

## 4 Elektrodynamik

Die Kapitel 2 und 3 haben gezeigt, dass sich elektrostatische und magnetostatische Probleme völlig unabhängig voneinander behandeln lassen. Gewisse formale Analogien erlauben zwar, weitgehend identische Rechentechniken zur Lösung der Grundaufgaben anzuwenden, führten jedoch nicht zu einer direkten Abhängigkeit. Dies wird nun anders bei der Betrachtung von zeitabhängigen Phänomenen, d. h., die Entkopplung von magnetischen und elektrischen Feldern wird aufgehoben. Man sollte deshalb ab jetzt von **elektromagnetischen** Feldern reden. Verständlich wird die enge Korrelation zwischen magnetischen und elektrischen Feldern im Rahmen der Relativitätstheorie.

### 4.1

## 4.1 Maxwell-Gleichungen

Wir wollen zunächst die fundamentalen Feldgleichungen der **Elektrostatik**

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \varrho; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$$

bzw. der **Magnetostatik**

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}$$

auf zeitabhängige Phänomene verallgemeinern. Dabei soll wiederum eine experimentell eindeutig verifizierte Tatsache den Ausgangspunkt unserer Überlegungen bilden.

### ➤ 4.1.1 Faradaysches Induktionsgesetz

Das Biot-Savart-Gesetz (3.23) enthält die Aussage, dass eine Stromdichte  $\mathbf{j}$  eine magnetische Induktion  $\mathbf{B}$  erzeugt. Faraday befasste sich im Jahre 1831 mit dem Problem, ob umgekehrt mithilfe von  $\mathbf{B}$  auch Strom erzeugt werden kann. Seine berühmten Experimente zum Verhalten von Strömen in zeitlich veränderlichen Magnetfeldern führten zu den folgenden Beobachtungen: In einem Leiterkreis  $C_1$  wird ein Strom erzeugt, wenn

1. relativ zu diesem ein permanenter Magnet bewegt wird,
2. ein zweiter Stromkreis  $C_2$  relativ zum ersten bewegt wird,
3. der Strom in  $C_2$  geändert wird.

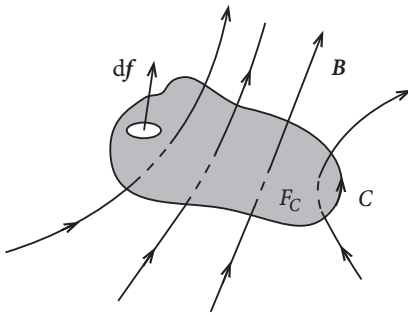
Die direkte experimentelle Beobachtung betrifft elektrische Ströme. Im Gültigkeitsbereich des *ohmschen Gesetzes* (3.9),

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E},$$

überträgt sich diese unmittelbar auf elektrische Felder. Wir wollen die faradayschen Beobachtungen in einer mathematischen Formel zusammenfassen.

## Definition 4.1.1

4.1.1



**Abb. 4.1.** Skizze zur Definition des magnetischen Flusses

## Elektromotorische Kraft EMK:

$$\text{EMK} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}, \quad (4.1)$$

Magnetischer Fluss durch die Fläche  $F_C$ :

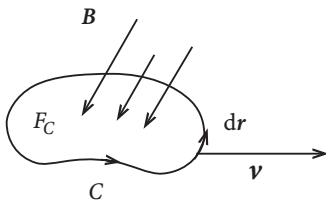
$$\Phi = \int_{F_C} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f}. \quad (4.2)$$

Die faradayschen Experimente *beweisen* die Proportionalität zwischen  $\dot{\Phi}$  und EMK. **Faradaysches Induktionsgesetz:**

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -k \frac{d}{dt} \int_{F_C} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f}. \quad (4.3)$$

Dieses Gesetz gilt nicht nur, wenn  $C$  ein tatsächlicher Leiterkreis ist, sondern auch dann, wenn  $C$  eine fiktive, geschlossene, geometrische Schleife darstellt.

Wir müssen noch die Proportionalitätskonstante  $k$  festlegen. Dazu benutzen wir die folgende Überlegung:



**Abb. 4.2.** Einfache Anordnung (magnetische Induktion, geschlossener Stromkreis) zur Festlegung der Konstanten  $k$  im faradayschen Induktionsgesetz (4.3)

Der Stromkreis  $C$ , in dem der induzierte Strom beobachtet wird, bewege sich mit der konstanten Geschwindigkeit  $v$  relativ zum Labor (Abb. 4.2). Man hat nun zu beachten, dass im faradayschen Induktionsgesetz (4.3) mit  $E$  das Feld bei  $r$  im **mitbewegten** Be-

zugssystem gemeint ist, in dem das Leiterelement  $dr$  ruht. Das totale Zeitdifferential auf der rechten Seite von (4.3) kann auf zwei Arten beitragen:

- $\frac{d}{dt}$  :
- 1) explizite zeitliche  $\mathbf{B}$  – Änderung ,
  - 2) Positionsänderung des Leiterkreises .

Formal sieht man dies wie folgt. Es gilt

$$\frac{d}{dt}\mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

und auch

$$\text{rot}(\mathbf{B} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \mathbf{B} \text{ div } \mathbf{v} - \mathbf{v} \text{ div } \mathbf{B} = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{B} ,$$

da  $\mathbf{v}$  nach Richtung und Betrag konstant sein soll. Dies bedeutet:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} + \text{rot}(\mathbf{B} \times \mathbf{v}) .$$

Der stokesche Satz liefert:

$$\int_{F_C} d\mathbf{f} \cdot \text{rot}(\mathbf{B} \times \mathbf{v}) = \oint_C d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) = \oint_C \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{r}) .$$

Für die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses gilt also:

$$\frac{d}{dt} \int_{F_C} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} = \underbrace{\int_{F_C} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{f}}_{\cong 1)} + \underbrace{\oint_C \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{r})}_{\cong 2)} . \quad (4.4)$$

Damit wird aus (4.3):

$$\oint_C [\mathbf{E} - k(\mathbf{v} \times \mathbf{B})] \cdot d\mathbf{r} = -k \int_{F_C} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{f} . \quad (4.5)$$

In einem zweiten Gedankenexperiment fixieren wir den Leiterkreis irgendwo im Raum. Dann ist das Feld im Ruhesystem des Leiters mit dem vom Labor aus beobachteten Feld  $\mathbf{E}'$  identisch:

$$\oint_C \mathbf{E}' \cdot d\mathbf{r} = -k \int_{F_C} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{f} . \quad (4.6)$$

Der Vergleich von (4.5) und (4.6) liefert:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' + k(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) . \quad (4.7)$$

Entscheidende Voraussetzung für die Ableitung dieser Beziehung war die Annahme, dass das faradaysche Gesetz (4.3) in allen mit konstanten Geschwindigkeiten  $\mathbf{v}$  relativ zueinander bewegten Bezugssystemen gleichermaßen gültig, d. h.

galilei-invariant

ist (s. (2.63), Bd. 1). Das ist im nicht-relativistischen Bereich  $v^2/c^2 \ll 1$  eine erlaubte Annahme. Um nun endgültig  $k$  festzulegen, betrachten wir die Kraft auf eine einzelne Punktladung  $q$ , die sich in dem bewegten Leiter in Ruhe befinden möge. Sie erfährt dann die Kraft

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} .$$

Vom Labor aus gesehen, stellt die Punktladung einen Strom dar,

$$\mathbf{j} = q\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - R_0) ,$$

auf den die magnetische Induktion  $\mathbf{B}$  nach (3.24) die Kraft

$$\int d^3r (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

ausübt. Die gesamte, auf das Teilchen wirkende Kraft ist dann vom Labor aus gesehen:

$$\mathbf{F}' = q[\mathbf{E}' + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] .$$

Die Galilei-Invarianz fordert  $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$ , also

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' + (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) . \quad (4.8)$$

Diese wichtige Beziehung für das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  in einem relativ zum Labor mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bewegten Koordinatensystem macht die enge Verknüpfung von magnetischen und elektrischen Feldern deutlich. Man beachte jedoch, dass sie wegen der angenommenen Galilei-Invarianz nur nicht-relativistisch korrekt ist.

Über (4.7) und (4.8) ist schließlich auch die Konstante  $k$  im Induktionsgesetz (4.3) festgelegt:

$$k = 1 , \quad (\text{SI}) . \quad (4.9)$$

Das Induktionsgesetz lautet damit endgültig:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{d}{dt} \int_{F_C} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{f} . \quad (4.10)$$

Nehmen wir an, dass das Bezugssystem dem Ruhesystem des Leiters entspricht, sodass also  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  in demselben System definiert sind, dann können wir (4.10) mit dem stokeschen Satz umformen zu:

$$\int_{F_C} d\mathbf{f} \cdot (\text{rot } \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}}) = 0 .$$

Dies gilt für beliebige Flächen  $F_C$ . Demnach können wir weiter schließen:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} . \quad (4.11)$$

Dies ist die Verallgemeinerung der homogenen Maxwell-Gleichung der Elektrostatik (2.188) auf zeitabhängige Phänomene.

#### 4.1.2 Maxwell'sche Ergänzung

Fassen wir einmal die Grundgleichungen zusammen, die uns bislang zur Beschreibung elektromagnetischer Phänomene zur Verfügung stehen:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \varrho \quad (\text{Coulomb}) ,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} \quad (\text{Faraday}) ,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad (\text{Ampère}) ,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 .$$

Bis auf das faradaysche wurden alle diese Gesetze aus Experimenten gefolgert, die statische Ladungsverteilungen bzw. stationäre Ströme betreffen. Es ist deshalb nicht verwunderlich, dass sich für nicht-stationäre Felder noch Widersprüche ergeben können. Dies ist in der Tat beim ampèreschen Gesetz der Fall. Wir hatten ja bei der Diskussion der Magnetostatik in der Materie in Abschn. 3.4 das Magnetfeld  $\mathbf{H}$  bewusst ohne den Term  $\dot{\mathbf{P}}$  eingeführt, da wir im Zusammenhang mit (3.68) nur an magnetostatischen Phänomenen interessiert waren. Die Beziehung  $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}$  kann also gar nicht allgemein gültig sein. Das lässt sich durch Anwendung der Divergenz auf diese Gleichung unmittelbar verdeutlichen:

$$0 = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{div} \mathbf{j} .$$

Bei nicht-stationären Strömen ist das ein Widerspruch zur Kontinuitätsgleichung (3.5):

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{\partial \varrho}{\partial t} .$$

Maxwell löste diesen Widerspruch durch den folgenden Ansatz, den man die **maxwellsche Ergänzung** nennt:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_0 . \quad (4.12)$$

$\mathbf{j}_0$  ist zunächst ein hypothetischer Zusatzstrom, für den gelten muss:

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_0 = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \operatorname{div} \mathbf{j} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} = \operatorname{div} \dot{\mathbf{D}} .$$

Der erwähnte Widerspruch ist also behoben, wenn wir die ampèresche Beziehung durch

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \dot{\mathbf{D}} \quad (4.13)$$

ersetzen. Der statische Grenzfall ist offensichtlich enthalten. Nach Maxwell nennt man  $\dot{\mathbf{D}}$  den

#### Verschiebungsstrom.

Wir haben hier die Erweiterung der Maxwell-Gleichungen auf zeitabhängige Phänomene gleich für die makroskopischen Feldgleichungen durchgeführt. In der Elektro- und Magnetostatik sind wir bei der Herleitung der makroskopischen Feldgleichungen jeweils zunächst von den entsprechenden Maxwell-Gleichungen des Vakuums ausgegangen und haben diese dann für die Materie passend verallgemeinert. So hätten wir auch hier vorgehen können. Dieselbe Überlegung wie oben (*maxwellsche Ergänzung*) hätte anstelle von (4.13) für das Vakuum zunächst ergeben:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \dot{\mathbf{E}} .$$

Von dieser Beziehung nimmt man dann wieder an, dass sie mikroskopisch universell ist, d. h. in der Materie gelten würde, wenn man nur die benötigten mikroskopischen Ströme kennen würde:

$$\operatorname{rot} \mathbf{b} = \mu_0 \mathbf{j}_m + \varepsilon_0 \mu_0 \dot{\mathbf{e}} .$$

Mit dem Mittelungsprozess (2.179) wird daraus die makroskopische Gleichung:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \bar{\mathbf{j}}_m + \varepsilon_0 \mu_0 \dot{\mathbf{E}} .$$

Die gemittelte Stromdichte  $\bar{\mathbf{j}}_m$  haben wir für (3.68) berechnet:

$$\bar{\mathbf{j}}_m = \mathbf{j}_f + \dot{\mathbf{P}} + \operatorname{rot} \mathbf{M} .$$

Damit folgt:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}) = \mu_0 \mathbf{j}_f + \mu_0 (\varepsilon_0 \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{P}}) .$$

Benutzen wir noch die Definitionen (2.187) und (3.69) für die Hilfsfelder  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{H}$ , so folgt in der Tat (4.13). Man beachte, dass in (4.13) mit  $\mathbf{j}$  stets die *freie* Stromdichte gemeint ist. Der Index  $f$  wird ab jetzt unterdrückt.

Damit haben wir den vollständigen Satz elektromagnetischer Grundgleichungen zusammen:

**Maxwell-Gleichungen:**

$$\text{Homogen:} \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (4.14)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}} = 0 \quad (4.15)$$

$$\text{Inhomogen:} \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \varrho \quad (4.16)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \dot{\mathbf{D}} = \mathbf{j} \quad (4.17)$$

$$\text{Materialgleichungen:} \quad \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \longrightarrow \mu_r \mu_0 \mathbf{H} \quad (4.18)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \longrightarrow \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E} \quad (4.19)$$

↑  
lineares Medium

### ➤ 4.1.3 Elektromagnetische Potentiale

Die typische Aufgabenstellung der Elektrodynamik besteht darin, mithilfe der Maxwell-Gleichungen das von vorgegebenen Ladungs- und Stromdichteverteilungen erzeugte elektromagnetische Feld zu berechnen. Dabei können wir direkt von den Maxwell-Gleichungen ausgehen, d. h. ein gekoppeltes System von vier partiellen Differentialgleichungen **erster** Ordnung lösen. Manchmal erscheint es jedoch bequemer, Potentiale ( $\varphi, \mathbf{A}$ ) einzuführen, die die homogenen Maxwell-Gleichungen *automatisch* erfüllen, dafür aber die inhomogenen Gleichungen in einen Satz von zwei partiellen Differentialgleichungen **zweiter** Ordnung überführen. Das Konzept ist uns von der Elektrostatik her schon bekannt.

Die homogene Maxwell-Gleichung

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

ist trivialerweise gelöst, wenn wir wie in der Magnetostatik (3.34) die magnetische Induktion als Rotation eines Vektorfeldes, des

Vektorpotentials  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ ,

ansetzen:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) . \quad (4.20)$$

Wir setzen dieses in die zweite homogene Maxwell-Gleichung (4.15) ein,

$$\operatorname{rot}(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{A}}) = 0 ,$$

wodurch sich für das elektrische Feld der folgende Ansatz anbietet:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\varphi(\mathbf{r}, t) - \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) . \quad (4.21)$$