Mengen und Zahlenarten

Wir beginnen ganz vorsichtig, indem wir uns mit zwei für die Mathematik grundlegenden Dingen befassen, mit Mengen und mit Zahlen.

1.1 Mengen

Zu Anfang eines Kurses frage ich manchmal die Studenten, auf welche mathematischen Objekte sie wohl zuerst in ihrem Leben gestoßen sind. Die Antwort ist immer die gleiche: ob man Bauklötze zählt oder anfängt, sich für Hausnummern zu interessieren, in jedem Fall hat man es zuerst mit Zahlen zu tun. So naheliegend diese Antwort auch ist, sie ist leider ganz falsch, denn ohne es zu wissen begegnet jedes Kleinkind dem Prinzip der *Menge*. Unter den zahllosen Eindrücken, denen es ausgesetzt ist, beginnt es sehr früh zu selektieren und bildet Einheiten aus Dingen oder auch Menschen, die ihm zusammengehörig erscheinen. Vater und Mutter gehören irgendwie zusammen, auch Geschwister und Großeltern mögen dazukommen, und schon hat das Kind eine Menge gebildet, denn das heißt nur, daß wir verschiedene Objekte zu einer Einheit zusammenfassen. Deshalb hat Georg Cantor gegen Ende des neunzehnten Jahrhunderts Mengen folgendermaßen definiert.

1.1.1 Definition Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens – welche die Elemente der Menge genannt werden – zu einem Ganzen.

Ich werde mich jetzt nicht auf eine Diskussion darüber einlassen, was ein Objekt unseres Denkens sein mag. Für uns ist im Moment nur wichtig, daß man Mengen erhält, indem man verschiedene Elemente zusammenfaßt. Man kann daher Mengen dadurch beschreiben, daß man ihre Elemente angibt. So sind zum Beispiel die Menge aller Turnschuhe in einem bestimmten Raum oder die Menge aller Segelboote auf dem Bodensee durchaus zulässige und sinnvolle Mengen. Von größerer Bedeutung sind aber Mengen mit mathematisch interessanten Objekten. Wir schauen uns ein paar Beispiele solcher Mengen an und können uns dabei gleich überlegen, wie man Mengen aufschreibt.

1.1.2 Beispiele

(i)

$$A = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Diese Menge besteht offenbar aus den ersten vier natürlichen Zahlen und hat den Namen A. Die Form, eine Menge aufzuschreiben, indem man einfach sämtliche Elemente zwischen zwei geschweifte Klammern schreibt, heißt aufzählende Form.

(ii)

$$\begin{aligned} A &= \{x | x \text{ ist eine natürliche Zahl zwischen 1 und 4}\} \\ &= \{x; x \text{ ist eine natürliche Zahl zwischen 1 und 4}\}. \end{aligned}$$

Hier haben wir die gleiche Menge wie in Beispiel (i), nur anders geschrieben, indem eine Eigenschaft der Elemente beschrieben wird. Diese Schreibweise ist also so zu verstehen: A ist die Menge aller x, für die gilt, daß x eine natürliche Zahl zwischen 1 und 4 ist. Dabei spielt es keine Rolle, ob man einen senkrechten Strich, ein Semikolon oder vielleicht einen Doppelpunkt verwendet.

(iii)

$$A = \{1, \ldots, 4\}.$$

Manchmal verzichtet man auf die genaue Beschreibung einer Menge in der Annahme, daß jeder weiß, was gemeint ist. Man sollte aber auch wirklich nur in diesem Fall eine so laxe Schreibweise wählen, denn was kann man zum Beispiel unter der Menge

$$B = \{1, 7, 95, \ldots, 217\}$$

verstehen? Hier ist offenbar sehr unklar, welche Elemente durch die drei Punkte vertreten werden sollen.

(iv)

$$C = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Sie sehen nun die Menge der natürlichen Zahlen vor sich, auf die wir später noch zu sprechen kommen werden. Im Gegensatz zu den bisher betrachteten Mengen hat sie unendlich viele Elemente.

(v)

$$D = \{A, \{2, 3\}, \{x | x \text{ ist ein Turnschuh}\}, C\}.$$

Wie viele Elemente hat die Menge D? Man neigt dazu, unendlich viele zu antworten, weil ja schon C unendlich viele Elemente vorweisen kann, aber das stimmt nicht. D hat nur vier Elemente, nämlich A, $\{2, 3\}$, $\{x | x$ ist ein Turnschuh$\}$ und C. Die Elemente von D sind also selbst wieder Mengen. Das schadet gar nichts, denn in unserer Definition 1.1.1 haben wir nur verlangt, daß *irgendetwas* zu einer Menge zusammengefaßt wird – warum also nicht vier Mengen zu Elementen einer fünften machen?

Wir sollten noch ein Zeichen einführen, das auf kurze Weise die Beziehung zwischen einem Element und einer Menge beschreibt.

1.1.3 Definition Ist A eine Menge und x ein Element von A, so schreibt man: $x \in A$. Ist x kein Element von A, so schreibt man $x \notin A$.

1.1.4 Beispiele Verwenden wir die Mengen aus 1.1.2, so gilt $1 \in A$ und $2 \in A$, aber $17 \notin A$. Dagegen ist $17 \in C$. Weiterhin ist $A \in D$ und $\{2, 3\} \in D$, aber $2 \notin D$ und $3 \notin D$.

Nun habe ich schon mehrmals eine Form zum Aufschreiben einer Menge benutzt, die eine eigene Definition verdient, nämlich die beschreibende Form.

1.1.5 Definition Ist E eine Eigenschaft, die ein Element haben kann oder auch nicht, so beschreibt man die Menge der E erfüllenden Elemente durch

$$A = \{x | x \text{ hat Eigenschaft } E\}.$$

Diese Form heißt beschreibende Form.

Beispiele für die beschreibende Form haben Sie schon in 1.1.2 (ii) und 1.1.2 (v) gesehen. Dabei war E die Eigenschaft, natürliche Zahl zwischen eins und vier bzw. ein Turnschuh zu sein.

Manchmal hat man eine recht große Menge gegeben, interessiert sich aber nur für einen Teil von ihr. So ist zum Beispiel die Menge der natürlichen Zahlen eine feine Sache, aber wenn Sie sie in einem Rechner speichern sollen, werden Sie feststellen, daß nur endlich viele Zahlen in Ihren Rechner passen, so daß Sie gezwungen sind, einen Teil der gesamten Zahlenmenge auszuwählen. Solche Teile haben den natürlichen Namen *Teilmenge*.

1.1.6 Definition Sind A und B Mengen, so heißt A Teilmenge von B, falls jedes Element von A auch Element von B ist. Man schreibt: $A \subseteq B$ und spricht: A ist Teilmenge von B, oder auch: A ist enthalten in B. Falls A keine Teilmenge von B ist, schreibt man: $A \not\subseteq B$.

Stellt man sich A und B als Ovale auf dem Papier vor, so zeigt Abbildung 1.1, was es heißt eine Teilmenge zu sein.

Offenbar ist jeder Punkt im inneren Oval A auch ein Punkt des großen Ovals B, das heißt $A \subseteq B$. Wir sehen uns aber noch ein paar Zahlenbeispiele an.

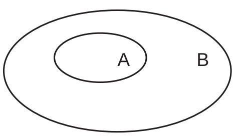

Abb. 1.1. Teilmengen

1.1.7 Beispiele

(i) Es sei $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$ und $B = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Dann ist $A \subseteq B$. In Worten gesagt: jede gerade Zahl ist auch eine natürliche Zahl.

(ii) Es sei wieder $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$, aber $C = \{3, 4, 5, 6, \ldots\}$. Dann ist $A \not\subseteq C$, denn $2 \in A$, aber $2 \notin C$.

Wie Sie sehen, muß man zum Nachweis der Teilmengeneigenschaft jedes Element aus der kleineren Menge daraufhin überprüfen, ob es auch in der größeren Menge liegt. Falls es auch nur ein Element aus A gibt, das nicht in B liegt, haben wir schon $A \not\subseteq B$ gezeigt. Man darf daraus aber nicht den vorschnellen Schluß ziehen, daß $B \subseteq A$ gilt; im allgemeinen folgt aus $A \not\subseteq B$ einfach gar nichts.

Noch ein Wort zum Teilmengensymbol $\subseteq$. Manche schreiben dafür auch $\subset$ und meinen genau das gleiche wie ich mit $\subseteq$. Andere wiederum benützen $\subset$, um zu beschreiben, daß zwar A Teilmenge von B ist, aber nicht $A = B$ gilt. In diesem Fall nennt man A eine echte Teilmenge von B. Für diesen Sachverhalt verwende ich allerdings, um die Verwirrung nicht noch größer zu machen, kein besonderes Zeichen.

Bevor wir eine Reihe von Folgerungen über Teilmengen notieren, möchte ich Ihnen noch eine ganz besondere Menge vorstellen. Stellen Sie sich vor, Sie fragen mich nach meinem Wissen über Mathematik. Dann kann ich Ihnen dies und das erzählen, und mein Wissen bildet eine Menge von Sätzen. Möchten Sie meinen Kenntnisstand über organische Chemie erfahren, so wird die neue Wissensmenge aus erheblich weniger Sätzen bestehen als die vorherige, und falls Sie mich über tibetanische Schriftzeichen examinieren, weiß ich gar nichts, die Menge meines Wissens ist leer. Um sich hier lästige Fallunterscheidungen zu ersparen und auch dann von einer Menge sprechen zu können, wenn keine Elemente vorhanden sind, betrachtet man auch die sogenannte leere Menge als zulässig, die überhaupt kein Element enthält. Man schreibt dafür $\emptyset$ oder auch $\{\}$.

Wir notieren nun:

1.1.8 Bemerkung

(i) Für jede Menge A ist $A \subseteq A$.

(ii) Für jede Menge A ist $\emptyset \subseteq A$.

(iii) Aus $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$ folgt $A \subseteq C$.

(iv) Ist $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$, dann folgt $A = B$.

Damit Sie sich langsam daran gewöhnen, werde ich diese Aussagen auch beweisen, obwohl sie einigermaßen intuitiv einsehbar sind.

Beweis

(i) Laut Definition 1.1.6 müssen wir zeigen, daß jedes Element $x \in A$ auch ein Element $x \in A$ ist, aber das ist klar.

(ii) Auch hier müssen wir zeigen, daß jedes Element der leeren Menge auch Element von A ist. Da die leere Menge aber keine Elemente hat, werden Sie schwerlich eines finden können, das *nicht* in A liegt. Folglich ist $\emptyset \subseteq A$.

(iii) Das Schema ist wieder dasselbe: wir müssen zeigen, daß jedes Element von A auch Element von C ist. Dazu nehmen wir irgendein beliebiges Element $x \in A$. Da A Teilmenge von B ist, folgt natürlich $x \in B$. Nun ist aber $B \subseteq C$ und somit gilt $x \in C$. Deshalb gilt für jedes $x \in A$ auch sofort $x \in C$, und das heißt $A \subseteq B$.

(iv) Offenbar sind zwei Mengen genau dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten. Wegen $A \subseteq B$ ist nun jedes Element von A auch Element von B, und umgekehrt folgt aus $B \subseteq A$, daß jedes Element von B auch Element von A ist. Deshalb haben A und B genau die gleichen Elemente, sind also gleich. Δ

Noch zwei Bemerkungen zu diesen kurzen Beweisen. Der Beweis zu Nummer (ii) mag Ihnen etwas künstlich vorkommen, aber er beruht nur auf der einfachen Tatsache, daß man über die leere Menge so ziemlich alles beweisen kann, außer daß sie voll ist. So ist ja auch der Satz „Jeder in diesem Raum ist Millionär“ mit Sicherheit wahr, vorausgesetzt der Raum ist leer.

Die Nummer (iv) liefert uns eine recht hilfreiche Methode, um die Gleichheit von zwei Mengen A und B zu zeigen: man nehme irgendetwas aus A und weise nach, daß es auch in B ist, und umgekehrt. Ich werde gleich in 1.1.11 darauf zurückkommen.

Nun wird es aber höchste Zeit, Sie mit den wichtigsten Operationen vertraut zu machen, die man gewöhnlich auf Mengen anwendet, nämlich mit Durchschnitt, Vereinigung und Differenz.

1.1.9 Definition Es seien A und B Mengen.

(i) Die Menge
$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ und } x \in B\}$$
heißt Durchschnitt oder auch Schnitt von A und B. Man bezeichnet sie als A geschnitten B.

(ii) Die Menge
$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ oder } x \in B\}$$
heißt Vereinigung von A und B. Man bezeichnet sie als A vereinigt B.

(iii) Die Menge
$$A \backslash B = \{x | x \in A, \text{ aber } x \notin B\}$$
heißt Differenz von A und B. Man bezeichnet sie als A ohne B.

Die Mengenoperationen $\cap$, $\cup$ und $\backslash$ können Sie sich leicht veranschaulichen, indem Sie sich A und B als Kreise auf dem Papier vorstellen. Dann haben wir nämlich die Situation aus Abbildung 1.2.

Beachten Sie übrigens, daß das Wort „oder“ in der Definition nicht als entweder-oder gemeint ist, sondern als: das eine oder das andere oder beides. In der Vereinigung werden also alle Elemente zusammengefaßt, die in wenigstens einer der beiden Mengen auftreten. Falls ein Element in beiden auftritt: um so besser!

Im folgenden Beispiel verwende ich die Menge der ganzen Zahlen sowie die übliche kleiner-Relation zwischen zwei Zahlen. Über beides werde ich im Abschnitt 1.2 noch genauer reden.

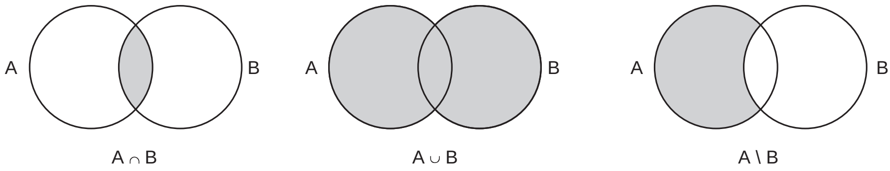

Abb. 1.2. Mengenoperationen

1.1.10 Beispiele

(i) Es sei

$$A = \{2, 4, 6, 8\} \text{ und } B = \{1, 3, 4, 5, 9\}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{4\}, \\ A \cup B &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}, \\ A \backslash B &= \{2, 6, 8\}, \end{aligned}$$

denn das einzige Element von B, das auch in A vorkommt und deshalb hinausgeworfen werden muß, ist die 4.

(ii) Es sei

$$A = \{x | x < 5\} \text{ und } B = \{x | x > 0\}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{x | x \in A \text{ und } x \in B\} \\ &= \{x | x < 5 \text{ und } x > 0\} \\ &= \{1, 2, 3, 4\}, \end{aligned}$$

denn genau diese vier ganzen Zahlen sind *gleichzeitig* größer als Null *und* kleiner als fünf.
Beim Durchschnitt mehrerer Mengen müssen also sämtliche Bedingungen gleichzeitig erfüllt sein. Weiterhin ist

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x | x \in A \text{ oder } x \in B\} \\ &= \{x | x < 5 \text{ oder } x > 0\} \\ &= \text{ Menge aller ganzen Zahlen}, \end{aligned}$$

denn wenn Sie eine beliebige ganze Zahl nehmen, dann kann diese Zahl kleiner als fünf sein, wodurch sie automatisch in $A \cup B$ liegt, oder sie kann mindestens fünf sein. In diesem Fall ist sie aber auf jeden Fall auch größer als Null und somit auch Element von $A \cup B$.
Schließlich ist

$$\begin{aligned} A \backslash B &= \{x | x \in A \text{ und } x \notin B\} \\ &= \{x | x < 5 \text{ und } x \not> 0\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \{x | x < 5 \text{ und } x \leq 0\} \\
&= \{x | x \leq 0\} \\
&= \{0, -1, -2, -3, \ldots\},
\end{aligned}
$$

denn wenn $x \leq 0$ sein soll, dann ist es auch ganz von alleine kleiner als fünf.

(iii) Es sei A die Menge der ungeraden Zahlen und B die Menge der geraden Zahlen. Dann ist $A \cap B = \emptyset$. Es kommt also vor, sogar ziemlich häufig, daß Mengen keine gemeinsamen Elemente und deshalb eine leere Schnittmenge haben.

Wie beim Rechnen mit Zahlen kann man auch die Mengenoperationen miteinander kombinieren, und erstaunlicherweise gelten dabei ganz ähnliche Regeln. Bei Zahlen ist es zum Beispiel egal, ob Sie $a+b$ oder $b+a$ nehmen, bei Mengen spielt es keine Rolle, ob Sie $A \cap B$ oder $B \cap A$ bestimmen. Aber auch die etwas komplizierteren Regeln des Ausmultiplizierens wie $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ finden eine Entsprechung bei den Mengenoperationen. Wir notieren nun die nötigen Regeln in einem Satz.

1.1.11 Satz Es seien A, B und C Mengen. Dann gelten:

(i) Kommutativgesetze:
$A \cap B = B \cap A$;
$A \cup B = B \cup A$.

(ii) Assoziativgesetze:
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

(iii) Distributivgesetze:
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Beweis Die Nummern (i) und (ii) sind wohl ziemlich klar. Ob Sie nun die gemeinsamen Elemente von A und B zusammenpacken oder die gemeinsamen Elemente von B und A, dürfte keinen Unterschied ausmachen, das heißt $A \cap B = B \cap A$. Daß $A \cup B = B \cup A$ gilt, können Sie sich auf ähnliche Weise selbst überlegen.

Weiterhin sind sowohl $A \cap (B \cap C)$ als auch $(A \cap B) \cap C$ nur zwei verschiedene Schreibweisen für die Menge der Elemente, die alle drei auftretenden Mengen gemeinsam haben, während $A \cup (B \cup C)$ genauso wie $(A \cup B) \cup C$ die Elemente beschreibt, die in wenigstens einer der drei beteiligten Mengen auftreten.

Interessanter wird der Satz, wenn wir an die Distributivgesetze gehen. Zunächst einmal werde ich die Formel

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

an zwei Bildern veranschaulichen. Wir tragen zuerst die linke Seite der Gleichung in eines der üblichen Ovalen-Diagramme ein.

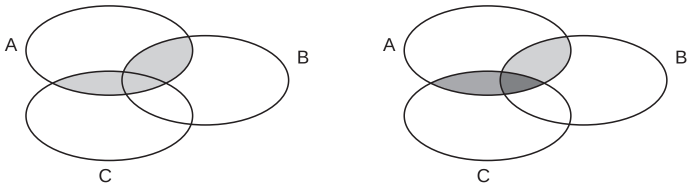

Abb. 1.3. und **1.4.** Distributivgesetz

Die Menge $B \cup C$ entspricht der Vereinigung der beiden Ovale auf der rechten bzw. unteren Seite von Abbildung 1.3, und wenn Sie diese Vereinigung mit A schneiden müssen, bleibt gerade der markierte Teil übrig.

Sehen wir uns nun die rechte Seite der Gleichung an.

Die beiden schraffierten Teile von Abbildung 1.4 kennzeichnen die Mengen $A \cap B$ und $A \cap C$. Deshalb ergibt die Vereinigung von $A \cap B$ und $A \cap C$ die gleiche Menge, die wir oben erhalten haben.

Auf diese Weise ist die Regel des ersten Distributivgesetzes zwar veranschaulicht, aber keinesfalls gültig bewiesen. Schließlich bestehen die meisten Mengen nicht aus Ovalen auf weißem Papier, die auch noch so praktisch angeordnet sind wie in unseren Diagrammen. Da der Satz sich auf irgendwelche Mengen bezieht und nicht nur auf ovalförmige, müssen wir noch einen Beweis finden, der die bildliche Anschauung vermeidet. Glücklicherweise habe ich im Anschluß an 1.1.8 schon einmal erwähnt, wie das geht: man schnappt sich irgendein beliebiges Element aus der linken Menge und weist nach, daß es zwangsläufig auch in der rechten Menge liegt, und umgekehrt.

Sei also

$$x \in A \cap (B \cup C).$$

Dann ist $x \in A$ und $x \in B \cup C$. Folglich ist $x \in A$ und darüber hinaus liegt x in B oder in C. Wenn $x \in B$ ist, dann erhalten wir $x \in A \cap B$, und wenn $x \in C$ ist, dann folgt $x \in A \cap C$, denn wir wissen ja, daß in jedem Fall $x \in A$ gilt. Somit ist $x \in A \cap B$ oder $x \in A \cap C$ und deshalb

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Wir haben damit gezeigt, daß jedes Element aus

$$A \cap (B \cup C)$$

auch Element aus

$$(A \cap B) \cup (A \cap C)$$

ist.

Gehen wir an die Umkehrung. Dazu sei

$$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Nach der Definition der Vereinigung ist dann $x \in A \cap B$ oder $x \in A \cap C$. Im ersten Fall ist $x \in A$ und $x \in B$, während im zweiten Fall gilt: $x \in A$ und $x \in C$.