

---

Florian Scheck

# Theoretische Physik 2

Nichtrelativistische Quantentheorie

Vom Wasserstoffatom  
zu den Vielteilchensystemen

Mit 48 Abbildungen,  
51 Übungen mit Lösungshinweisen  
und exemplarischen, vollständigen Lösungen



Springer

Professor Dr. Florian Scheck

Fachbereich Physik, Institut für Physik  
Johannes Gutenberg-Universität, Staudingerweg 7  
D-55099 Mainz  
e-mail: scheck@dipmza.physik.uni-mainz.de

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

*Scheck, Florian:*

Theoretische Physik/ Florian Scheck. –

Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Hongkong; London; Mailand; Paris; Singapur; Tokio; Springer  
(Springer-Lehrbuch)

2. Nichtrelativistische Quantentheorie: vom Wasserstoffatom zu den Vielteilchensystemen. – 2000

ISBN 3-540-65936-6

ISBN 3-540-65936-6 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2000

Printed in Germany

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Datenkonvertierung und Umbruch in L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 2<sub>ε</sub>: LE-T<sub>E</sub>X Jelonek, Schmidt & Vöckler GbR, Leipzig

Einbandgestaltung: *design & production* GmbH, Heidelberg

Druck: Druckhaus Beltz, Hemsbach/Bergstraße; Einband: Buchbinderei Schäffer, Grünstadt

Gedruckt auf säurefreiem Papier SPIN 10639097 56/3144/ba - 5 4 3 2 1 0

# Inhaltsverzeichnis

## 1. Quantenmechanik eines Punktteilchens

<b>1.1</b>	<b>Grenzen der klassischen Physik</b>	2
<b>1.2</b>	<b>Die Heisenbergsche Unschärferelation für Ort und Impuls</b>	13
1.2.1	Streuung von Observablen	14
1.2.2	Quantenmechanische Unschärfen von kanonischen Variablen	17
1.2.3	Beispiele zur Heisenbergschen Unschärferelation	20
<b>1.3</b>	<b>Der Dualismus Teilchen-Welle</b>	22
1.3.1	Die Wellenfunktion und ihre Interpretation	24
1.3.2	Erste Querverbindung zur Mechanik	27
1.3.3	Gaußsches Wellenpaket	28
1.3.4	Elektron in äußeren elektromagnetischen Feldern	31
<b>1.4</b>	<b>Schrödinger-Gleichung und Bornsche Interpretation der Wellenfunktion</b>	35
<b>1.5</b>	<b>Erwartungswerte und Observable</b>	40
1.5.1	Observable als selbstadjungierte Operatoren auf $L^2(\mathbb{R}^3)$	42
1.5.2	Der Ehrenfestsche Satz	45
<b>1.6</b>	<b>Diskretes Spektrum: Harmonischer Oszillator in einer Dimension</b>	47
<b>1.7</b>	<b>Orthogonale Polynome in einer reellen Variablen</b>	59
<b>1.8</b>	<b>Observable und Erwartungswerte</b>	66
1.8.1	Observable mit nichtentartetem Spektrum	66
1.8.2	Ein Beispiel	71
1.8.3	Observable mit entartetem, diskretem Spektrum	75
1.8.4	Observable mit rein kontinuierlichem Spektrum	79
<b>1.9</b>	<b>Zentralkräfte in der Schrödinger-Gleichung</b>	84
1.9.1	Der Bahndrehimpuls: Eigenwerte und Eigenfunktionen	84
1.9.2	Radialimpuls und kinetische Energie	94
1.9.3	Kräftefreie Bewegung bei scharfem Drehimpuls	96
1.9.4	Der Kugeloszillator	102
1.9.5	Gemischtes Spektrum: das Wasserstoffatom	108

## 2. Streuung von Teilchen an Potentialen

<b>2.1</b>	<b>Makroskopische und mikroskopische Skalen</b>	119
<b>2.2</b>	<b>Streuung am Zentralpotential</b>	121
<b>2.3</b>	<b>Partialwellenanalyse</b>	125
2.3.1	Methoden der Berechnung von Streuphasen	130
2.3.2	Potentiale mit unendlicher Reichweite: Coulombpotential im Außenraum	133
<b>2.4</b>	<b>Bornsche Reihe und Bornsche Näherung</b>	136
2.4.1	Erste Bornsche Näherung	138
2.4.2	Formfaktoren bei elastischer Streuung	140
<b>2.5*</b>	<b>Analytische Eigenschaften der Partialwellenamplituden</b>	144
2.5.1	Jost-Funktionen	145
2.5.2	Dynamische und kinematische Schnitte	146
2.5.3	Partialwellenamplituden als analytische Funktionen	149

2.5.4	Resonanzen	149
2.5.5	Streulänge und effektive Reichweite	152
<b>2.6</b>	<b>Inelastische Streuung mit Partialwellenanalyse</b>	<b>154</b>
<b>3.</b>	<b>Die Prinzipien der Quantentheorie</b>	
<b>3.1</b>	<b>Darstellungstheorie</b>	<b>159</b>
3.1.1	Diracsche Bracket-Schreibweise	162
3.1.2	Transformationen zwischen verschiedenen Darstellungen	165
<b>3.2</b>	<b>Der Begriff des Hilbert-Raums</b>	<b>167</b>
3.2.1	Definition von Hilbert-Räumen	169
3.2.2	Unterräume von Hilbert-Räumen	174
3.2.3	Dualraum eines Hilbert-Raums und Diracsche Notation	175
<b>3.3</b>	<b>Lineare Operatoren auf Hilbert-Räumen</b>	<b>177</b>
3.3.1	Selbstadjungierte Operatoren	178
3.3.2	Projektionsoperatoren	181
3.3.3	Spektralschar von Projektionsoperatoren	183
3.3.4	Unitäre Operatoren	187
3.3.5	Zeitliche Entwicklung quantenmechanischer Systeme	189
<b>3.4</b>	<b>Quantenmechanische Zustände</b>	<b>190</b>
3.4.1	Präparation von Zuständen	191
3.4.2	Statistischer Operator und Dichtematrix	194
3.4.3	Abhängigkeit eines Zustands von seiner Vorgeschichte	196
3.4.4	Beispiele zur Präparation von Zuständen	199
<b>3.5</b>	<b>Zwischenbilanz</b>	<b>200</b>
<b>3.6</b>	<b>Schrödinger- und Heisenberg-Bild</b>	<b>202</b>
<b>4.</b>	<b>Raum-Zeit-Symmetrien in der Quantenphysik</b>	
<b>4.1</b>	<b>Die Drehgruppe (Teil 1)</b>	<b>205</b>
4.1.1	Die Erzeugenden der Drehgruppe	205
4.1.2	Darstellungen der Drehgruppe	208
4.1.3	Die „Drehmatrizen“ $D^{(j)}$	213
4.1.4	Beispiele und Formeln für D-Matrizen	215
4.1.5	Spin und magnetisches Moment von Teilchen mit $j = 1$	217
4.1.6	Clebsch-Gordan-Reihe und Kopplung von Drehimpulsen	219
4.1.7	Spin- und Ortswellenfunktionen	222
4.1.8	Reine und gemischte Zustände für Spin $1/2$	223
<b>4.2</b>	<b>Raumspiegelung und Zeitumkehr in der Quantenmechanik</b>	<b>225</b>
4.2.1	Raumspiegelung und Parität	225
4.2.2	Bewegungs- und Zeitumkehr	228
4.2.3	Abschließende Bemerkungen zu T und $\Pi$	231
<b>4.3</b>	<b>Symmetrie und Antisymmetrie bei identischen Teilchen</b>	<b>234</b>
4.3.1	Zwei verschiedene Teilchen in Wechselwirkung	234
4.3.2	Identische Teilchen am Beispiel $N = 2$	237
4.3.3	Erweiterung auf $N$ identische Teilchen	241
4.3.4	Zusammenhang zwischen Spin und Statistik	241
<b>5.</b>	<b>Rechenmethoden der Quantenmechanik</b>	
<b>5.1</b>	<b>Stationäre Störungsrechnung</b>	<b>247</b>
5.1.1	Störung eines nichtentarteten Energiespektrums	248
5.1.2	Störung eines Spektrums mit Entartung	251
5.1.3	Ein Beispiel: Der Stark-Effekt	253
5.1.4	Zwei weitere Beispiele: Ein Zwei-Niveau-System, Zeeman-Effekt der Hyperfeinstruktur in Myonium	255

- 5.2 **Zeitabhängige Störungstheorie und Übergangswahrscheinlichkeiten** ..... 262
  - 5.2.1 Störungsentwicklung der zeitabhängigen Wellenfunktion . 262
  - 5.2.2 Erste Ordnung und Fermis Goldene Regel ..... 265
- 5.3 **Stationäre Zustände von  $N$  identischen Fermionen** ..... 267
  - 5.3.1 Selbstkonsistenz und Hartreesches Verfahren ..... 268
  - 5.3.2 Methode der zweiten Quantisierung ..... 269
  - 5.3.3 Die Hartree-Fock-Gleichungen ..... 272
  - 5.3.4 Hartree-Fock-Gleichungen und Restwechselwirkungen ... 275
  - 5.3.5 Teilchen- und Lochzustände, Normalprodukt und Wicksches Theorem ..... 277
  - 5.3.6 Anwendung auf den Hartree-Fock-Grundzustand ..... 280

**A. Anhang**

- A.1 **Diracs  $\delta(x)$  und temperierte Distributionen** ..... 285
  - A.1.1 Testfunktionen und temperierte Distributionen ..... 286
  - A.1.2 Funktionen als Distributionen ..... 288
  - A.1.3 Träger einer Distribution ..... 289
  - A.1.4 Ableitungen temperierter Distributionen ..... 289
  - A.1.5 Beispiele von Distributionen ..... 290
- A.2 **Gammafunktion und Hypergeometrische Funktionen** ..... 292
  - A.2.1 Die Gammafunktion ..... 292
  - A.2.2 Hypergeometrische Funktionen ..... 294
- A.3 **Wichtige Zahlenwerte** ..... 300

**Aufgaben und ausgewählte Lösungen**

- Aufgaben: Kapitel 1 ..... 301
- Aufgaben: Kapitel 2 ..... 305
- Aufgaben: Kapitel 3 ..... 306
- Aufgaben: Kapitel 4 ..... 309
- Aufgaben: Kapitel 5 ..... 311
- Ausgewählte Lösungen: Kapitel 1 ..... 312
- Ausgewählte Lösungen: Kapitel 2 ..... 315
- Ausgewählte Lösungen: Kapitel 3 ..... 316
- Ausgewählte Lösungen: Kapitel 4 ..... 317
- Ausgewählte Lösungen: Kapitel 5 ..... 318

- Literatur ..... 321
- Sachverzeichnis ..... 325