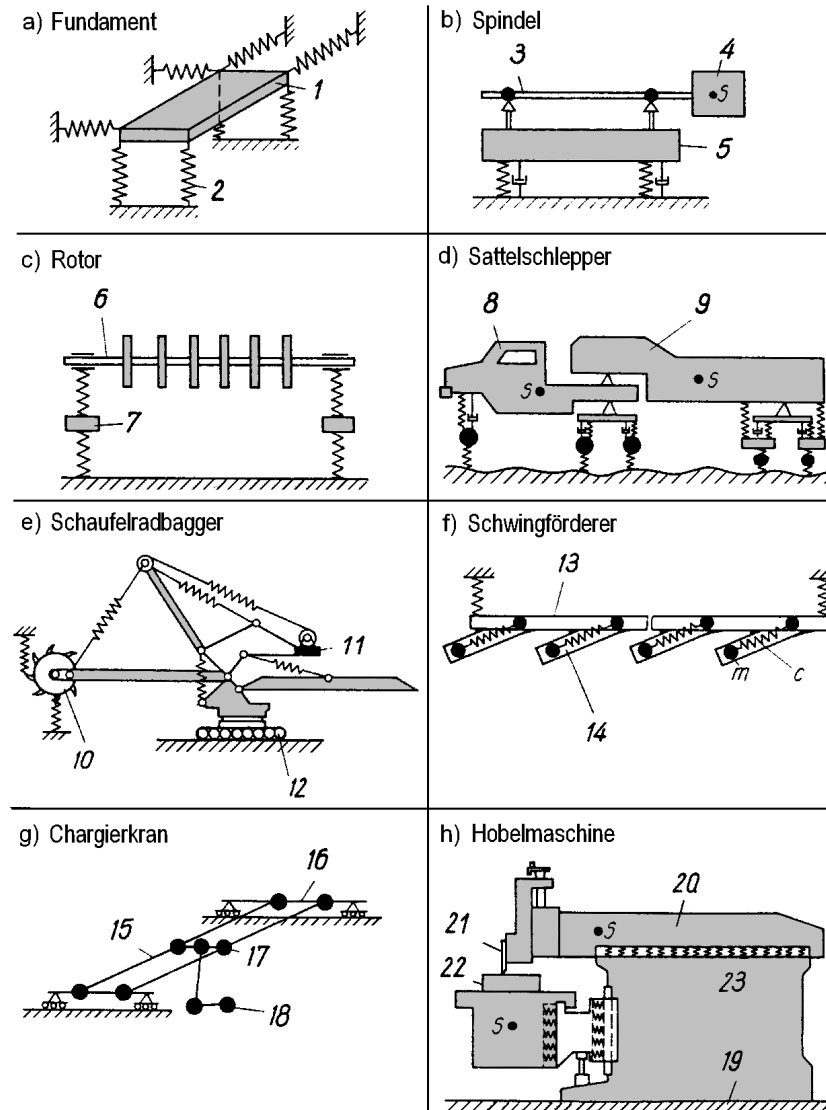


Bild 6.1 Beispiele für Berechnungsmodelle mit mehreren Freiheitsgraden

1 Fundamentblock; 2 elastische Abstützung; 3 Welle; 4 Rotationskörper; 5 Gehäuse;
 6 Turbinenwelle; 7 Lager; 8 Fahrerhaus; 9 Wagenkasten; 10 Schaufelrad; 11 Gegengewicht;
 12 Raupenfahrzeug; 13 Förderbrücke; 14 elektromagnetische Schwingungserreger;
 15 Kranbrücke; 16 Fahrwerk; 17 Laufkatze; 18 Chargierzange; 19 Gestell; 20 Schlitten;
 21 Werkzeug; 22 Werkstück; 23 elastische und dämpfende Schichten

Mit dem linearen Berechnungsmodell können allgemeine Gesetzmäßigkeiten von einem Gesichtspunkt aus behandelt werden, z. B. freie Schwingungen nach Stoßvorgängen, erzwungene Schwingungen bei periodischer Erregung oder bei beliebigem Kraft-Zeit-Verlauf. Praktisch sind damit kritische Drehzahlen, zeitliche Verläufe und Extremwerte der interessierenden Kräfte, Momente, Deformationen, Spannungen u. a. in Abhängigkeit von den Parametern der Maschine berechenbar.

Die *Matrizenschreibweise* gestattet, die Berechnungsmodelle unabhängig von ihrer Struktur und der Anzahl ihrer Freiheitsgrade einheitlich und übersichtlich zu behandeln, was vor allem die Untersuchung von Systemen mit vielen Freiheitsgraden erleichtert. Trotz des hohen Abstraktionsgrades sind die konkreten Maschinen damit gut zu beschreiben und ihre dynamische Untersuchung ist mithilfe handelsüblicher Software auf ökonomische Weise möglich.

In der Matrizenschreibweise lassen sich die Grundgedanken elegant formulieren, die für die Behandlung von Schwingern mit vielen Freiheitsgraden typisch sind. Dazu gehört, die Matrix eines Gesamtsystems aus denen von Substrukturen aufzubauen, die Reduktion der Freiheitsgrade, die Formulierung des Eigenwertproblems, die Begründung der modalen Analyse und die formale Beschreibung der computergerechten Aufstellung und Lösung aller Gleichungen.

Um das Vorgehen zu erklären, werden in diesem Abschnitt bei Beispielen nur Modelle mit wenigen Freiheitsgraden verwendet. Es soll dem Studierenden möglich sein, diese Beispiele mit erträglichem Aufwand durchzurechnen. Er muss jedoch wissen, dass diese Beispiele nur dazu dienen sollen, ihn an die allgemeine Betrachtungsweise heranzuführen.

Die Grundlagen der modernen Behandlung von Schwingern mit n Freiheitsgraden stammen aus dem 19. Jahrhundert. Die Einführung der verallgemeinerten Koordinaten erfolgte durch J. L. LAGRANGE (1736–1813). Sie liegen auch seinen im Jahre 1811 veröffentlichten Bewegungsgleichungen zweiter Art zugrunde. Auch die Theorie der Stabtragwerke, die in Arbeiten von J. C. MAXWELL (1831–1879), CASTIGLIANO (1847–1884) und O. MOHR (1835–1918) entwickelt wurde, stellt einen der Ausgangspunkte dar. Durch Verallgemeinerung des 1905 publizierten Verfahrens von W. RITZ (1878–1909) gelang die Diskretisierung der Kontinuum-Modelle, die bei allen FEM-Modellen wesentlich ist.

Die Computertechnik war in den 50er-Jahren des 20. Jahrhunderts der Anlass für die Entwicklung der Matrizenmethoden, zu denen R. ZURMÜHL (1904–1966), S. FALK, J. ARGYRIS und E. PESTEL (1914–1988) wesentliche Beiträge lieferten. Weitere Anstöße zum Ausbau computergerechter Formalismen stammen aus dem Gebiet der Mehrkörperdynamik, für welches seit den 60er-Jahren das Interesse stark zunahm, als von der Raumfahrttechnik und Robotertechnik neue Anforderungen gestellt wurden. In den 60er- und 70er-Jahren wurden Programmsysteme auf der Basis der Modelle von Mehrkörpersystemen (MKS) und von finiten Elementen (FEM) entwickelt, die von der Industrie genutzt werden. Seit den 80er-Jahren des 20. Jahrhunderts findet die Kopplung von MKS- und FEM-Programmen mit kommerziellen CAD-Programmen weit verbreitete Anwendung.

6.2 Bewegungsgleichungen

6.2.1 Massen-, Feder- und Nachgiebigkeitsmatrix

Die Bewegung eines Schwingers mit n Freiheitsgraden ist eindeutig dadurch beschreibbar, dass der zeitliche Verlauf der Verschiebungen diskreter Punkte bzw. Drehwinkel um gegebene Achsen angegeben wird. Zur Beschreibung der Deformation des Systems werden verallgemeinerte Koordinaten q_1, q_2, \dots, q_n benutzt, die Wege oder Winkel darstellen können. Die Gesamtheit dieser Koordinaten wird im Lagevektor (Synonym: Koordinatenvektor) \mathbf{q} zusammengefasst:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}, \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{q}^T = [q_1, q_2, \dots, q_n]. \quad (6.1)$$

Ebenso ist es zweckmäßig, verallgemeinerte Kräfte Q_1, Q_2, \dots, Q_n einzuführen, die an den diskreten Punkten $1, 2, \dots, n$ in Richtung der verallgemeinerten Koordinaten q_1, q_2, \dots, q_n wirken. Verallgemeinerte Kräfte können Einzelkräfte oder Momente sein, vgl. auch Abschnitt 2.4.1.1. Sie werden im *Kraftvektor*

$$\mathbf{g}^T = [Q_1, Q_2, \dots, Q_n] \quad (6.2)$$

zusammengefasst.

Für die hier betrachteten Modelle von Maschinen, bei denen Schwingungen um die stabile Gleichgewichtslage $\mathbf{q}^T = [0, 0, \dots, 0]$ interessieren, bestehen zwischen den verallgemeinerten Kräften und den verallgemeinerten Koordinaten folgende lineare Beziehungen für den statischen Fall:

$$Q_l = \sum_{k=1}^n c_{lk} q_k \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{g} = \mathbf{C} \mathbf{q}. \quad (6.3)$$

Anders ausgedrückt:

$$q_l = \sum_{k=1}^n d_{lk} Q_k \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{q} = \mathbf{D} \mathbf{g}. \quad (6.4)$$

Die das jeweilige System charakterisierenden verallgemeinerten Federzahlen c_{lk} erfasst die Matrix \mathbf{C} , die verallgemeinerten Einflusszahlen d_{lk} enthält die Matrix \mathbf{D} . Es ist

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad (6.5) \quad \text{und} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

Die Matrix C ist die **Federmatrix** oder **Steifigkeitsmatrix**, die Matrix D wird **Nachgiebigkeitsmatrix** oder Flexibilitätsmatrix genannt. Beide Matrizen sind symmetrisch, wie aus dem Satz von *Maxwell-Betti* für elastische mechanische Systeme folgt. Das heißt, es gilt $c_{lk} = c_{kl}$ und $d_{lk} = d_{kl}$. Die konkrete Wahl der Matrizen C und D hängt davon ab, ob sich die Feder- oder die Einflusszahlen bei praktischen Aufgaben leichter ermitteln lassen. So wird bei Torsionsschwingern i. Allg. mit Federkonstanten und bei Biegeschwingern mit Einflusszahlen gerechnet.

Die in einem elastischen System gespeicherte Formänderungsarbeit ist abhängig von den Koordinaten oder den Kräften. Bei linearem elastischen Verhalten entstehen Gleichungen der Form

$$W_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{C} \mathbf{q} \quad (6.7) \quad W_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \mathbf{g}^T \mathbf{D} \mathbf{g} \quad (6.8)$$

Die Formänderungsarbeit W_{pot} ist für alle möglichen Bewegungen und Belastungen stets positiv. Wenn man sie formuliert hat, kann man die Elemente der Matrizen C und D aus den zweiten partiellen Ableitungen errechnen:

$$c_{lk} = c_{kl} = \frac{\partial^2 W_{\text{pot}}}{\partial q_l \partial q_k} \quad (6.9) \quad d_{lk} = d_{kl} = \frac{\partial^2 W_{\text{pot}}}{\partial Q_l \partial Q_k} \quad (6.10)$$

Für Maschinen, bei denen eine statische Berechnung üblich ist, wie z. B. bei Rahmen und Stahltragwerken der Fördergeräte, Landmaschinen u. a. können die Einflusszahlen d_{lk} meist mit vorhandenen Rechenprogrammen manchmal bequemer als die c_{lk} berechnet werden.

Es ist auch möglich, die d_{lk} aufgrund von (6.4) aus einer statischen Deformationsmessung zu ermitteln. Kann bei gegebener Belastung die Deformation \mathbf{q} des Systems gemessen werden (z. B. fotogrammetrisch), so ergeben sich die d_{lk} aus einem linearen Gleichungssystem.

Für Systeme, die aus Stäben und Balken bestehen, stellt Tabelle 6.1 die Berechnungsformeln für W_{pot} und d_{lk} zusammen. Es gilt wegen (6.3) und (6.4)

$$\mathbf{g} = \mathbf{C} \mathbf{q} = \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{g}; \quad \mathbf{C} \mathbf{D} = \mathbf{E}. \quad (6.11)$$

Mit \mathbf{E} wird dabei die Einheitsmatrix bezeichnet. Die Federmatrix ist die Kehrmatrix der Nachgiebigkeitsmatrix und umgekehrt:

$$\mathbf{C} = \mathbf{D}^{-1}; \quad \mathbf{D} = \mathbf{C}^{-1}. \quad (6.12)$$

In Anlehnung an das *d'Alembertsche Prinzip* kann man einen Zusammenhang zwischen dem Beschleunigungsvektor $\ddot{\mathbf{q}}$ und den bei der Bewegung von den Massen auf das elastische System wirkenden kinetischen Kräften \mathbf{g} herstellen. Wenn man Bewegungen ausschließt, bei denen noch lineare oder quadratische Geschwindigkeitsglieder auftreten (z. B. Corioliskräfte, Kreismomente), gilt für die **Massenkräfte**, vgl. (2.88) und (2.100):

$$\mathbf{g} = -\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}. \quad (6.13)$$

Dabei ist

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

die **Massenmatrix** des Systems, die seine Trägheitseigenschaften quantitativ erfasst. Die Elemente der Massenmatrix sind Massen, Trägheitsmomente, Zentrifugalmomente, statische Momente oder Summen solcher Größen, die die Trägheit von diskreten Elementen erfassen, vgl. die Beispiele in Tabelle 6.2. Die Elemente der Massenmatrix lassen sich auf zwei verschiedenen Wegen bestimmen. Der erste besteht darin, die kinetische Energie W_{kin} eines Systems allgemein zu formulieren und davon die partiellen Ableitungen zu bilden. Es gilt dann

$$m_{kl} = m_{lk} = \frac{\partial^2 W_{\text{kin}}}{\partial \dot{q}_l \partial \dot{q}_k}. \quad (6.15)$$

Der zweite Weg geht von den Bewegungsgleichungen des Systems aus, die mit irgendeiner Methode aufgestellt sind. Aus ihnen lassen sich nach entsprechendem Sortieren gemäß dem Koordinatenvektor die Massen- und Steifigkeits- bzw. Nachgiebigkeitsmatrizen ablesen. Die kinetische Energie ergibt sich allgemein zu:

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n m_{lk} \dot{q}_l \dot{q}_k \quad \text{bzw.} \quad W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}. \quad (6.16)$$

Tabelle 6.1 Formeln zur Berechnung der Formänderungsarbeit und der Einflusszahlen d_{lk} von Stäben und Balken

| Beanspruchungsart | Formänderungsarbeit W_{pot} | Einflusszahlen d_{lk} |
|---------------------------------------|--|--|
| Zug- und Druckkräfte $F_{Nj}(s_j)$ | $W_{\text{pot}} = \sum_{j=1}^J \int_{l_j} \frac{F_{Nj}^2}{2E_j A_j} ds_j$ | $d_{lk} = \sum_{j=1}^J \int_{l_j} \frac{\partial F_{Nj}}{\partial Q_l} \frac{\partial F_{Nj}}{\partial Q_k} \frac{ds_j}{E_j A_j}$ |
| Schubkräfte $F_{Qj}(s_j)$ | $W_{\text{pot}} = \sum_{j=1}^J \int_{l_j} \frac{F_{Qj}^2}{2G_j \kappa_j A_j} ds_j$ | $d_{lk} = \sum_{j=1}^J \int_{l_j} \frac{\partial F_{Qj}}{\partial Q_l} \frac{\partial F_{Qj}}{\partial Q_k} \frac{ds_j}{G_j \kappa_j A_j}$ |
| Biegemomente $M_j(s_j)$ | $W_{\text{pot}} = \sum_{j=1}^J \int_{l_j} \frac{M_j^2}{2E_j I_j} ds_j$ | $d_{lk} = \sum_{j=1}^J \int_{l_j} \frac{\partial M_j}{\partial Q_l} \frac{\partial M_j}{\partial Q_k} \frac{ds_j}{E_j I_j}$ |
| Torsionsmomente $M_{tj}(s_j)$ | $W_{\text{pot}} = \sum_{j=1}^J \int_{l_j} \frac{M_{tj}^2}{2G_j I_{tj}} ds_j$ | $d_{lk} = \sum_{j=1}^J \int_{l_j} \frac{\partial M_{tj}}{\partial Q_l} \frac{\partial M_{tj}}{\partial Q_k} \frac{ds_j}{G_j I_{tj}}$ |

Es bedeuten:

| | |
|------------|---|
| l_j | Stablänge |
| ds_j | Längenelement der Stabachse |
| A_j | Querschnittsfläche |
| κ_j | Schubzahl für Querschnitt |
| j | laufende Nummer des Stabes |
| $Q_i; Q_k$ | Kräfte oder Momente in Richtung q_i und q_k |
| J | Anzahl der Stäbe |
| E_j | Elastizitätsmodul |
| G_j | Gleitmodul |
| I_j | Flächenträgheitsmoment bezüglich einer Biege-Hauptachse |
| I_{tj} | Torsionsträgheitsmoment |

Die elastischen Rückstellkräfte halten in jedem Moment den Trägheitskräften das Gleichgewicht. Aus dieser Bedingung ergeben sich die Differentialgleichungen, denen die Bewegungen und Kräfte eines Systems gehorchen. Aus (6.4), (6.3) und (6.13) findet man:

$$Cq = -M\ddot{q} \quad \text{bzw.} \quad q = -DM\ddot{q}. \tag{6.17}$$

Daraus folgen die Differentialgleichungen der freien Schwingungen in drei möglichen Formen:

$$M\ddot{q} + Cq = o \tag{6.18}$$

$$DM\ddot{q} + q = o \tag{6.19}$$

$$\ddot{q} + (DM)^{-1}q = o \quad \text{bzw.} \quad \ddot{q} + M^{-1}Cq = o. \tag{6.20}$$

Der Schwingungsvorgang lässt sich durch den zeitlichen Verlauf der Bewegungsgrößen (Relativ- oder Absolutweg q , -geschwindigkeit \dot{q} , -beschleunigung \ddot{q}) oder Kraftgrößen (Kraftvektor g und Ableitungen \dot{g}, \ddot{g}) beschreiben. Analog lassen sich, da Kräfte und Deformationen sich wechselseitig bedingende Größen sind, Differentialgleichungen für die Kräfte $g(t)$ aufstellen. Aus (6.3) folgt durch die Kombination mit (6.20):

$$\ddot{g} = C\dot{q} = -C(M^{-1}Cq) = -CM^{-1}g. \tag{6.21}$$

Daraus folgen die weiteren Formen analog zu (6.18) bis (6.20):

$$\ddot{g} + CM^{-1}g = o, \quad D\ddot{g} + M^{-1}g = o, \quad MD\ddot{g} + g = o. \tag{6.22}$$

Zusammenfassend soll festgehalten werden, dass die elastischen Eigenschaften eines linearen Schwingungssystems durch die Matrizen C oder D und die Trägheitseigenschaften durch die Massenmatrix M charakterisiert werden. Die erste Aufgabe bei der Analyse eines Schwingungssystems besteht darin, die Elemente der Matrizen C oder D und M aus den technischen Daten der realen Maschine zu bestimmen. Tabelle 6.2 enthält einige Beispiele.

Tabelle 6.2 Beispiele für Massen- und Steifigkeitsmatrix eines Berechnungsmodells

| Fall | System mit Parametern und Koordinaten | q | Steifigkeitsmatrix C | Massenmatrix M |
|------|--|---|--|---|
| 1 | <p>Fahrzeugmodell (Relativkoordinaten)</p> | q_1 q_2 q_3 q_4 | $\begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} m_1 + m_3 s_2^2 + m & & & \\ & m_2 + m_3 s_1^2 + m & & \\ & & m_3 s_2^2 + m & \\ & & & m_3 s_1^2 + m \end{bmatrix}$ <p style="text-align: center;">symmetrisch</p> $m = J_3 / (l_1 + l_2)^2, \quad s_1 = l_1 / (l_1 + l_2), \quad s_2 = l_2 / (l_1 + l_2)$ |
| 2 | <p>Fahrzeugmodell (Absolutkoordinaten)</p> | q_1 q_2 q_3 q_4 q_5 | $\begin{bmatrix} c_1 + c_3 & 0 & -c_3 & -c_3 s_1 & 0 \\ 0 & c_2 + c_4 & -c_4 & +c_4 s_2 & 0 \\ -c_3 & -c_4 & c_3 + c_4 & +c_3 s_1 - c_4 s_2 & 0 \\ -c_3 c_3 & c_4 c_4 & c_3 s_1 - c_4 s_2 & c_3 s_1^2 + c_4 s_2^2 & 0 \\ -c_3 c_4 & c_4 c_3 & c_3 s_1 - c_4 s_2 & c_3 s_1 c_2 + c_4 s_2 c_1 & 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix}$ <p style="text-align: center;">$m = J_3 / (l_1 + l_2)^2$</p> |

Zur Gewinnung der Matrizenelemente wird folgendes Vorgehen empfohlen:

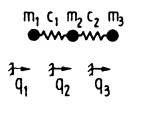
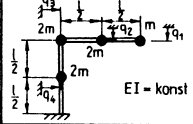
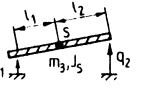
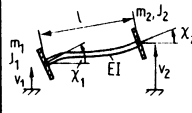
1. Skizze des Systems im deformierten Zustand
2. Eintragung der gewählten verallgemeinerten Koordinaten (einschließlich ihrer positiven Richtungen)
3. Aufstellung der Gleichungen für die kinetische Energie und die Formänderungsenergie, gegebenenfalls unter Berücksichtigung von Zwangsbedingungen
4. Ausführung der Differenziationen gemäß Gln. (6.9) oder (6.10) und (6.15) zur Gewinnung der Matrizenelemente

Die Anwendung des Prinzips von *d'Alembert* (Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen) mit anschließendem Koeffizientenvergleich in den Gleichungen der Form (6.18), (6.19) oder (6.20) ist prinzipiell auch eine geeignete Methode. Sie ist jedoch bei gekoppelten Systemen umständlicher als die genannte energetische Methode, die mit den *Lagrange'schen* Gleichungen 2. Art in enger Verbindung steht.

Substrukturen sind mechanische Teilsysteme, deren mechanisches Verhalten durch bekannte Matrizen beschrieben wird, und die sich zum Aufbau komplizierter Strukturen eignen. Der Grundgedanke entspricht dem auch sonst in der Technik angewendeten Baukastenprinzip. Das dynamische Verhalten eines Gesamtsystems, das aus Baugruppen besteht, die erst bei der Endmontage zusammengefügt werden, lässt sich aus dem Verhalten der einzelnen Baugruppen erklären.

Substrukturen können solche elementaren Teile wie Längs-, Torsions- oder Biegefedern, starre Körper oder Punktmassen sein. Aber auch beliebige Kombinationen davon, wie Feder-Masse-Systeme bestimmter geometrischer Struktur, räumliche Tragwerke, FEM-Modelle von Platten, Scheiben oder Schalen sind als Substrukturen geeignet. Die Matrizen von Substrukturen werden nach den in Abschnitt 6.2.1 beschriebenen Verfahren gewonnen. Tabelle 6.3 stellt davon einige dar.

Tabelle 6.3 Systemmatrizen von Substrukturen der behandelten Beispiele

| Fall-Nr. | Systemskizze | $q^{(r)}$ | Steifigkeitsmatrix \mathbf{C} | Massenmatrix \mathbf{M} |
|----------|---|--|--|---|
| 1 |  | $\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$ | $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1+c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix}$ | $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$ |
| 2 |  | $\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}$ | $\mathbf{C} = \frac{48EI}{97l^3} \begin{bmatrix} 26 & -59 & 9 & -12 \\ -59 & 160 & -54 & 72 \\ 9 & -54 & 74 & -131 \\ -12 & 72 & -131 & 304 \end{bmatrix}$ | $\mathbf{M} = m \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ |
| 3 |  | $\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$ | $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ starrer Körper | $\mathbf{M} = \frac{1}{(l_1+l_2)^2} \begin{bmatrix} J_3+m_3l_2^2 & -J_3+m_3l_1l_2 \\ -J_3+m_3l_1l_2 & J_3+m_3l_1^2 \end{bmatrix}$ |
| 4 |  | $\begin{bmatrix} v_1 \\ x_1 \\ v_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$ | $\mathbf{C} = \frac{2EI}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ +3l & 2l^2 & -3l & l^2 \\ -6 & -3l & 6 & -3l \\ 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix}$ | $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_2 \end{bmatrix}$ |

Der Aufbau des Gesamtsystems erfolgt dadurch, dass die Beziehungen der lokalen Koordinaten der insgesamt R Substrukturen zu den globalen Koordinaten des Gesamtsystems durch Transformationsmatrizen T_r ausgedrückt werden ($r = 1, 2, \dots, R$). Die Matrizen T_r sind Rechteckmatrizen mit nr Zeilen und n Spalten. Eine solche Matrix T_r beschreibt die Koinzidenz (die geometrische Verträglichkeit), d. h. die Zwangsbedingungen zwischen den lokalen und globalen Koordinaten, oder anders ausgedrückt: sie gibt an, wo die Substrukturen miteinander verbunden sind.

Von der r -ten Substruktur mit dem Koordinatenvektor

$$\mathbf{q}^{(r)} = \left(q_1^{(r)}, q_2^{(r)}, \dots, q_{nr}^{(r)} \right)^T \quad (6.23)$$

seien die Massenmatrix M_r und die Federmatrix C_r bekannt. Der Zusammenhang des aus Gl. (6.1) bekannten globalen Koordinatenvektors \mathbf{q} des Gesamtsystems mit dem lokalen Koordinatenvektor der r -ten Substruktur kann allgemein in die Form

$$\mathbf{q}^{(r)} = T_r \mathbf{q}, \quad r = 1, \dots, R \quad (6.24)$$

gebracht werden. Die Matrizen der Bewegungsgleichungen des Gesamtsystems ergeben sich dann folgendermaßen:

$$\mathbf{C} = \sum_{r=1}^R T_r^T C_r T_r, \quad \mathbf{M} = \sum_{r=1}^R T_r^T M_r T_r. \quad (6.25)$$

Sie lassen sich also in folgenden Schritten finden:

1. Zerlegung des Gesamtsystems in R Teilsysteme, deren Matrizen C_r und M_r bekannt sind.
2. Festlegung der globalen Koordinaten \mathbf{q}
3. Beziehungen zwischen den lokalen Koordinaten $\mathbf{q}^{(r)}$ der Substrukturen und den globalen Koordinaten \mathbf{q} durch die Transformations-Matrizen T_r ausdrücken.
4. Globalmatrizen des Gesamtsystems gemäß (6.25) berechnen

6.2.2

Beispiele

6.2.2.1

Gestell/Kraftgrößenmethode

Als Beispiel sind für das in Bild 6.2 skizzierte System, das aus Punktmassen und masselosen Balken besteht, die Matrizen \mathbf{D} , \mathbf{C} und \mathbf{M} aufzustellen.

Gegeben sind die Biegesteifigkeit EI , die Länge l , die Massen m_1 und m_2 und die zu verwendeten Koordinaten q_1 und q_2 .

Die Beziehungen zwischen Kräften und Verschiebungen ergeben sich in der Form (6.4). Die Einflusszahlen können nach Tabelle 6.1 berechnet werden. Zunächst werden in Richtung der Koordinaten $\mathbf{q}^T = (q_1, q_2)$ die Kräfte $\mathbf{g}^T = (Q_1, Q_2)$ angenommen. Sind s_1 und s_2 die Ortskoordinaten zur Beschreibung der Biegemomente (vgl. Tabelle 6.1), so lauten diese:

$$M_1 = Q_1 s_1; \quad M_2 = Q_1 l + Q_2 s_2. \quad (6.26)$$

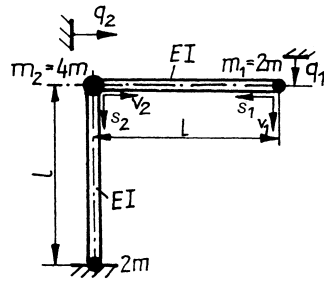


Bild 6.2 Einfachstes Berechnungsmodell eines Gestells

Die Formänderungsenergie (potenzielle Energie) ergibt sich gemäß Tabelle 6.1 für die Biegebeanspruchung zu

$$\begin{aligned} W_{\text{pot}} &= \int_0^l \frac{M_1^2}{2EI} ds_1 + \int_0^l \frac{M_2^2}{2EI} ds_2 \\ &= \frac{1}{2EI} \left[\int_0^l Q_1^2 s_1^2 ds_1 + \int_0^l (Q_1 l + Q_2 s_2)^2 ds_2 \right]. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Die Integration ergibt die potenzielle Energie in der Form von (6.8)

$$W_{\text{pot}} = \frac{1}{2} \frac{4l^3}{3EI} Q_1^2 + \frac{l^3}{2EI} Q_1 Q_2 + \frac{1}{2} \frac{l^3}{3EI} Q_2^2. \quad (6.28)$$

Durch Bildung der ersten Ableitung entsteht entsprechend dem Satz von *Castigliano* zunächst analog (6.4):

$$\frac{\partial W_{\text{pot}}}{\partial Q_1} = q_1 = \frac{4l^3}{3EI} Q_1 + \frac{l^3}{2EI} Q_2 = d_{11} Q_1 + d_{12} Q_2 \quad (6.29)$$

$$\frac{\partial W_{\text{pot}}}{\partial Q_2} = q_2 = \frac{l^3}{2EI} Q_1 + \frac{l^3}{3EI} Q_2 = d_{21} Q_1 + d_{22} Q_2. \quad (6.30)$$

Aus den zweiten Ableitungen folgen dann gemäß (6.10) die Einflusszahlen zu

$$d_{11} = \frac{4l^3}{3EI}; \quad d_{12} = d_{21} = \frac{l^3}{2EI}; \quad d_{22} = \frac{l^3}{3EI}. \quad (6.31)$$

Damit ergibt sich die Matrix \mathbf{D} und nach kurzer Rechnung daraus deren Kehrmatrix \mathbf{C} , vgl. Gl. (6.12):

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{4l^3}{3EI} & \frac{l^3}{2EI} \\ \frac{l^3}{2EI} & \frac{l^3}{3EI} \end{bmatrix} = \frac{l^3}{6EI} \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}^{-1} = \mathbf{C} = \frac{6EI}{7l^3} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}. \quad (6.32)$$

Man überzeuge sich durch die Zahlenrechnung davon, dass $\mathbf{D} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{E}$ erfüllt ist. Die kinetische Energie beträgt

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{q}_2^2. \quad (6.33)$$

Man beachte, dass dabei außer der Vertikalbewegung der Masse m_1 auch deren Horizontalbewegung zu berücksichtigen ist (Bild 6.2). Durch Bildung der partiellen Ableitungen gemäß Gl. (6.15) folgt:

$$m_{11} = m_1; \quad m_{12} = m_{21} = 0; \quad m_{22} = m_1 + m_2.$$

Die Massenmatrix lautet für $m_1 = 2m$ und $m_2 = 4m$ demzufolge

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_1 + m_2 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}. \quad (6.34)$$

Die Federmatrix \mathbf{C} lässt sich unter Benutzung des in 6.2.2.2 behandelten Balkenelements auch direkt gewinnen, vgl. (6.224).

6.2.2.2

Balkenelement/Deformationsmethode

Den Ausgangspunkt bildet ein herausgeschnittenes Balkenelement, an dessen Schnittstellen 1 und 2 die Schnittreaktionen F_{L1} , F_{L2} , F_1 , F_2 , M_1 und M_2 wirken. Die dadurch erreichten Verformungen im lokalen Koordinatensystem sind in Bild 6.3a eingetragen.

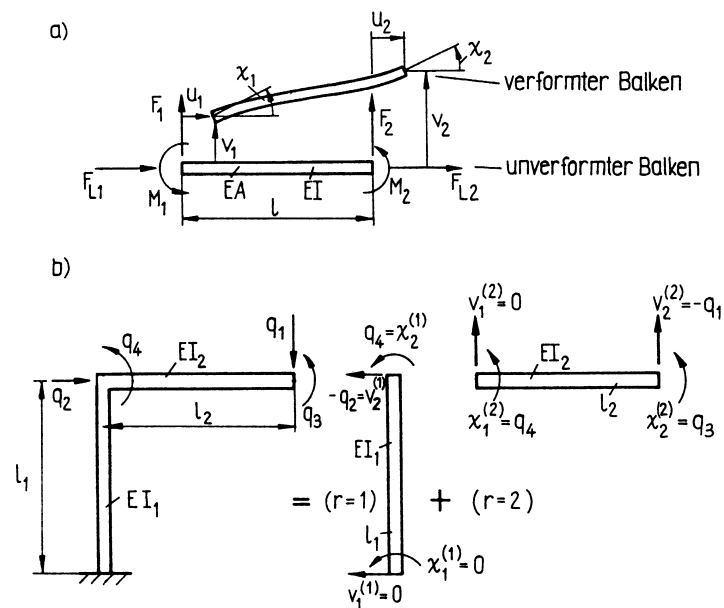


Bild 6.3 Zur Modellierung von Stabtragwerken

a) Kraft- und Deformationsgrößen am Balkenelement

b) Aufteilung eines Gestells in zwei Balkenelemente (Substrukturen $r = 1, 2$)

Das Kräfte- und Momentengleichgewicht liefert drei Gleichungen:

$$F_{L1} + F_{L2} = 0, \quad F_1 + F_2 = 0, \quad M_1 + M_2 + F_2 l = 0. \quad (6.35)$$

Infolge des linearen elastischen Verhaltens des Balkens gilt für die Beziehungen zwischen Kraft- und Verformungsgrößen, die aus der Biegelinie folgen:

$$F_{L2} = \frac{EA}{l}(u_2 - u_1) \quad (6.36)$$

$$\chi_2 = \chi_1 + \frac{F_2 l^2}{2EI} + \frac{M_2 l}{EI}, \quad v_2 = v_1 + \chi_1 l + \frac{F_2 l^3}{3EI} + \frac{M_2 l^2}{2EI}. \quad (6.37)$$

Diese sechs linearen Gleichungen können nach den Kraftgrößen aufgelöst werden. Man findet

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} F_{L1} \\ F_1 \\ M_1 \\ F_{L2} \\ F_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} Al^2/I & 0 & 0 & -Al^2/I & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 6l & 4l^2 & 0 & -6l & 2l^2 \\ -Al^2/I & 0 & 0 & Al^2/I & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 12 & -6l \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \chi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \chi_2 \end{bmatrix} = \mathbf{C}\mathbf{q}. \quad (6.38)$$

Man prüfe, ob (6.36) erfüllt wird oder löse (6.37) nach F_2 und M_2 auf. Vernachlässigt man die Längsverformung, was in den meisten Fällen vertretbar ist, so schrumpft (6.38) wegen $u_1 = u_2 = 0$ zusammen auf

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{2EI}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ 3l & 2l^2 & -3l & l^2 \\ -6 & -3l & 6 & -3l \\ 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \chi_1 \\ v_2 \\ \chi_2 \end{bmatrix} = \mathbf{C}\mathbf{q}. \quad (6.39)$$

In Tabelle 6.3, Fall 4, ist diese Federmatrix mit angegeben.

Die Steifigkeitsmatrix des Gestells, das in Bild 6.3b dargestellt ist, kann aus denjenigen von zwei Balkenelementen mit unterschiedlichen Längen l_r und Biegesteifigkeiten EI_r gewonnen werden. Das Gestell besteht aus $R = 2$ Substrukturen (Balken), vgl. Bild 6.3c.

Die Beziehungen zwischen den lokalen Koordinaten $\mathbf{q}^{(r)}$ und den globalen Koordinaten $\mathbf{q}^T = (q_1, q_2, q_3, q_4)$ kann man unter Beachtung der Rand- und Übergangsbedingungen beider Balkenelemente aufstellen. Die aus Bild 6.3b und c ersichtlichen geometrischen Beziehungen lauten:

$$\begin{aligned} r = 1: & \quad v_1^{(1)} = 0; \quad \chi_1^{(1)} = 0; \quad v_2^{(1)} = -q_2; \quad \chi_2^{(1)} = q_4 \\ r = 2: & \quad v_1^{(2)} = 0; \quad \chi_1^{(2)} = q_4; \quad v_2^{(2)} = -q_1; \quad \chi_2^{(2)} = q_3. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Sie werden durch folgende Matrixgleichungen erfasst:

$$\mathbf{q}^{(1)} = \begin{bmatrix} v_1^{(1)} \\ \chi_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \\ \chi_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_1 \mathbf{q} \quad (6.41)$$

$$\mathbf{q}^{(2)} = \begin{bmatrix} v_1^{(2)} \\ \chi_1^{(2)} \\ v_2^{(2)} \\ \chi_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_2 \mathbf{q}. \quad (6.42)$$

Im Gegensatz zu dem Modell in 6.2.2.1 wurden hier die Drehwinkel q_4 an der Ecke und q_3 am freien Ende in das Modell einbezogen. Bei der Steifigkeitsmatrix der Balkenelemente, die durch (6.39) gegeben ist, muss beachtet werden, dass sich EI_r und l_r für $r = 1$ und $r = 2$ unterscheiden können. Mit den Transformationsmatrizen aus (6.41) und (6.42) kann die Federmatrix des Gesamtsystems gemäß (6.25) berechnet werden ($\beta_r = 2EI_r/l_r^3$, $r = 1, 2$):

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{T}_1^T \mathbf{C}_1 \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2^T \mathbf{C}_2 \mathbf{T}_2 \\ \mathbf{C} &= \frac{2EI_1}{l_1^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 3l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3l_1 & 0 & 2l_1^2 \end{bmatrix} + \frac{2EI_2}{l_2^3} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 3l_2 & 3l_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3l_2 & 0 & 2l_2^2 & l_2^2 \\ 3l_2 & 0 & l_2^2 & 2l_2^2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 6\beta_2 & 0 & 3\beta_2 l_2 & 3\beta_2 l_2 \\ 0 & 6\beta_1 & 0 & 3\beta_1 l_1 \\ 3\beta_2 l_2 & 0 & 2\beta_2 l_2^2 & \beta_2 l_2^2 \\ 3\beta_2 l_2 & 3\beta_1 l_1 & \beta_2 l_2^2 & 2\beta_1 l_1^2 + 2\beta_2 l_2^2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.43)$$

6.2.2.3

Fahrzeug/Energiemethode

Das Beispiel in Tabelle 6.2, Fall 1 und 2 entspricht dem einfachsten Modell eines Fahrzeugs, bei dem die Radmassen berücksichtigt werden. Die Schwerpunktbeziehung wird nur in y -Richtung betrachtet. Bei der Wahl raumfester Koordinaten $\mathbf{q}_2^T = (\xi_1, \xi_2, y_S, \varphi)$ (Fall 2) ist die doppelte kinetische Energie

$$2W_{\text{kin}} = m_1 \dot{\xi}_1^2 + m_2 \dot{\xi}_2^2 + m_3 \dot{y}_S^2 + J_S \dot{\varphi}^2 = \dot{\mathbf{q}}_2^T \mathbf{M}_2 \dot{\mathbf{q}}_2. \quad (6.44)$$

Die potenzielle Energie lässt sich einfacher allein mit den Relativkoordinaten $\mathbf{q}_1^T = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ ausdrücken (Fall 1):

$$2W_{\text{pot}} = c_1 \xi_1^2 + c_2 \xi_2^2 + c_3 \xi_3^2 + c_4 \xi_4^2 = \mathbf{q}_1^T \mathbf{C}_1 \mathbf{q}_1. \quad (6.45)$$

Zwischen den beiden Koordinaten gelten folgende Zwangsbedingungen, die man aus einer geometrischen Betrachtung ableiten kann (Voraussetzung $\varphi \ll 1$):

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\xi_1 + \xi_3 - \xi_2 - \xi_4}{l_1 + l_2}; & y_S &= \frac{l_1(\xi_2 + \xi_4) + l_2(\xi_1 + \xi_3)}{l_1 + l_2} \\ \xi_3 &= y_S + l_1 \varphi - \xi_1; & \xi_4 &= y_S - l_2 \varphi - \xi_2. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Einsetzen von φ und y_S aus Gl. (6.46) in (6.44) liefert

$$2W_{\text{kin}} = m_1 \dot{\xi}_1^2 + m_2 \dot{\xi}_2^2 + m_3 \left[\frac{l_1(\dot{\xi}_2 + \dot{\xi}_4) + l_2(\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_3)}{l_1 + l_2} \right]^2 + \frac{J_S}{(l_1 + l_2)^2} (\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_3 - \dot{\xi}_2 - \dot{\xi}_4)^2 = \dot{\mathbf{q}}_1^T \mathbf{M}_1 \dot{\mathbf{q}}_1. \quad (6.47)$$

Einsetzen von ξ_3 und ξ_4 aus Gl. (6.46) in Gl. (6.45) liefert die potenzielle Energie als Funktion der Absolutkoordinaten:

$$2W_{\text{pot}} = c_1 \xi_1^2 + c_2 \xi_2^2 + c_3 (y_S + l_1 \varphi - \xi_1)^2 + c_4 (y_S - l_2 \varphi - \xi_2)^2 = \mathbf{q}_2^T \mathbf{C}_2 \mathbf{q}_2. \quad (6.48)$$

Aus (6.45) und (6.47) folgen durch die partiellen Ableitungen gemäß (6.9) und (6.15) die Matrizen \mathbf{C}_1 und \mathbf{M}_1 für die Koordinaten \mathbf{q}_1 , vgl. Tabelle 6.2, Fall 1. Aus (6.48) und (6.44) ergeben sich analog die Matrizen \mathbf{C}_2 und \mathbf{M}_2 für die Absolutkoordinaten \mathbf{q}_2 , vgl. Tabelle 6.2, Fall 2. Drückt man die Beziehungen zwischen den beiden Koordinatensystemen durch die Transformationsmatrix \mathbf{T} aus, so gilt

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & l_1 \\ 0 & -1 & 1 & l_2 \end{bmatrix}, \quad (6.49)$$

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{T} \mathbf{q}_2, \quad \mathbf{C}_2 = \mathbf{T}^T \mathbf{C}_1 \mathbf{T}, \quad \mathbf{M}_2 = \mathbf{T}^T \mathbf{M}_1 \mathbf{T},$$

wovon man sich überzeugen möge.

6.2.2.4

Tragwerk, bestehend aus Substrukturen

Als Beispiel für die in Abschnitt 6.2.1 beschriebene Methode, die sich zum Aufstellen der Systemmatrizen bei komplizierten Strukturen eignet, wird das Tragwerk betrachtet, das aus einem Rahmen mit konstanter Biegesteifigkeit und einem elastisch gestützten Schwingungssystem besteht, vgl. Bild 6.4. Bei der Zerlegung in Substrukturen, dem ersten Schritt bei dieser Methode, wird auf die Matrizen in Tabelle 6.3 zurückgegriffen. Dabei kommen $R = 5$ Substrukturen vor.

Der Rahmen kann aus zwei der galgenförmigen Tragwerke zusammengesetzt werden, die dem Fall 2 in Tabelle 6.3 entsprechen. Der oben befindliche Starrkörper, die dritte Substruktur ($r = 3$), entspricht genau Fall 3 in Tabelle 6.3. Die Feder-Masse-Systeme, welche den Starrkörper mit dem Rahmen verbinden, werden als Substrukturen $r = 4$ und $r = 5$ betrachtet. Sie stellen einen Sonderfall von Fall 1 in Tabelle 6.3 dar, wenn dort $m_1 = m_3 = 0$ gesetzt und die Bezeichnung der Massen und Federn passend geändert wird.

Die globalen Koordinaten sind in Bild 6.4 eingetragen. Nun müssen die Beziehungen zwischen den lokalen Koordinaten, die denen von Tabelle 6.3 entsprechen, zu diesen globalen Koordinaten ausgedrückt werden. Die Substruktur $r = 1$ stellt die linke Hälfte des Rahmens dar, und es gelten die Zwangsbedingungen (Koinzidenz):

$$q_1^{(1)} = q_4, \quad q_2^{(1)} = q_3, \quad q_3^{(1)} = q_2, \quad q_4^{(1)} = q_1. \quad (6.50)$$

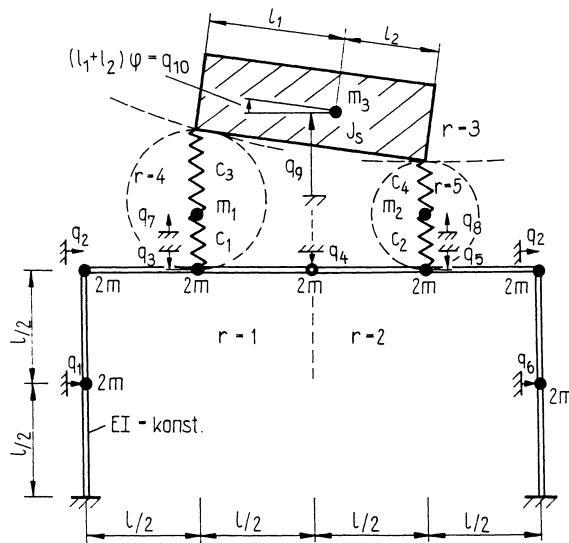


Bild 6.4 Gesamtsystem eines Tragwerks, aufgeteilt in Substrukturen $r = 1, \dots, 5$ mit globalen Koordinaten q_1 und q_{10}

In Anbetracht der $n = 10$ Elemente des Vektors der globalen Koordinaten, können diese Zwangsbedingungen auch durch folgende 4×10 -Transformationsmatrix ausgedrückt werden, vgl. Gl. (6.24):

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.51)$$

Die zweite Substruktur besteht aus demselben „Galgen“, allerdings an der Vertikalachse gespiegelt, sodass sich die rechte Hälfte des Rahmens ergibt. Die Beziehungen zwischen den Koordinaten sind dann für $r = 2$:

$$q_1^{(2)} = q_4, \quad q_2^{(2)} = q_5, \quad q_3^{(2)} = -q_2, \quad q_4^{(2)} = -q_6. \quad (6.52)$$

Damit unterscheidet sich die Transformationsmatrix T_2 von T_1 , aber die Massenmatrizen sind gleich $M_1 = M_2 = M$, und auch die Federmatrizen stimmen überein: $C_1 = C_2 = C$, vgl. Fall 2 in Tabelle 6.3. Die (6.52) entsprechende Transformationsmatrix lautet:

$$T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.53)$$

Der starre Körper (Fall 3 in Tabelle 6.3) ist an seinen beiden Enden mit den anderen Substrukturen gekoppelt, sodass noch eine Transformation nötig ist. Mit den Abkürzungen $s_1 = l_1/(l_1 + l_2)$ und $s_2 = l_2/(l_1 + l_2)$ lautet sie:

$$q_1^{(3)} = q_9 + s_1 q_{10}, \quad q_2^{(3)} = q_9 - s_2 q_{10}. \quad (6.54)$$

Die zugehörige Transformationsmatrix ist

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & s_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -s_2 \end{bmatrix}. \quad (6.55)$$

Weiterhin ist $\mathbf{C}_3 = 0$ und $\mathbf{M}_3 = \mathbf{M}$, vgl. die Massenmatrix von Fall 3 in Tabelle 6.3.

Die Substruktur $r = 4$ ist das linke Feder-Masse-System zwischen dem starren Körper und dem Rahmen, vgl. Bild 6.4. Die Zwangsbedingungen lauten:

$$q_1^{(4)} = -q_3, \quad q_2^{(4)} = q_7, \quad q_3^{(4)} = q_9 + s_1 q_{10} \quad (6.56)$$

und demzufolge gilt:

$$\mathbf{T}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & s_1 \end{bmatrix}. \quad (6.57)$$

Die System-Matrizen folgen aus Tabelle 6.3, Fall 1 und sind mit den in Bild 6.4 benutzten Bezeichnungen für die Parameter zu versehen. Damit gilt:

$$\mathbf{C}_4 = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.58)$$

Auf der rechten Seite befindet sich dieselbe Substruktur (Tabelle 6.3, Fall 1), aber für diese ($r = 5$) gelten die Kopplungsbedingungen

$$q_1^{(5)} = -q_5, \quad q_2^{(5)} = q_8, \quad q_3^{(5)} = q_9 - s_2 q_{10} \quad (6.59)$$

und damit die Transformationsmatrix

$$\mathbf{T}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -s_2 \end{bmatrix}. \quad (6.60)$$

Die Matrizen dieser Substruktur stimmen mit denen für $r = 4$ überein, wenn folgende Substitutionen erfolgen: $c_1 \hat{=} c_2$, $c_3 \hat{=} c_4$, $m_1 \hat{=} m_2$. Die globale Feder- und Massenmatrix ergibt sich gemäß (6.25) mit den bereitgestellten Matrizen.

Zur Verdeutlichung der Zusammenhänge wird dem Leser die Berechnung zumindest eines der Summanden empfohlen, damit die Entstehung der Systemmatri-

zen klar wird. Die System-Matrizen des Gesamtsystems lauten:

$$\frac{\mathbf{C}}{c^*} = \begin{bmatrix} 304 & -131 & 72 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -131 & 148 & -54 & 0 & 54 & -131 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 72 & -54 & 160+\bar{c}_1 & -59 & 0 & 0 & \bar{c}_1 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & -59 & 52 & -59 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 0 & -59 & 160+\bar{c}_2 & -72 & 0 & \bar{c}_2 & 0 & 0 \\ 0 & -131 & 0 & 12 & -72 & 304 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{c}_1 & 0 & 0 & 0 & \bar{c}_1+\bar{c}_3 & 0 & -\bar{c}_3 & -\bar{c}_3s_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{c}_2 & 0 & 0 & \bar{c}_2+\bar{c}_4 & -\bar{c}_4 & \bar{c}_4s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{c}_3 & -\bar{c}_4 & \bar{c}_3+\bar{c}_4 & c_{9\ 10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\bar{c}_3s_1 & \bar{c}_4s_2 & c_{10\ 9} & c_{10\ 10} \end{bmatrix}$$

mit

$$c_{9\ 10} = \bar{c}_3s_1 - \bar{c}_4s_2 = c_{10\ 9}, \quad c_{10\ 10} = \bar{c}_3s_1^2 + \bar{c}_4s_2^2 \quad (6.61)$$

$$c^* = \frac{48EI}{97l^3}, \quad \bar{c}_k = c_k/c^* \quad \text{für } k = 1, 2, 3, 4. \quad (6.62)$$

und

$$\mathbf{M} = \text{diag}(2m, 10m, 2m, 2m, 2m, 2m, m_1, m_2, m_3, J_S/(l_1 + l_2)^2). \quad (6.63)$$

Man sehe sich die Federmatrix einmal in Ruhe an und versuche, sich deren Struktur und die Herkunft der einzelnen Elemente zu erklären. Man findet darin quadratische Untermatrizen die sich teilweise überdecken. Die Kopplungsstellen sind physikalisch erklärbar, wenn man zum Vergleich die Koordinaten in Bild 6.4 betrachtet. Neben der Symmetrie der Federmatrix, die hier natürlich auch erfüllt sein muss, kann man kontrollieren, woher die Elemente mit den \bar{c}_k stammen und ob deren Vorzeichen plausibel sind.

Die Matrizenelemente in der linken oberen Ecke stammen vom Rahmen, während die unten rechts von dem angekoppelten Feder-Masse-System herrühren. Auffällig ist eine Bandstruktur der Federmatrix. Die Erscheinung, dass in der linken unteren und der rechten oberen Ecke der Steifigkeitsmatrix überwiegend Nullen vorkommen, ist für solche Schwinger typisch. Sie ist die Folge der fortlaufenden Nummerierung der im Berechnungsmodell benutzten Koordinaten.

Bei großen Systemen $n > 10$ ergeben sich bedeutende Rechenvorteile, wenn man die Bandstruktur der Matrizen ausnutzt, z. B. bei der Lösung des Eigenwertproblems. Es ist deshalb empfehlenswert, die Koordinaten von Anfang an so einzuführen, dass die Bandbreite minimal wird. Es existieren Algorithmen zur automatischen Bandbreitenminimierung von Matrizen, die man bei ursprünglich beliebiger Koordinaten-Nummerierung (und dadurch bedingter großer Bandbreite) einsetzen kann.

6.2.3

Aufgaben A6.1 bis A6.3

A6.1 Matrizenelemente

Man berechne für das Beispiel in Tabelle 6.2, Fall 1 die Elemente m_{23} und m_{24} der Massenmatrix.

A6.2 Substruktur-Matrizen

Man stelle die Systemmatrizen des Fahrzeugmodells auf, das in Tabelle 6.2, Fall 1 angegeben ist, indem man die in Tabelle 6.3 angegebenen Substruktur-Matrizen anwendet.

A6.3 Massen- und Federmatrix für ein Hubwerk

Zu berechnen sind für das Berechnungsmodell eines Brückenkranes (Bild 6.5) die Elemente der Massenmatrix M und der Federmatrix C für den Koordinatenvektor $\mathbf{q}^T = (x_1, x_2, r\varphi_M/i)$. Man prüfe, ob die Federmatrix singular ist und gebe eine physikalische Deutung.

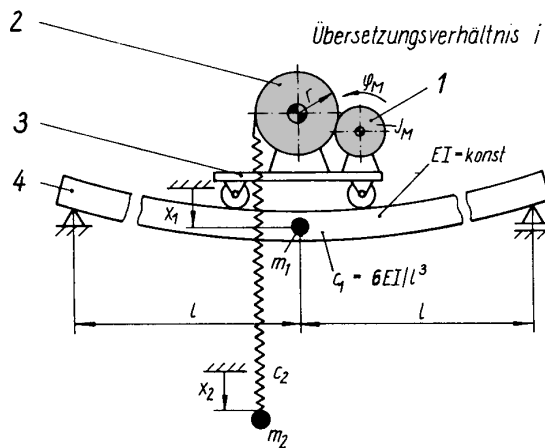


Bild 6.5 Modell eines Brückenkranes zur Berechnung dynamischer Beanspruchungen beim Heben und Senken der Last; 1 Motor, 2 Seiltrommel, 3 Laufkatze, 4 Kranträger

Gegeben:

Reduziertes Trägheitsmoment des Hubwerks J_M

Reduzierte Masse des Krans m_1 (bezogen auf die Stellung der Laufkatze)

Masse der Hublast m_2 , Übersetzungsverhältnis i , Federkonstante des Kranträgers c_1 (bezogen auf die Stellung der Laufkatze), Längsfederkonstante des Seils c_2 , Seiltrommelradius r

Anmerkung: Die Einführung der Größe $r\varphi_M/i$ als verallgemeinerte Koordinate q_3 hat den Vorteil, dass alle Komponenten des Vektors \mathbf{q} (und damit die Elemente von C und M) dimensionsgleich sind.

6.2.4

Lösungen L6.1 bis L6.3

L6.1 Die erste partielle Ableitung der kinetischen Energie liefert zunächst, vgl. Gl. (6.47):

$$\frac{\partial W_{\text{kin}}}{\partial \dot{\xi}_2} = m_2 \dot{\xi}_2 + m_3 \frac{l_1(\dot{\xi}_2 + \dot{\xi}_4) + l_2(\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_3)}{l_1 + l_2} \frac{l_1}{l_1 + l_2} - \frac{J_S}{(l_1 + l_2)^2} (\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_3 - \dot{\xi}_2 - \dot{\xi}_4). \quad (6.64)$$

Nach Umordnung entsteht mit den Abkürzungen

$$s_1 = l_1/(l_1 + l_2); \quad s_2 = l_2/(l_1 + l_2); \quad m = J_S/(l_1 + l_2)^2 \quad (6.65)$$

die Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_{\text{kin}}}{\partial \dot{\xi}_2} &= (m_3 s_1 s_2 - m) \dot{\xi}_1 + (m_2 + m_3 s_1^2 + m) \dot{\xi}_2 \\ &\quad + (m_3 s_1 s_2 - m) \dot{\xi}_3 + (m_3 s_1^2 + m) \dot{\xi}_4 \end{aligned} \quad (6.66)$$

Gemäß Gl. (6.15) folgen daraus die Elemente der Massenmatrix

$$\begin{aligned} \underline{\underline{m_{32}}} = \underline{\underline{m_{23}}} &= \frac{\partial^2 W_{\text{kin}}}{\partial \dot{\xi}_2 \partial \dot{\xi}_3} = \underline{\underline{m_3 s_1 s_2 - m}} \\ \underline{\underline{m_{42}}} = \underline{\underline{m_{24}}} &= \frac{\partial^2 W_{\text{kin}}}{\partial \dot{\xi}_2 \partial \dot{\xi}_4} = \underline{\underline{m_3 s_1^2 + m}} \end{aligned} \quad (6.67)$$

L6.2 Das Gesamtsystem kann man auffassen als eine Kombination der Substrukturen des starren Körpers ($r = 1$, vgl. Tabelle 6.3, Fall 3) und der beiden Feder-Masse-Systeme ($r = 2$ und $r = 3$), deren Matrizen sich als Sonderfall aus Fall 1 in Tabelle 6.3 ergeben. Als globale Koordinaten werden die in Tabelle 6.2, Fall 1 eingezeichneten ξ_k benutzt, die zur Anpassung an die im Abschnitt 6.2.1 verwendete Bezeichnungsweise mit $\xi_k = q_k$ bezeichnet werden.

Die Kopplungen der Substrukturen sind durch folgende Zwangsbedingungen zwischen den lokalen Koordinaten $\mathbf{q}^{(r)}$ und den globalen Koordinaten $\mathbf{q}^T = [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4] = [q_1, q_2, q_3, q_4]$ bestimmt: Substruktur $r = 1$:

$$q_1^{(1)} = q_1 + q_3, \quad q_2^{(1)} = q_2 + q_4. \quad (6.68)$$

Diese beiden Gleichungen lassen sich im Sinne von (6.24) auch mit der Transformationsmatrix \mathbf{T}_1 darstellen, wie man durch Ausmultiplizieren prüfen kann:

$$\mathbf{q}^{(1)} = \begin{bmatrix} q_1^{(1)} \\ q_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.69)$$

Für das linke unten angeordnete Feder-Masse-System, die Substruktur $r = 2$, gelten die Bindungsgleichungen $q_1^{(2)} = 0$, $q_2^{(2)} = q_1$ und $q_3^{(2)} = q_1 + q_3$. Dem entspricht

$$\mathbf{q}^{(2)} = \begin{bmatrix} q_1^{(2)} \\ q_2^{(2)} \\ q_3^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.70)$$

Für die Substruktur $r = 3$, das rechts vorhandene Feder-Masse-System, bestehen die Bindungen $q_1^{(3)} = 0$, $q_2^{(3)} = q_2$, $q_3^{(3)} = q_2 + q_4$. Dafür lautet die Matrix

$$\mathbf{T}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.71)$$

Für die Massenparameter der ersten Substruktur müssen die Bezeichnungen eingeführt werden, die dem Gesamtsystem entsprechen, vgl. Fall 3 in Tabelle 6.3 und Fall 1 in

Tabelle 6.2. Es sind also äquivalent $J_S/(l_1 + l_2)^2 = m$, $l_1/(l_1 + l_2) = s_1$, $l_2/(l_1 + l_2) = s_2$. Damit erhält die Massenmatrix der ersten Substruktur die Form

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} m_3 s_2^2 + m & m_3 s_1 s_2 - m \\ m_3 s_1 s_2 - m & m_3 s_1^2 + m \end{bmatrix}. \quad (6.72)$$

Da der starre Körper keine Federn enthält, gilt $\mathbf{C}_1 = \mathbf{0}$. Für die Substruktur $r = 2$ gelten bezüglich des Gesamtsystems für die Masse- und Federparameter die Zuordnungen, vgl. Fall 1 in Tabelle 6.3 und das Bild in Tabelle 6.2, Fall 1: $m_1 = 0$, $m_2 \hat{=} m_1$, $m_3 = 0$, $c_1 \hat{=} c_1$, $c_2 \hat{=} c_3$. Deshalb nehmen die Matrizen folgende Formen an:

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.73)$$

Analog ergeben sich für die Substruktur $r = 3$ wegen der Beziehungen $m_1 = 0$, $m_2 \hat{=} m_2$, $m_3 = 0$, $c_1 \hat{=} c_2$, $c_2 \hat{=} c_4$ die Matrizen

$$\mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_4 & -c_4 \\ 0 & -c_4 & c_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.74)$$

Führt man mit all diesen Matrizen die Multiplikation und Summation gemäß Gl. (6.25) aus, so erhält man die in Tabelle 6.2, Fall 1 angegebene Feder- und Massenmatrix.

L6.3 Die Translationsenergie von Kran und Last und die Rotationsenergie des Motors ergeben die gesamte kinetische Energie

$$2W_{\text{kin}} = m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2 + J_M \dot{\phi}_M^2 = m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{i^2 J_M}{r^2} \left(\frac{r \dot{\phi}_M}{i} \right)^2. \quad (6.75)$$

Die potenzielle Energie bezüglich der statischen Ruhelage von Kran und Last entspricht der Formänderungsenergie innerhalb der Kranbrücke und des Seils. Das Seil wird um die Länge $(x_2 - x_1 + r\phi_M/i)$ gedehnt. Man überlege sich die einzelnen Vorzeichen, indem man jeweils die anderen Koordinaten null setzt. Somit gilt:

$$2W_{\text{pot}} = c_1 x_1^2 + c_2 (x_2 - x_1 + r\phi_M/i)^2$$

Die ersten partiellen Ableitungen der Energien sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_{\text{kin}}}{\partial \dot{x}_1} &= m_1 \dot{x}_1; & \frac{\partial W_{\text{pot}}}{\partial x_1} &= c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1 + r\phi_M/i) \\ \frac{\partial W_{\text{kin}}}{\partial \dot{x}_2} &= m_2 \dot{x}_2; & \frac{\partial W_{\text{pot}}}{\partial x_2} &= c_2 (x_2 - x_1 + r\phi_M/i) \\ \frac{\partial W_{\text{kin}}}{\partial \left(\frac{r \dot{\phi}_M}{i} \right)} &= \frac{i^2 J_M}{r^2} \left(\frac{r \dot{\phi}_M}{i} \right); & \frac{\partial W_{\text{pot}}}{\partial \left(\frac{r \phi_M}{i} \right)} &= c_2 (x_2 - x_1 + r\phi_M/i). \end{aligned} \quad (6.76)$$

Gemäß Gln. (6.9) und (6.15) ergeben sich dann die Matrizen bezüglich des angegebenen Vektors \mathbf{q} , dessen Elemente dimensionsgleich gewählt wurden:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & i^2 J_M / r^2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 & c_2 \\ -c_2 & c_2 & c_2 \end{bmatrix}. \quad (6.77)$$

Da sich die Determinante $\det C = 0$ ergibt, ist dieses Gleichungssystem singular. Die mechanische Ursache dafür ist, dass in dem System eine ungehinderte Bewegung möglich ist, ohne dass elastische Rückstellkräfte auftreten. Im vorliegenden Fall kann sich die Hubmasse m_2 gemeinsam mit dem Motor (J_M) frei bewegen (Starrkörperbewegung). Die Folge dieser Singularität ist, wie schon beim freien Torsionsschwinger erwähnt wurde, dass die erste Eigenfrequenz null wird, vgl. Abschnitt 4.2.

6.3 Freie ungedämpfte Schwingungen

6.3.1 Eigenfrequenzen, Eigenformen, Eigenkräfte

Die bisher betrachteten Bewegungsgleichungen (6.18) bis (6.22) besitzen symmetrische Massen-, Steifigkeits- und Nachgiebigkeitsmatrizen. Man kann zeigen, dass bei der Bewegung solcher Systeme die Summe aus kinetischer und potenzieller Energie konstant bleibt, d. h. dass die durch die Anfangsbedingungen eingeleitete Energie konserviert wird. Im Gegensatz zu gedämpften oder angefachten Systemen, bei denen die Energiesumme sich während der Bewegung ändert, werden diese als *konservative* Systeme bezeichnet.

Wird ein System aus seiner Gleichgewichtslage (die bei den Betrachtungen in Abschnitt 6.2 bei $\mathbf{q} = \mathbf{o}$ vorausgesetzt wurde) ausgelenkt und sich selbst überlassen, so führt es so genannte freie Schwingungen aus. Die freien Schwingungen sind eine Überlagerung der verschiedenen Eigenschwingungen des Systems, die wiederum durch die Eigenfrequenzen und Eigenformen charakterisiert werden. Bevor die freien Schwingungen behandelt werden, soll näher auf die *Eigenschwingungen* eingegangen werden.

Mathematisch betrachtet sind die Eigenschwingungen die allgemeinen Lösungen der homogenen Bewegungsgleichungen. Zunächst werden die Gln. (6.18) bis (6.20) betrachtet. Im Ansatz

$$\mathbf{q} = \mathbf{v} \exp(j\omega t), \quad \ddot{\mathbf{q}} = -\omega^2 \mathbf{v} \exp(j\omega t) \quad (6.78)$$

enthält der Vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T$ die Amplituden der harmonischen Bewegungen aller Koordinaten $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$ mit einer zunächst noch unbekanntem Eigenkreisfrequenz ω . Man erhält nach kurzen Umformungen

$$(\mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{v} = \mathbf{o}, \quad (6.79)$$

$$(\mathbf{DM} - \frac{1}{\omega^2} \mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{o}, \quad (6.80)$$

$$(\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{E})\mathbf{v} = \mathbf{o}, \quad (6.81)$$

nachdem man diese Gleichungen durch $\exp(j\omega t)$ dividiert hat. Das sind homogene lineare Gleichungssysteme für die Unbekannten v_1, v_2, \dots, v_n . Alle drei Formen drücken denselben physikalischen Sachverhalt aus. Man spricht in der Mathematik vom *allgemeinen* Eigenwertproblem, wenn die Form von Gl. (6.79) auftritt, also