

Vorwort zur zweiten Auflage

Die erfreulich positive Aufnahme des Buches hatte dazu geführt, daß innerhalb verhältnismäßig kurzer Zeit eine Neuauflage erforderlich war. Dabei wurden an einer Reihe von Stellen erklärende Ergänzungen angebracht und Korrekturen von Druckfehlern vorgenommen. Bei dieser Gelegenheit möchte ich allen Kollegen, Mitarbeitern und Studenten danken, die Verbesserungsvorschläge machten. Besonderer Dank gilt Herrn A. Vilfan, der die Änderungen in das \TeX -file einarbeitete, sowie den Herren P. Maier und St. Fiedler für das Lesen der Korrekturen.

München, im Juli 2000

F. Schwabl

Vorwort

Das vorliegende Lehrbuch behandelt fortgeschrittene Themen der Quantenmechanik, wie sie üblicherweise in Vorlesungen über Quantenmechanik II dargestellt werden. Es ist in drei Teile gegliedert: I *Vielteilchensysteme*, II *Relativistische Wellengleichungen* und III *Relativistische Felder*, die sich in insgesamt 15 Kapitel teilen. Im Text wird Wert auf eine gestraffte Darstellung gelegt, die dennoch außer Kenntnis der Quantenmechanik keine weiteren Hilfsmittel erfordert. Die Verständlichkeit wird gewährleistet durch Angabe aller mathematischen Schritte und ausführliche und vollständige Durchführung der Zwischenrechnungen. Am Ende jedes Kapitels sind eine Reihe von Übungsaufgaben angegeben. Teilabschnitte, die bei der ersten Lektüre übergangen werden können, sind mit einem Stern gekennzeichnet. Nebenrechnungen und Bemerkungen, die für das Verständnis nicht entscheidend sind, werden in Kleindruck dargestellt. Für die Teile II und III ist die vorhergehende Lektüre von Teil I nicht erforderlich. Wo es hilfreich erscheint, werden Zitate angegeben, die auch dort keineswegs vollständig sind, aber zur weiteren Lektüre anregen sollen. Am Ende jedes der drei Teile befindet sich eine Liste von Lehrbüchern.

Das Buch grenzt sich gegen das Lehrbuch *Quantenmechanik* thematisch dadurch ab, daß relativistische Phänomene und klassische wie relativistische Quantenfelder behandelt werden.

In Teil I wird der Formalismus der zweiten Quantisierung eingeführt und auf die wichtigsten, mit einfachen Methoden darstellbaren Probleme, wie schwach wechselwirkendes Elektronengas, Anregungen in schwach wechselwirkenden Bose-Gasen, angewandt und es werden die grundlegenden Eigenschaften von Korrelations- und Responsefunktionen von Vielteilchensystemen behandelt.

Der zweite Teil beschäftigt sich mit der Klein-Gordon-Gleichung und der Dirac-Gleichung. Neben den wichtigsten Problemen, wie der Bewegung im Coulomb-Potential, wird besonderes Augenmerk den Symmetrieeigenschaften zugewandt.

Im dritten Teil wird das Noethersche Theorem, die Quantisierung von Klein-Gordon-, Dirac- und Strahlungsfeld dargestellt, sowie das Spin-Statistik-Theorem. Das letzte Kapitel behandelt wechselwirkende Felder am Beispiel der Quantenelektrodynamik: *S*-Matrix-Theorie, Wick-Theorem, Feyn-

man Regeln und einige einfache Prozesse wie Mott-Streuung und Elektron-Elektron-Streuung.

Das Buch wird Studenten der Physik und verwandter Fachgebiete ab dem 5. oder 6. Semester empfohlen und Teile daraus können möglicherweise auch von Lehrenden nutzbringend verwendet werden.

Dieses Buch ist aus Vorlesungen, die der Autor wiederholt an der Technischen Universität München gehalten hat, entstanden. Am Schreiben des Manuskripts, am Lesen der Korrekturen haben viele Mitarbeiter mitgewirkt: Frau I. Wefers, Frau E. Jörg-Müller, Frau C. Schwierz, die Herren A. Vilfan, S. Clar, K. Schenk, M. Hummel, E. Wefers, B. Kaufmann, M. Bulenda, J. Wilhelm, K. Kroy, P. Maier, C. Feuchter, A. Wonhas. Herr E. Frey und Herr W. Gasser waren an der Ausarbeitung der Übungsbeispiele beteiligt. Herr W. Gasser hat das gesamte Manuskript gelesen und zu vielen Kapiteln des Buches wertvolle Anregungen gegeben. Ihnen und allen anderen Mitarbeitern, deren Hilfe wichtig war, sowie stellvertretend für den Springer-Verlag Herrn Dr. H.J. Kölsch sei an dieser Stelle herzlichst gedankt.

München, Juni 1997

F. Schwabl

12. Quantisierung von relativistischen Feldern

Dieses Kapitel ist den relativistischen Quantenfeldern gewidmet. Dazu untersuchen wir zuerst ein System von gekoppelten Oszillatoren, für welche die Quantisierungseigenschaften bekannt sind. Im Kontinuumsrenzfall dieses Oszillatorsystems resultiert die Bewegungsgleichung einer schwingenden Saite in einem harmonischen Potential, welche in ihrer Form identisch mit der Klein–Gordon–Gleichung ist. Mit der quantisierten Bewegungsgleichung der Saite und deren Verallgemeinerung auf drei Dimensionen liegt ein Beispiel einer quantisierten Feldtheorie vor. Die dabei auftretende Quantisierungsvorschrift läßt sich auch auf nichtmaterielle Felder übertragen. Die Felder und die hierzu konjugierten Impulsfelder werden kanonischen Vertauschungsrelationen unterworfen. Man spricht deshalb von kanonischer Quantisierung. Zur Verallgemeinerung auf beliebige Felder werden dann die Eigenschaften allgemeiner klassischer relativistischer Felder untersucht, insbesondere werden die aus den Symmetrieeigenschaften folgenden Erhaltungssätze abgeleitet (Noether–Theorem).

12.1 Gekoppelte Oszillatoren, lineare Kette, Gitterschwingungen

12.1.1 Lineare Kette von gekoppelten Oszillatoren

12.1.1.1 Diagonalisierung des Hamilton–Operators

Wir betrachten N Teilchen mit der Masse m , deren Gleichgewichtslagen sich auf einem periodischen linearen Gitter mit Gitterabstand (Gitterkonstante) a befinden mögen. Die Auslenkungen in Kettenrichtung aus den Gleichgewichtslagen a_n werden mit q_1, \dots, q_N (Abb.12.1a) und die Impulse mit p_1, \dots, p_N bezeichnet. Jedes der Teilchen möge sich in einem harmonischen Potential befinden, und auch untereinander seien nächste Nachbarn harmonisch gekoppelt (Abb.12.1b). Dann lautet der Hamilton-Operator

$$H = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2m} p_n^2 + \frac{m\Omega^2}{2} (q_n - q_{n-1})^2 + \frac{m\Omega_0^2}{2} q_n^2. \quad (12.1.1)$$



Abb. 12.1. Lineare Kette a) Auslenkung der Massenpunkte (große Punkte) von den Gleichgewichtslagen (kleine Punkte) b) Potentiale und Wechselwirkungen (schematisch durch Federn dargestellt)

Hier charakterisiert Ω^2 die Stärke der harmonischen Kopplung zwischen nächsten Nachbarn und Ω_0^2 das harmonische Potential der einzelnen Teilchen (siehe Abb.12.1b). Da wir letztlich am Grenzfall eines unendlich ausgedehnten Systems interessiert sein werden, in welchem die Randbedingungen keine Rolle spielen, nehmen wir deshalb die einfachsten, nämlich periodische Randbedingungen an, d.h. $q_0 = q_N$. Die x -Koordinaten x_n sind dargestellt durch $x_n = a_n + q_n = na + q_n$ und aus den Vertauschungsrelationen $[x_n, p_m] = i\delta_{nm}$ etc. ($\hbar = 1$) folgen die kanonischen Vertauschungsrelationen (12.1.2) für die q_n und p_n

$$[q_n, p_m] = i\delta_{nm}, \quad [q_n, q_m] = 0, \quad [p_n, p_m] = 0. \quad (12.1.2)$$

In der *Heisenberg-Darstellung*,

$$q_n(t) = e^{iHt} q_n e^{-iHt}, \quad (12.1.3a)$$

$$p_n(t) = e^{iHt} p_n e^{-iHt}, \quad (12.1.3b)$$

ergeben sich die beiden Bewegungsgleichungen

$$\dot{q}_n(t) = \frac{1}{m} p_n(t) \quad (12.1.4a)$$

und

$$\begin{aligned} \dot{p}_n(t) &= m\ddot{q}_n(t) \\ &= m\Omega^2(q_{n+1}(t) + q_{n-1}(t) - 2q_n(t)) - m\Omega_0^2 q_n(t). \end{aligned} \quad (12.1.4b)$$

Wegen der periodischen Randbedingungen liegt ein translationsinvariantes Problem (invariant gegen Translation um a) vor. Der Hamilton-Operator kann deshalb durch die Transformation (Fourier-Summe)

$$q_n = \frac{1}{(mN)^{1/2}} \sum_k e^{ika_n} Q_k \quad (12.1.5a)$$

$$p_n = \left(\frac{m}{N}\right)^{1/2} \sum_k e^{-ika_n} P_k \quad (12.1.5b)$$

diagonalisiert werden. Man nennt Q_k und P_k *Normalkoordinaten* und *Normalimpulse*. Wir müssen nun die möglichen Werte von k bestimmen. Dazu

verwenden wir periodische Randbedingungen, welche $q_0 = q_N$ verlangen, d.h. $1 = e^{ikaN}$; deshalb ist $kaN = 2\pi\ell$, also

$$k = \frac{2\pi\ell}{Na} \tag{12.1.6}$$

mit ganzzahligem ℓ . Dabei sind die Werte $k = \frac{2\pi(\ell \pm N)}{Na} = \frac{2\pi\ell}{Na} \pm \frac{2\pi}{a}$ äquivalent zu $k = \frac{2\pi\ell}{Na}$, da für diese k -Werte die Phasenfaktoren e^{ikan} und damit q_n und p_n gleich sind; deshalb reduzieren sich die möglichen k -Werte wie folgt:

für gerades N : $-\frac{N}{2} < \ell \leq \frac{N}{2}$, $\ell = 0, \pm 1, \dots, \pm \frac{N-2}{2}, \frac{N}{2}$

für ungerades N : $-\frac{N-1}{2} \leq \ell \leq \frac{N-1}{2}$, $\ell = 0, \pm 1, \dots, \pm \frac{N-1}{2}$.

In der Festkörperphysik nennt man das so eingeschränkte Intervall von k auch erste Brillouin-Zone. Die Fourier-Koeffizienten in (12.1.5) erfüllen Orthogonalitäts- und Vollständigkeitsrelationen.

Orthogonalitätsrelation :

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{ikan} e^{-ik'an} &= \Delta(k - k') & (12.1.7a) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{für } k - k' = \frac{2\pi}{a} h, \ h \text{ ganzzahlig} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

In dieser Form gilt die Orthogonalitätsrelation für beliebiges $k = \frac{2\pi\ell}{Na}$. Bei Beschränkung der k -Werte auf die erste Brillouin-Zone wird das verallgemeinerte Kronecker-Delta $\Delta(k - k') = \delta_{kk'}$.

Vollständigkeitsrelation:

$$\frac{1}{N} \sum_k e^{-ikan} e^{ikan'} = \delta_{nn'} . \tag{12.1.7b}$$

Hier ist die Summationsvariable k auf die erste Brillouin-Zone beschränkt. (Beweise in Übungsaufgabe 12.1). Die Umkehrung von (12.1.5) lautet:

$$Q_k = \sqrt{\frac{m}{N}} \sum_n e^{-ikan} q_n \tag{12.1.8a}$$

$$P_k = \frac{1}{\sqrt{mN}} \sum_n e^{ikan} p_n . \tag{12.1.8b}$$

Da die Operatoren q_n und p_n hermitesch sind, folgt

$$Q_k^\dagger = Q_{-k} , \quad P_k^\dagger = P_{-k} . \tag{12.1.9}$$

Bemerkung. Für gerades N sind $\ell = \frac{N}{2}$ und $-\frac{N}{2}$ äquivalent, es trat deshalb nur $\frac{N}{2}$ auf. Für $k = \frac{2\pi}{Na} \cdot \frac{N}{2} = \frac{\pi}{a}$ ist $Q_k = Q_k^\dagger$, also hermitesch und ebenso P_k , da $e^{i\frac{\pi}{a}an} = e^{i\pi n} = (-1)^n$.

Die Vertauschungsrelationen der Normalkoordinaten und -impulse erhält man aus (12.1.2) mit dem Ergebnis

$$[Q_k, P_{k'}] = i\delta_{kk'} , \quad [Q_k, Q_{k'}] = 0 , \quad [P_k, P_{k'}] = 0 . \quad (12.1.10)$$

Einsetzen der Transformation auf Normalkoordinaten (12.1.5a,b) in (12.1.1) ergibt für den Hamilton-Operator

$$H = \frac{1}{2} \sum_k \left(P_k P_k^\dagger + \omega_k^2 Q_k Q_k^\dagger \right) \quad (12.1.11)$$

mit dem Quadrat der Schwingungsfrequenz

$$\omega_k^2 = \Omega^2 \left(2 \sin \frac{ka}{2} \right)^2 + \Omega_0^2 \quad (12.1.12)$$

(Übungsaufgabe 12.3). Man nennt $(\Omega a)^2$ Steifigkeitskonstante.

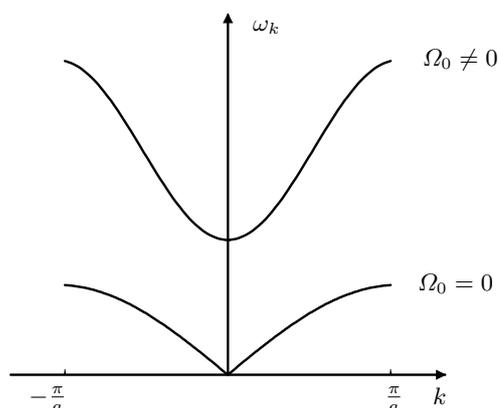


Abb. 12.2. Die Phononfrequenzen für $\Omega_0 \neq 0$ und $\Omega_0 = 0$.

Im Fourier-Raum ergeben sich also ungekoppelte Oszillatoren mit der Frequenz $\omega_k = \sqrt{\omega_k^2}$, allerdings sind die Terme in (12.1.11) von der Gestalt $Q_k Q_{-k}$ etc., es sind also noch die Oszillatoren zur Wellenzahl k und $-k$ miteinander verknüpft. Die Frequenz als Funktion von k (Dispersionrelation) ist in Abb. 12.2 dargestellt. In der Sprache der Gitterschwingungen hat man für $\Omega_0 = 0$ akustische Phononen und für endliches Ω_0 optische Phononen. Zur Diagonalisierung von H , Gl.(12.1.11), führt man *Erzeugungs-* und *Vernichtungsoperatoren*

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (\omega_k Q_k + iP_k^\dagger) \quad (12.1.13a)$$

$$a_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (\omega_k Q_k^\dagger - iP_k) \quad (12.1.13b)$$

ein. Die Umkehrung dieser Transformation ist durch

$$Q_k = \frac{a_k + a_{-k}^\dagger}{\sqrt{2\omega_k}} \quad (12.1.14a)$$

und

$$P_k = -i\sqrt{\frac{\omega_k}{2}} (a_{-k} - a_k^\dagger) \quad (12.1.14b)$$

gegeben. Aus den Vertauschungsrelationen für die Normalkoordinaten (12.1.10) folgt (Aufgabe 12.5)

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{k,k'}, \quad [a_k, a_{k'}] = [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0. \quad (12.1.15)$$

Indem man (12.1.14a,b) in (12.1.11) einsetzt, erhält man

$$H = \sum_k \omega_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right), \quad (12.1.16)$$

einen Hamilton-Operator von N nicht gekoppelten Oszillatoren, die Summation erstreckt sich über alle N Wellenzahlen in der ersten Brillouin-Zone, da

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \sum_k \frac{\omega_k}{2} (a_{-k} - a_k^\dagger)(a_{-k}^\dagger - a_k) + \frac{\omega_k^2}{2\omega_k} (a_k + a_{-k}^\dagger)(a_k^\dagger + a_{-k}) \\ &= \frac{1}{4} \sum_k \omega_k (a_{-k} a_{-k}^\dagger + a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger + a_{-k}^\dagger a_{-k} \\ &\quad - a_{-k} a_k - a_k^\dagger a_{-k}^\dagger + a_k a_{-k} + a_{-k}^\dagger a_k^\dagger) \\ &= \frac{1}{2} \sum_k \omega_k (a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger) = \sum_k \omega_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (12.1.17)$$

Die Energieeigenzustände und Eigenwerte für jeden einzelnen dieser Oszillatoren sind bekannt. Die Grundzustandsenergie des Oszillators mit der Wellenzahl k ist $\frac{1}{2}\omega_k$. Den n -ten angeregten Zustand des Oszillators mit der Wellenzahl k erhält man durch n -fache Anwendung des Operators a_k^\dagger , und die Energie ist $(n_k + \frac{1}{2})\omega_k$. Der Umstand, daß die Eigenwerte des Hamilton-Operators ganzzahlige Vielfache der Eigenfrequenzen sind, führt ganz natürlich auf eine Teilchen-Interpretation, obwohl es sich nicht um materielle Teilchen, sondern nur um Anregungszustände (Quasiteilchen) handelt. Wir nennen diese Quanten im Fall der hier vorliegenden elastischen Kette Phononen. Die Besetzungszahlen sind $0, 1, 2, \dots$, also sind die Quanten Bosonen. Der Operator

a_k^\dagger erzeugt ein Phonon mit Wellenzahl k und Frequenz (Energie) ω_k , während a_k ein Phonon mit Wellenzahl k und Frequenz (Energie) ω_k vernichtet.

Die Eigenzustände des Hamilton-Operators (12.1.17) sind folglich von der folgenden Form. Im Grundzustand $|0\rangle$, der durch die Bestimmungsgleichung

$$a_k |0\rangle = 0, \text{ für alle } k, \quad (12.1.18a)$$

festgelegt ist, sind keine Phononen vorhanden, und seine Energie ist

$$E_0 = \sum_k \frac{1}{2} \omega_k, \quad (12.1.18b)$$

die Nullpunktsenergie. Ein allgemeiner Multiphononenzustand hat die Gestalt

$$\begin{aligned} |n_{k_1}, n_{k_2}, \dots, n_{k_N}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n_{k_1}! n_{k_2}! \dots n_{k_N}!}} \\ &\times \left(a_{k_1}^\dagger\right)^{n_{k_1}} \left(a_{k_2}^\dagger\right)^{n_{k_2}} \dots \left(a_{k_N}^\dagger\right)^{n_{k_N}} |0\rangle \end{aligned} \quad (12.1.19a)$$

und die Energie

$$E = \sum_k n_k \omega_k + E_0. \quad (12.1.19b)$$

Die Besetzungszahlen nehmen die Werte $n_k = 0, 1, 2, \dots$ an und k läuft über die N Werte aus der ersten Brillouinschen Zone; die n_k sind nach oben unbeschränkt. Der Operator $\hat{n}_k = a_k^\dagger a_k$ ist der Besetzungszahloperator für Phononen mit der Wellenzahl k .

Aus

$$[\hat{n}_k, a_k] = -a_k \quad \text{und} \quad [\hat{n}_k, a_k^\dagger] = a_k^\dagger \quad (12.1.19c)$$

folgt

$$\begin{aligned} a_{k_i} |\dots, n_{k_i}, \dots\rangle &= \sqrt{n_{k_i}} |\dots, n_{k_i} - 1, \dots\rangle, \\ a_{k_i}^\dagger |\dots, n_{k_i}, \dots\rangle &= \sqrt{n_{k_i} + 1} |\dots, n_{k_i} + 1, \dots\rangle. \end{aligned} \quad (12.1.19d)$$

Bemerkung. Es sei betont, daß die Vertauschungsrelationen (12.1.2) und (12.1.15) auch in Gegenwart von nichtlinearen Termen im Hamilton-Operator gültig sind, da sie eine Folge der allgemeinen kanonischen Vertauschungsrelationen von Orts- und Impulskordinaten sind.

12.1.1.2 Dynamik

Mit Gl.(12.1.16) wurde der Hamilton-Operator der linearen Kette diagonalisiert. Tatsächlich ist H zeitunabhängig, so daß die diversen Darstellungen von H Gl.(12.1.1), (12.1.11) und (12.1.16) zu jedem Zeitpunkt gelten. Wir können

nun die wesentlichen Aspekte der Dynamik am einfachsten im Heisenberg-Bild beschreiben. Ausgehend von

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{1}{\sqrt{mN}} \sum_k e^{ikan} Q_k = \frac{1}{\sqrt{mN}} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} e^{ika_n} (a_k + a_{-k}^\dagger) \\ &= \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k mN}} \left(e^{ika_n} a_k + e^{-ika_n} a_k^\dagger \right) \end{aligned} \quad (12.1.20)$$

definiert man den Heisenberg-Operator

$$q_n(t) = e^{iHt} q_n(0) e^{-iHt} = e^{iHt} q_n e^{-iHt}. \quad (12.1.21)$$

Indem man die Bewegungsgleichung löst oder

$$\begin{aligned} e^{iHt} a_k e^{-iHt} &= a_k + [iHt, a_k] + \frac{1}{2!} [iHt, [iHt, a_k]] + \dots \\ &= a_k + [i\omega_k t a_k^\dagger a_k, a_k] + \frac{1}{2!} [iHt, [iHt, a_k]] + \dots \\ &= a_k - i\omega_k t a_k + \frac{1}{2!} [i\omega_k t a_k^\dagger a_k, -i\omega_k t a_k] + \dots \\ &= a_k \left(1 - i\omega_k t + \frac{1}{2!} (-i\omega_k t)^2 + \dots \right) \\ &= a_k e^{-i\omega_k t} \end{aligned} \quad (12.1.22)$$

benutzt, erhält man für die Zeitabhängigkeit der Auslenkungen

$$q_n(t) = \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k mN}} \left(e^{i(kan - \omega_k t)} a_k + e^{-i(kan - \omega_k t)} a_k^\dagger \right). \quad (12.1.23)$$

In ihrer Struktur ist diese Lösung identisch mit der klassischen, die Amplituden sind hier jedoch die Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren. Wir werden die Bedeutung der Lösung erst im Kontinuumsrenzfall diskutieren, den wir nun einführen werden.

12.1.2 Kontinuumsrenzfall, schwingende Saite

Wir betrachten nun den Kontinuumsrenzfall der schwingenden Kette. In diesem Grenzfall gehen der Gitterabstand $a \rightarrow 0$ und die Zahl der Oszillatoren $N \rightarrow \infty$, wobei die Länge der Saite $L = aN$ endlich bleibt (Abb. 12.3).

Die Dichte $\rho = \frac{m}{a}$ und die Steifigkeitskonstante $v^2 = (\Omega a)^2$ müssen ebenfalls konstant bleiben. Die Positionen der Gitterpunkte $x = na$ sind dann kontinuierlich verteilt. Außerdem führen wir die Definitionen

$$q(x) = q_n \left(\frac{m}{a} \right)^{1/2} \quad (12.1.24a)$$

$$p(x) = p_n (ma)^{-1/2} \quad (12.1.24b)$$



Abb. 12.3. Zum Kontinuumsgrenzfall der linearen Kette

ein. Aus der Bewegungsgleichung (12.1.4b)

$$\ddot{q}_n = \Omega^2(q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n) - \Omega_0^2 q_n$$

wird

$$\ddot{q}(x, t) = \Omega^2 a^2 \frac{(q(x+a, t) - q(x, t)) - (q(x, t) - q(x-a, t))}{a^2} - \Omega_0^2 q(x, t) \quad (12.1.25)$$

und im Limes $a \rightarrow 0$ folgt

$$\ddot{q}(x, t) - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} q(x, t) + \Omega_0^2 q(x, t) = 0. \quad (12.1.26)$$

Diese Gleichung ist in ihrer Form identisch mit der eindimensionalen Klein-Gordon-Gleichung. Für $\Omega_0 = 0$, also ohne dem harmonischen Potential, ist Gl.(12.1.26) die aus der klassischen Mechanik bekannte Schwingungsgleichung einer Saite.

Der Hamilton-Operator (12.1.1) nimmt im Kontinuumsgrenzfall die Gestalt

$$\begin{aligned} H &= \lim_{a \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} \sum_n \left(\frac{1}{2m} p_n^2 + \frac{m\Omega^2}{2} (q_n - q_{n-1})^2 + \frac{m\Omega_0^2}{2} q_n^2 \right) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} \sum_n a \left(\frac{1}{2ma} p_n^2 + \frac{m\Omega^2}{2a} a^2 \left(\frac{q_n - q_{n-1}}{a} \right)^2 + \frac{m\Omega_0^2}{2a} q_n^2 \right) \\ &= \int_0^L dx \frac{1}{2} \left[p(x)^2 + v^2 \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 + \Omega_0^2 q(x)^2 \right] \end{aligned} \quad (12.1.27)$$

an, wobei $\sum_n a \rightarrow \int_0^L$ übergeht. Die Kommutatoren der Auslenkungen und Impulse erhält man aus (12.1.2) und (12.1.24a,b):

$$\begin{aligned} [q(x), p(x')] &= \lim_{a \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{a} \right)^{1/2} (ma)^{-1/2} [q_n, p_{n'}] \\ &= \lim_{a \rightarrow 0, N \rightarrow \infty} i \frac{\delta_{nn'}}{a} = i\delta(x - x') \end{aligned} \quad (12.1.28a)$$

und

$$[q(x), q(x')] = [p(x), p(x')] = 0. \quad (12.1.28b)$$

Als nächstes leiten wir die Normalkoordinatendarstellung her. Aus (12.1.6) folgt

$$k = \frac{2\pi\ell}{L}, \quad \text{wo } \ell \text{ ganzzahlig ist mit } -\infty \leq \ell \leq \infty. \quad (12.1.29)$$

Der Fourier-Raum bleibt im Kontinuumsrenzfall bei endlicher Länge der Saite diskret, die Zahl der Wellenzahlen und damit der Normalkoordinaten ist unendlich. Aus Gl. (12.1.5a,b) folgt

$$q(x) = \frac{1}{L^{1/2}} \sum_k e^{ikx} Q_k \quad (12.1.30a)$$

$$p(x) = \frac{1}{L^{1/2}} \sum_k e^{-ikx} P_k \quad (12.1.30b)$$

und aus (12.1.11)

$$H = \sum_k \frac{1}{2} \left(P_k P_k^\dagger + \omega_k^2 Q_k Q_k^\dagger \right), \quad (12.1.31)$$

wobei sich (12.1.12) im Grenzfall $a \rightarrow 0$ auf

$$\omega_k^2 = v^2 k^2 + \Omega_0^2 \quad (12.1.32)$$

reduziert. Die Vertauschungsrelationen der Normalkoordinaten (12.1.10) bleiben unverändert

$$[Q_k, P_{k'}] = i\delta_{kk'}, \quad [Q_k, Q_{k'}] = 0, \quad [P_k, P_{k'}] = 0. \quad (12.1.33)$$

Entsprechend ist die Transformation auf Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren (12.1.14a,b), sowie der Hamilton-Operator in diesen Größen (12.1.16) unverändert. Die Darstellung des Auslenkungsfeldes durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren nimmt nun die Gestalt

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{1}{L^{1/2}} \sum_k e^{ikx} \frac{a_k + a_{-k}^\dagger}{\sqrt{2\omega_k}} \\ &= \frac{1}{L^{1/2}} \sum_k \left(e^{ikx} a_k + e^{-ikx} a_k^\dagger \right) \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \end{aligned} \quad (12.1.34)$$

an, und aus (12.1.23) folgt für dessen Zeitabhängigkeit

$$q(x, t) = \frac{1}{L^{1/2}} \sum_k \left(e^{i(kx - \omega_k t)} a_k + e^{-i(kx - \omega_k t)} a_k^\dagger \right) \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}. \quad (12.1.35)$$

Schließlich lautet der Hamilton-Operator

$$H = \sum_k \omega_k \left(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right), \quad (12.1.36)$$

welcher positiv definit ist. Die in (12.1.35) auftretenden Funktionen $e^{i(kx-\omega_k t)}$ und $e^{-i(kx-\omega_k t)}$ sind die Lösungen der freien Feldgleichungen (12.1.26), die wir im Zusammenhang mit der Klein–Gordon–Gleichung als Lösungen mit positiver und negativer Energie interpretiert hatten. In der quantisierten Theorie treten diese Lösungen als Entwicklungsfunktionen der Feldoperatoren zu den Vernichtungsoperatoren und den Erzeugungsoperatoren auf. Das Vorzeichen der Frequenzabhängigkeit hat keine Bedeutung für den Wert der Energie. Diese wird durch den Hamilton-Operator (12.1.36) bestimmt, welcher positiv definit ist, es gibt keine Zustände mit negativer Energie. Die direkte Analogie zur schwingenden Saite bezieht sich auf das reelle Klein–Gordon Feld, das komplexe wird in Gl. (12.1.46a,b) und in Abschnitt (13.2) behandelt.

12.1.3 Verallgemeinerung auf drei Dimensionen, Zusammenhang mit dem Klein–Gordon–Feld

12.1.3.1 Verallgemeinerung auf drei Dimensionen

Es ist nun einfach, die bisherigen Ergebnisse auf drei Dimensionen zu verallgemeinern. Wir betrachten ein diskretes, dreidimensionales, kubisches Gitter. Wir legen dabei kein elastisches Gitter zugrunde, welches dreidimensionale Auslenkungsvektoren hätte, sondern nehmen an, daß die Auslenkungen nur eindimensional (skalar) seien. Dann ist im Kontinuumsrenzfall die eindimensionale Koordinate x durch den dreidimensionalen Ortsvektor \mathbf{x} zu ersetzen

$$x \rightarrow \mathbf{x} ,$$

und die Feldgleichung für die Auslenkung $q(\mathbf{x}, t)$ lautet

$$\ddot{q}(\mathbf{x}, t) - v^2 \Delta q(\mathbf{x}, t) + \Omega_0^2 q(\mathbf{x}, t) = 0 . \quad (12.1.37)$$

Wenn wir hierin die Substitutionen

$$v \rightarrow c , \quad \frac{\Omega_0^2}{v^2} \rightarrow m^2 , \quad (\mathbf{x}, t) \equiv x , \quad \text{und} \quad q(\mathbf{x}, t) \rightarrow \phi(x) \quad (12.1.38)$$

einführen, erhalten wir

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi(x) + m^2 \phi(x) = 0 \quad (12.1.39)$$

also genau die Klein–Gordon–Gleichung (5.2.11'). Die Darstellung der Lösung der Klein–Gordon–Gleichung durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren (12.1.35), die Vertauschungsrelationen (12.1.15), (12.1.28) und der Hamilton–Operator (12.1.36) lassen sich unmittelbar auf drei Dimensionen übertragen:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left(e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)} a_{\mathbf{k}} + e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{x}-\omega_{\mathbf{k}}t)} a_{\mathbf{k}}^\dagger \right) \\ &\equiv \phi^+(x) + \phi^-(x) , \end{aligned} \quad (12.1.40)$$

$$[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}, \quad [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}] = [a_{\mathbf{k}}^\dagger, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0, \quad (12.1.41a)$$

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{x}', t)] &= i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ [\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t)] &= [\dot{\phi}(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{x}', t)] = 0, \end{aligned} \quad (12.1.41b)$$

und

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \left(a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right). \quad (12.1.42)$$

Inspiziert durch diese mechanische Analogie kommen wir zu einer völligen Neuinterpretation der Klein–Gordon–Gleichung. Während in Abschnitt 5.2 versucht wurde, die Klein–Gordon–Gleichung als relativistischen Ersatz für die Schrödinger–Gleichung einzuführen, und deren Lösungen als Wahrscheinlichkeitsamplituden entsprechend der Schrödingerschen Wellenfunktion im Ortsraum zu interpretieren, ist nun $\phi(\mathbf{x}, t)$ keine Wellenfunktion sondern ein Operator im *Fock-Raum*. Dieser Feldoperator wird dargestellt als Superposition der Einteilchenlösungen der Klein–Gordon–Gleichung mit Amplituden, die selbst Operatoren sind, und die die Bedeutung von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren der durch das Feld beschriebenen Quanten (Elementarteilchen) haben. Unter Fock-Raum versteht man den aus den Multi-Boson-Zuständen

$$\left(a_{\mathbf{k}_1}^\dagger \right)^{n_{\mathbf{k}_1}} \left(a_{\mathbf{k}_2}^\dagger \right)^{n_{\mathbf{k}_2}} \dots |0\rangle \quad (12.1.43a)$$

aufgebauten Zustandsraum, wobei $|0\rangle$ der Grundzustand (\equiv Vakuumzustand) des Feldes ist. Die Energie dieses Zustandes ist

$$E = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \left(n_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right). \quad (12.1.43b)$$

In Gleichung (12.1.40) wurde der Feldoperator in Teile positiver (negativer) Frequenz $\phi^+(x)$ ($\phi^-(x)$) zerlegt. Diese Bezeichnungsweise lehnt sich noch an die Lösungen positiver (negativer) Energie an. Wegen der Hermitezität des Feldoperators $\phi(x)$ ist $\phi^{+\dagger} = \phi^-$ und es tritt in der Entwicklung (12.1.40) die Summe von $a_{\mathbf{k}}$ und $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ auf. Dieses hermitesche (reelle) Klein–Gordon–Feld beschreibt ungeladene Mesonen, wie die weitere Untersuchung zeigen wird.

12.1.3.2 Grenzfall unendlichen Volumens

Bislang haben wir ein endliches Volumen mit der linearen Abmessung L zu Grunde gelegt. Bei der Formulierung relativistisch invarianter Theorien ist es notwendig die Theorie im gesamten Raum zu betrachten. Wir führen deshalb den Grenzübergang $L \rightarrow \infty$ durch. In diesem Grenzfall rücken die bisher

diskreten Werte von \mathbf{k} beliebig nahe zusammen und es wird dann auch \mathbf{k} eine kontinuierliche Variable. Die bisherigen Summen über \mathbf{k} werden gemäß

$$\sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^3 \dots \rightarrow \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \dots$$

durch Integrale ersetzt. Mit der Definition

$$a(\mathbf{k}) = \left(\frac{L}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} a_{\mathbf{k}}$$

erhält man aus (12.1.39) für den Feldoperator

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left(e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}}t)} a(\mathbf{k}) + e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega_{\mathbf{k}}t)} a^\dagger(\mathbf{k}) \right), \quad (12.1.44)$$

wobei sich die \mathbf{k} -Integration in allen drei Raumrichtungen von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt. Die Vertauschungsrelationen der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren lauten nun

$$\begin{aligned} [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \\ [a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] &= 0, \quad [a^\dagger(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = 0. \end{aligned} \quad (12.1.45)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{\mathbf{k}'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \sum_{\mathbf{k}'} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^3 \left(\left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \right) \\ &= \int d^3k' \left(\left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \right) = \int d^3k' \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \end{aligned}$$

Das *komplexe Klein-Gordon-Feld* ist nicht hermitesch, deshalb sind die Entwicklungskoeffizienten (Operatoren) der Lösungen mit positiver und negativer Frequenz voneinander unabhängig

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left(e^{-ik \cdot x} a_{\mathbf{k}} + e^{ik \cdot x} b_{\mathbf{k}}^\dagger \right). \quad (12.1.46a)$$

Hier bedeutet $k \cdot x = \omega_{\mathbf{k}}t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ das Viererskalarprodukt. Die Operatoren $a_{\mathbf{k}}$ und $b_{\mathbf{k}}$ haben folgende Bedeutung:

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^\dagger) &\text{ vernichtet (erzeugt) ein Teilchen mit Impuls } \mathbf{k} \text{ und} \\ b_{\mathbf{k}} (b_{\mathbf{k}}^\dagger) &\text{ vernichtet (erzeugt) ein Antiteilchen mit Impuls } \mathbf{k} \\ &\text{ und entgegengesetzter Ladung,} \end{aligned}$$

wie in späteren Abschnitten genauer ausgeführt werden wird. Aus (12.1.46a) erhält man für den hermitesch konjugierten Feldoperator

$$\phi^\dagger(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left(e^{-ik \cdot x} b_{\mathbf{k}} + e^{ik \cdot x} a_{\mathbf{k}}^\dagger \right). \quad (12.1.46b)$$

12.2 Klassische Feldtheorie

12.2.1 Lagrange-Funktion und Euler-Lagrange Bewegungsgleichungen

12.2.1.1 Definitionen

In diesem Abschnitt werden allgemeine, grundlegende Eigenschaften klassischer (meist relativistischer) Feldtheorien untersucht. Gegeben sei ein System, das durch Felder $\phi_r(x)$ beschrieben werde, wobei der Index r die betrachteten Felder durchnumeriert. Dabei kann es sich um die Komponenten eines einzigen Feldes, wie z.B. des Strahlungsfeldes $\mathbf{A}(x)$ oder eines Viererspinors $\psi(x)$ aber auch um unterschiedliche Felder handeln. Es folgen nun einige Definitionen und Begriffe.

Wir nehmen an, daß eine *Lagrange-Dichte* existiert (englisch Lagrangian density), die von den Feldern ϕ_r und deren Ableitungen $\phi_{r,\mu} \equiv \partial_\mu \phi_r \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \phi_r$ abhängt. Die *Lagrange-Dichte* wird mit

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_r, \phi_{r,\mu}) \quad (12.2.1)$$

bezeichnet. Ausgehend von (12.2.1) definiert man die *Lagrange-Funktion*

$$L(x^0) = \int d^3x \mathcal{L}(\phi_r, \phi_{r,\mu}). \quad (12.2.2)$$

Die Bedeutung der Lagrange-Funktion in der Feldtheorie ist ganz analog derjenigen in der Punktmechanik. Welche Form die Lagrange-Dichte für bestimmte Felder besitzt, wird in den folgenden Abschnitten dargelegt werden. Wir definieren noch die *Wirkung* (=action)

$$S(\Omega) = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi_r, \phi_{r,\mu}) = \int dx^0 L(x^0), \quad (12.2.3)$$

wobei $d^4x = dx^0 d^3x \equiv dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ ist. Die Integration erstreckt sich über ein Gebiet Ω im vierdimensionalen Raum-Zeit Kontinuum, welches meistens unendlich sein wird. Die Notation ist wie im Teil *Relativistische Wellengleichungen*, wobei die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$ gesetzt wird, und deshalb ist $x^0 = t$.

12.2.1.2 Hamiltonsches Prinzip der Punktmechanik

Wie schon bemerkt wurde, sind die Definitionen und die Vorgangsweise analog zur *Punktmechanik* mit n Freiheitsgraden, an die wir kurz erinnern^{1,2}. Die *Lagrangefunktion* eines Teilchensystems aus n Freiheitsgraden mit generalisierten Koordinaten $q_i, i = 1, \dots, n$ hat die Gestalt:

$$L(t) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{q}_i^2 - V(q_i) . \quad (12.2.4)$$

Der erste Term ist die kinetische Energie und der zweite die negative potentielle Energie aufgrund der Wechselwirkung der Teilchen untereinander und äußerer konservativer Kräfte. Die *Wirkungsfunktion* ist durch

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(t) \quad (12.2.5)$$

definiert. Die Bewegungsgleichungen eines solchen klassischen Systems folgen aus dem Hamiltonschen Prinzip (= Prinzip der kleinsten Wirkung), welches besagt, daß die Wirkung (12.2.5) für die tatsächliche Bahn $q_i(t)$ extremal ist, d.h.

$$\delta S = 0 , \quad (12.2.6)$$

wobei als Vergleichsbahnen $q_i(t) + \delta q_i(t)$ zwischen dem Anfangszeitpunkt t_1 und dem Endzeitpunkt t_2 nur solche mit

$$\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (12.2.7)$$

betrachtet werden (Siehe Abb. 12.4).

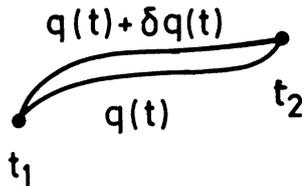


Abb. 12.4. Variation der Lösung im Zeitintervall zwischen t_1 und t_2 . Hier steht $q(t)$ für $\{q_i(t)\}$.

Die Bedingung, daß für die tatsächliche Bahn die Wirkung extremal ist, besagt

¹ H. Goldstein, *Klassische Mechanik*, Aula Verlag Wiesbaden, 1989

² L.D. Landau und E.M. Lifschitz, *Lehrbuch der Theoretischen Physik Bd.1*, Akademie Verlag Berlin, 1979

$$\begin{aligned}
 \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_i(t)} \delta q_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} \delta \dot{q}_i(t) \right) \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\left(\frac{\partial L}{\partial q_i(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} \right) \delta q_i(t) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} \delta q_i(t) \right) \right] \quad (12.2.8) \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\left(\frac{\partial L}{\partial q_i(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} \right) \delta q_i(t) \right] + \left. \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} \delta q_i(t) \right) \right|_{t_1}^{t_2} = 0 .
 \end{aligned}$$

Der letzte Term verschwindet, da nach (12.2.7) $\delta q(t)$ an den Rändern als Null vorausgesetzt wurde. Damit δS für beliebige $\delta q_i(t)$ verschwindet, muß

$$\frac{\partial L}{\partial q_i(t)} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i(t)} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (12.2.9)$$

sein. Dies sind die *Euler-Lagrange-Bewegungsgleichungen*, die den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen äquivalent sind. Wir wollen nun diese Begriffe auf Felder übertragen.

12.2.1.3 Prinzip der kleinsten Wirkung in der Feldtheorie

In der Feldtheorie ist der Index i durch die kontinuierliche Variable \mathbf{x} ersetzt. Die Bewegungsgleichungen (= Feldgleichungen) erhält man wieder aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung

$$\delta S = 0. \quad (12.2.10)$$

Dazu betrachten wir Variationen der Felder

$$\phi_r(x) \rightarrow \phi_r(x) + \delta \phi_r(x), \quad (12.2.11)$$

so daß die Variationen auf der Oberfläche $\Gamma(\Omega)$ des Raum-Zeit-Gebiets Ω verschwinden, d.h.

$$\delta \phi_r(x) = 0 \quad \text{auf } \Gamma(\Omega). \quad (12.2.12)$$

Wir berechnen nun in Analogie zu (12.2.9) die Änderung der Wirkung (12.2.3)

$$\begin{aligned}
 \delta S &= \int_{\Omega} d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} \delta \phi_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\mu}} \delta \phi_{r,\mu} \right\} \\
 &= \int_{\Omega} d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\mu}} \right\} \delta \phi_r + \int_{\Omega} d^4x \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\mu}} \delta \phi_r \right). \quad (12.2.13)
 \end{aligned}$$

In diesen Gleichungen ist die Summation über doppelt auftretende Indizes r und μ impliziert und es wurde $\delta\phi_{r,\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\delta\phi_r$ benützt³. Der letzte Term in Gl.(12.2.13) kann mit dem Gaußschen Integralsatz in das Oberflächenintegral

$$\int_{\Gamma(\Omega)} d\sigma_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_{r,\mu}} \delta\phi_r = 0 \quad (12.2.14)$$

umgeschrieben werden, wobei $d\sigma_\mu$ gleich der μ -Komponente des Oberflächenelements ist. Die Bedingung, daß δS aus Gl.(12.1.13) für beliebige Ω und $\delta\phi_r$ verschwindet, ergibt die *Euler-Lagrange-Gleichungen* der Feldtheorie

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_{r,\mu}} = 0, \quad r = 1, 2, \dots \quad (12.2.15)$$

Bemerkung. Wir haben hier zunächst reelle Felder betrachtet. Den Fall komplexer Felder kann man darauf zurückführen, indem man zwei reelle Felder für den Realteil und den Imaginärteil einführt. Man kann leicht sehen, daß dazu äquivalent ist, $\phi(x)$ und $\phi^*(x)$ als unabhängige Felder zu behandeln. In diesem Sinne gelten das Variationsprinzip und die Euler-Lagrange-Gleichungen auch für komplexe Felder.

Wir führen nun noch zwei weitere Definitionen ein, die analog zur Teilchenmechanik sind. Das zum Feld $\phi_r(x)$ konjugierte *Impuls-Feld* wird durch

$$\pi_r(x) = \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}_r(x)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_r(x)} \quad (12.2.16)$$

definiert. Die Definition der *Hamilton-Funktion* lautet

$$H = \int d^3x \left(\pi_r(x) \dot{\phi}_r(x) - \mathcal{L}(\phi_r, \phi_{r,\mu}) \right) = H(\phi_r, \pi_r), \quad (12.2.17)$$

wobei die $\dot{\phi}_r$ durch die π_r ausgedrückt werden müssen.

Die Hamilton-Dichte ist durch

$$\mathcal{H}(x) = \pi_r(x) \dot{\phi}_r(x) - \mathcal{L}(\phi_r, \phi_{r,\mu}) \quad (12.2.18)$$

definiert. Die Hamilton-Funktion kann folgendermaßen durch die Hamilton-Dichte ausgedrückt werden

$$H = \int d^3x \mathcal{H}(x). \quad (12.2.19)$$

Das Integral erstreckt sich über den ganzen Raum. H ist zeitunabhängig, da \mathcal{L} nicht explizit von der Zeit abhängt.

³ $\delta\phi_r(x) = \phi'_r(x) - \phi_r(x)$ und deshalb $\frac{\partial}{\partial x^\mu}\delta\phi_r(x) = \phi'_{r,\mu}(x) - \phi_{r,\mu}(x) = \delta\phi_{r,\mu}(x)$.

12.2.1.4 Beispiel: Skalares, reelles Feld

Zur Illustration der hier eingeführten Begriffe betrachten wir als Beispiel ein skalares, reelles Feld $\phi(x)$. Für die Lagrange-Dichte nehmen wir die niedrigsten Potenzen des Feldes und seiner Ableitungen, die invariant gegenüber Lorentz-Transformationen sind

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\phi_{,\mu} \phi^{,\mu} - m^2 \phi^2) , \quad (12.2.20)$$

wo m eine Konstante ist. Die Ableitungen von \mathcal{L} nach ϕ und nach $\phi_{,\mu}$ sind

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} = \phi^{,\mu}$$

und daraus folgt für die Euler-Lagrange-Gleichung (12.2.15)

$$\phi^{,\mu}{}_{,\mu} + m^2 \phi = 0 , \quad (12.2.21)$$

oder in der bisher verwendeten Form

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi = 0 . \quad (12.2.21')$$

Also ist Formel (12.2.20) die Lagrange-Dichte zur Klein-Gordon-Gleichung. Der konjugierte Impuls für diese Feldtheorie ist nach Gl.(12.2.16)

$$\pi(x) = \dot{\phi}(x) , \quad (12.2.22)$$

und die Hamilton-Dichte laut nach (12.2.18)

$$\mathcal{H}(x) = \frac{1}{2} [\pi^2(x) + (\nabla \phi)^2 + m^2 \phi^2(x)] . \quad (12.2.23)$$

Wenn wir in (12.2.20) höhere Potenzen von ϕ^2 aufgenommen hätten, z.B. ϕ^4 , so würde die Bewegungsgleichung (12.2.21') zusätzlich nichtlineare Terme enthalten.

Anmerkungen über die Struktur der Lagrange-Dichte

(i) Die Lagrange-Dichte darf nur von $\phi_r(x)$ und $\phi_{r,\mu}(x)$ abhängen, höhere Ableitungen würden auf Differentialgleichungen höherer als zweiter Ordnung führen. Die Lagrange-Dichte darf außer der Abhängigkeit von x über die Felder keine explizite x -Abhängigkeit enthalten, da sonst die relativistische Invarianz verletzt wäre.

(ii) Die Theorie muß lokal sein, d.h. $\mathcal{L}(x)$ ist bestimmt durch $\phi_r(x)$ und $\phi_{r,\mu}(x)$ an der Stelle x . Integrale in $\mathcal{L}(x)$ würden nichtlokale Terme bedeuten und könnten zu akausalem Verhalten führen.

(iii) Die Lagrange-Dichte \mathcal{L} ist durch die Wirkung oder auch die Bewegungsgleichungen nicht eindeutig bestimmt. Lagrange-Dichten, die sich um eine Vierer-Divergenz unterscheiden sind physikalisch äquivalent

$$\mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(x) + \partial_\nu F^\nu(x). \quad (12.2.24)$$

Dieser Zusatzterm führt in der Wirkung zu einem Oberflächen-Integral über die dreidimensionale Begrenzung des vierdimensionalen Integrationsbereichs. Da die Variationen des Feldes auf der Oberfläche verschwinden, kommt es dadurch zu keinem Beitrag in den Bewegungsgleichungen.

(iv) \mathcal{L} soll reell (in der Quantenmechanik hermitesch) oder unter Bedachtname auf Anmerkung (iii) äquivalent zu einem reellen \mathcal{L} sein, damit die durch reelle Felder ausgedrückten Bewegungsgleichungen und die Hamilton-Funktion reell sind. \mathcal{L} muß relativistisch invariant sein, d.h. unter einer Poincaré-Transformation

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x' = \Lambda x + a \\ \phi_r(x) &\rightarrow \phi'_r(x') \end{aligned} \quad (12.2.25)$$

muß sich \mathcal{L} wie ein Skalar verhalten:

$$\mathcal{L}(\phi'_r(x'), \phi'_{r,\mu}(x')) = \mathcal{L}(\phi_r(x), \phi_{r,\mu}(x)). \quad (12.2.26)$$

Da $d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ ebenfalls invariant ist, ändert sich die Wirkung unter Lorentz-Transformation (12.2.25) nicht, und die Bewegungsgleichungen haben in beiden Koordinatensystemen die gleiche Gestalt, sind also kovariant.

12.3 Kanonische Quantisierung

Unsere nächste Aufgabe ist, die im vorhergehenden Abschnitt eingeführte Feldtheorie zu quantisieren. Dabei läßt man sich von den Ergebnissen des mechanischen elastischen Kontinuumsmodells (Abschn. 12.1.3) leiten und postuliert für die Felder ϕ_r und Impulsfelder π_r die folgenden Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} [\phi_r(\mathbf{x}, t), \pi_s(\mathbf{x}', t)] &= i\delta_{rs}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ [\phi_r(\mathbf{x}, t), \phi_s(\mathbf{x}', t)] &= [\pi_r(\mathbf{x}, t), \pi_s(\mathbf{x}', t)] = 0. \end{aligned} \quad (12.3.1)$$

Man nennt diese Vertauschungsrelationen *kanonische Vertauschungsrelationen* und spricht von *kanonischer Quantisierung*. Für das reelle Klein-Gordon-Feld, wo nach Gl.(12.2.22) $\pi(x) = \dot{\phi}(x)$ ist, bedeutet das auch

$$\begin{aligned} [\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{x}', t)] &= i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \\ [\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t)] &= [\dot{\phi}(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{x}', t)] = 0. \end{aligned} \quad (12.3.2)$$

Entsprechend der allgemeinen Gültigkeit von (12.1.28) und (12.1.41b) werden die kanonischen Vertauschungsrelationen ebenfalls für wechselwirkende Felder postuliert.

12.4 Symmetrien und Erhaltungssätze, Noether Theorem

12.4.1 Energie–Impuls–Tensor, Kontinuitätsgleichungen und Erhaltungssätze

Die Invarianz eines Systems unter kontinuierlichen Symmetrietransformationen führt auf Kontinuitätsgleichungen und Erhaltungssätze. Die Herleitung dieser Erhaltungssätze aus der Invarianz der Lagrange-Dichte ist als Noethersches Theorem bekannt (siehe unten).

Man kann Kontinuitätsgleichungen auch elementar aus den Bewegungsgleichungen ableiten. Dies wird am *Energie-Impuls-Tensor*, der durch

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\mu}} \phi_{r,\nu} - \mathcal{L} g^{\mu\nu} \quad (12.4.1)$$

definiert wird, illustriert. Der Energie–Impuls–Tensor erfüllt die *Kontinuitätsgleichung*⁴

$$T^{\mu\nu}{}_{,\mu} = 0. \quad (12.4.2)$$

Beweis. Die Ableitung von $T^{\mu\nu}$ ergibt

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}{}_{,\mu} &= \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\mu}} \right) \phi_{r,\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\mu}} \phi_{r,\nu}{}_{,\mu} - \partial^\nu \mathcal{L} \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} \phi_{r,\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\mu}} \phi_{r,\nu}{}_{,\mu} - \partial^\nu \mathcal{L} = 0, \end{aligned} \quad (12.4.3)$$

wobei im zweiten Schritt die Euler–Lagrange Gleichung (12.2.15) und $\partial^\nu \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} \partial^\nu \phi_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\mu}} \partial^\nu \phi_{r,\mu}$ verwendet wurden.

Falls ein Vierervektor g^μ eine Kontinuitätsgleichung

$$g^\mu{}_{,\mu} = 0 \quad (12.4.4)$$

erfüllt, so folgt unter der Annahme, daß die Felder, von denen g^μ abhängt, genügend rasch im Unendlichen verschwinden die *Erhaltung* des Raumintegrals über seine Nullkomponente

$$G^0(t) = \int d^3x g^0(\mathbf{x}, t). \quad (12.4.5)$$

Beweis. Aus der Kontinuitätsgleichung folgt mit dem verallgemeinerten Gaußschen Satz

⁴ Diese Kontinuitätsgleichung wird im nächsten Abschnitt aus der raum–zeitlichen Translationsinvarianz hergeleitet, woraus sich in Analogie zur klassischen Mechanik der Name Energie–Impuls–Tensor rechtfertigt.

$$\int_{\Omega} d^4x \frac{\partial}{\partial x^\mu} g^\mu = 0 = \int_{\sigma} d\sigma_\mu g^\mu . \quad (12.4.6)$$

Dies gilt für jedes vierdimensionale Gebiet Ω mit Oberfläche σ . Nun wählt man ein Integrationsgebiet, das sich in den räumlichen Richtungen bis nach Unendlich erstreckt. In der Zeitrichtung sei es durch zwei dreidimensionale Oberflächen $\sigma_1(x^0 = t_1)$ und $\sigma_2(x^0 = t_2)$ begrenzt (Abb. 12.5). Im Unendlichen der raumartigen Richtungen seien ϕ_r und $\phi_{r,\mu}$ Null.

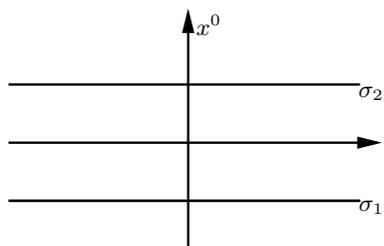


Abb. 12.5. Zur Herleitung des Erhaltungssatzes

$$0 = \int_{\sigma_1} d^3x g^0 - \int_{\sigma_2} d^3x g^0 = \int d^3x g^0(\mathbf{x}, t_1) - \int d^3x g^0(\mathbf{x}, t_2)$$

d.h.

$$G^0(t_1) = G^0(t_2) \quad (12.4.7a)$$

oder auch

$$\frac{dG^0}{dt} = 0 . \quad (12.4.7b)$$

Wendet man dieses Ergebnis auf die Kontinuitätsgleichung für den Energie-Impuls-Tensor (12.4.2) an, so folgt die Erhaltung des *Energie-Impuls-Vierervektors*

$$P^\nu = \int d^3x T^{0\nu}(\mathbf{x}, t) . \quad (12.4.8)$$

Die Komponenten des Energie-Impuls-Vektors sind

$$\begin{aligned} P^0 &= \int d^3x \{ \pi_r(x) \dot{\phi}_r(x) - \mathcal{L}(\phi_r, \phi_{r,\mu}) \} \\ &= \int d^3x \mathcal{H} = H \end{aligned} \quad (12.4.9)$$

und

$$P^j = \int d^3x \pi_r(x) \frac{\partial \phi_r}{\partial x_j} \quad j = 1, 2, 3. \quad (12.4.10)$$

Die nullte Komponente ist gleich der Hamilton-Funktion bzw. dem -Operator, die räumlichen Komponenten stellen den Impuls-Operator des Feldes dar.

12.4.2 Herleitung der Erhaltungssätze für Viererimpuls, Drehimpuls und Ladung aus dem Noetherschen Theorem

12.4.2.1 Noethersches Theorem

Das Theorem besagt, daß aus jeder kontinuierlichen Transformation, die die Wirkung ungeändert läßt, ein Erhaltungssatz folgt. So folgt die Erhaltung des Viererimpulses und des Drehimpulses aus der Invarianz der Lagrange-Dichte \mathcal{L} gegenüber Translationen und Rotationen. Diese bilden kontinuierliche Symmetriegruppen und es reicht, infinitesimale Transformationen zu betrachten. Wir betrachten deshalb die infinitesimale Lorentz-Transformation

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu = x_\mu + \Delta\omega_{\mu\nu} x^\nu + \delta_\mu \quad (12.4.11a)$$

$$\phi_r(x) \rightarrow \phi'_r(x') = \phi_r(x) + \frac{1}{2} \Delta\omega_{\mu\nu} S_{rs}^{\mu\nu} \phi_s(x). \quad (12.4.11b)$$

Die in Gleichung (12.4.11a,b) auftretenden Größen haben die folgende Bedeutung: Die konstante Größe δ_μ bewirkt eine infinitesimale Verschiebung. Der homogene Teil der Lorentz-Transformation ist durch den infinitesimalen antisymmetrischen Tensor $\Delta\omega_{\mu\nu} = -\Delta\omega_{\nu\mu}$ gegeben. Die Koeffizienten $S_{rs}^{\mu\nu}$ im Transformationsgesetz der Felder (12.4.11b) sind antisymmetrisch in μ und ν und sind durch die Transformationseigenschaften der Felder bestimmt. Zum Beispiel gilt für Spinoren (Gl.(6.2.13) u. (6.2.17))

$$\frac{1}{2} \Delta\omega_{\mu\nu} S_{rs}^{\mu\nu} \phi_s = -\frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} \Delta\omega_{rs}^{\mu\nu} \phi_s, \quad (12.4.12a)$$

d.h.

$$S_{rs}^{\mu\nu} = -\frac{i}{2} \sigma_{rs}^{\mu\nu}, \quad (12.4.12b)$$

wobei r und $s (= 1, \dots, 4)$ die vier Komponenten des Spinorfeldes indizieren. Für Vektorfelder ist

$$S_{\sigma\rho}^{\mu\nu} = g_\sigma^\mu g_\rho^\nu - g_\rho^\mu g_\sigma^\nu, \quad (12.4.12c)$$

wobei die Indizes σ, ρ die Werte 0, 1, 2, 3 annehmen. In Gleichung (12.4.12a,b) wird über doppelt vorkommende Indizes μ, ν und s summiert.

Wie schon früher betont wurde, bedeutet die *Invarianz* unter der Transformation (12.4.11a,b), daß die Lagrange Dichte in den neuen Feldern und Koordinaten die gleiche Gestalt besitzt wie in den alten:

$$\mathcal{L}(\phi'_r(x'), \phi'_{r,\mu}(x')) = \mathcal{L}(\phi_r(x), \phi_{r,\mu}(x)) . \quad (12.4.13)$$

Daraus folgt die Kovarianz der Bewegungsgleichungen.

Die Variation von $\phi_r(x)$ bei ungeändertem Argument wird durch

$$\delta\phi_r(x) = \phi'_r(x) - \phi_r(x) , \quad (12.4.14)$$

definiert. Außerdem definieren wir die *totale* Variation

$$\Delta\phi_r(x) = \phi'_r(x') - \phi_r(x) , \quad (12.4.15)$$

die die Änderung auf Grund der Form und des Arguments der Funktion beinhaltet. Zwischen diesen beiden Größen findet man folgenden Zusammenhang

$$\begin{aligned} \Delta\phi_r(x) &= (\phi'_r(x') - \phi_r(x')) + (\phi_r(x') - \phi_r(x)) \\ &= \delta\phi_r(x') + \frac{\partial\phi_r}{\partial x_\nu} \delta x_\nu + \mathcal{O}(\delta^2) \\ &= \delta\phi_r(x) + \frac{\partial\phi_r}{\partial x_\nu} \delta x_\nu + \mathcal{O}(\delta^2) , \end{aligned} \quad (12.4.16)$$

wobei mit $\mathcal{O}(\delta^2)$ Terme zweiter Ordnung gemeint sind, welche vernachlässigt werden. Entsprechend zu Gl.(12.4.16) kann man die nach Gl.(12.4.13) verschwindende Differenz der Lagrange-Dichten in den Koordinatensystemen I und I' , also die totale Variation der Lagrange-Dichte, umformen

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{L}(\phi'_r(x'), \phi'_{r,\mu}(x')) - \mathcal{L}(\phi_r(x), \phi_{r,\mu}(x)) \\ &= \mathcal{L}(\phi'(x'), \dots) - \mathcal{L}(\phi(x'), \dots) + (\mathcal{L}(\phi(x'), \dots) - \mathcal{L}(\phi(x), \dots)) \\ &= \delta\mathcal{L} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu + \mathcal{O}(\delta^2) . \end{aligned} \quad (12.4.17)$$

Für den ersten Term auf der rechten Seite von (12.4.17) erhält man

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r} \delta\phi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{r,\mu}} \delta\phi_{r,\mu} \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r} \delta\phi_r - \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{r,\mu}} \right) \delta\phi_r + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{r,\mu}} \delta\phi_r \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left\{ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{r,\mu}} \left[\Delta\phi_r - \frac{\partial\phi_r}{\partial x_\nu} \delta x_\nu \right] \right\} , \end{aligned}$$

wo nach dem zweiten Gleichheitszeichen die Euler-Lagrange-Gleichung eingesetzt und im letzten Schritt Gl.(12.4.16) verwendet wurde. Zusammen mit $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu} \delta x^\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\mathcal{L} \delta x^\mu) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\mathcal{L} g^{\mu\nu} \delta x_\nu)$ folgt aus (12.4.17) die Kontinuitätsgleichung

$$g^{\mu}_{,\mu} = 0 \quad (12.4.18a)$$

für den Vierervektor

$$g^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\mu}} \Delta \phi_r - T^{\mu\nu} \delta x_\nu . \quad (12.4.18b)$$

Hier hängt g^μ von den Variationen $\Delta \phi_r$ und δx_ν ab, und je nach Wahl ergeben sich verschiedene Erhaltungssätze.

Die Gleichungen (12.4.18a) und (12.4.18b), die zu den Erhaltungsgrößen (12.4.5) führen, stellen die allgemeine Aussage des *Noetherschen Theorems* dar.

12.4.2.2 Anwendung auf Translations-, Dreh- und Eichinvarianz

Wir analysieren nun drei wichtige Spezialfälle des Ergebnisses des vorhergehenden Abschnitts.

(i) Reine *Translationen*:

Für Translationen ist

$$\begin{aligned} \Delta \omega_{\mu\nu} &= 0 \\ \delta x_\nu &= \delta_\nu \end{aligned} \quad (12.4.19a)$$

dann folgt aus (12.4.11b) $\phi'_r(x') = \phi_r(x)$, also

$$\Delta \phi_r = 0 . \quad (12.4.19b)$$

Die Aussage des Noetherschen Theorems vereinfacht sich dann zu $g^\mu = -T^{\mu\nu} \delta_\nu$, und da die vier Verschiebungen δ_ν voneinander unabhängig sind, folgen die vier Kontinuitätsgleichungen

$$T^{\mu\nu}{}_{,\mu} = 0 \quad (12.2.31)$$

für den in (12.4.3) definierten Energie-Impuls-Tensor $T^{\mu\nu}$, $\nu = 0, 1, 2, 3$. Für $\nu \equiv 0$ ergibt sich die Kontinuitätsgleichung für die Viererimpulsdichte $P^\mu = T^{0\mu}$ und für $\nu = i$ die Größen $T^{i\mu}$. Die Erhaltungssätze $T^{i\mu}{}_{,\mu} = 0$ enthalten als Nullkomponenten die räumlichen Impulsdichten P^i und als Stromdichten die Komponenten des sog. Spannungstensors T^{ij} . (Siehe auch die Diskussion nach Gl.(12.4.7b).)

(ii) Für *Drehungen* ist nach Gl.(12.4.11a,b)

$$\delta_\mu = 0, \quad \delta x_\nu = \Delta \omega_{\nu\sigma} x^\sigma \quad (12.4.20a)$$

und

$$\Delta \phi_r = \frac{1}{2} \Delta \omega_{\nu\sigma} S_{rs}^{\nu\sigma} \phi_s . \quad (12.4.20b)$$

Dann folgt aus (12.4.18b)

$$g^\mu \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\mu}} \Delta\omega_{\nu\sigma} S_{rs}^{\nu\sigma} \phi_s - T^{\mu\nu} \Delta\omega_{\nu\sigma} x^\sigma . \quad (12.4.21)$$

Mit der Definition

$$M^{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\mu}} S_{rs}^{\nu\sigma} \phi_s(x) + (x^\nu T^{\mu\sigma} - x^\sigma T^{\mu\nu}) \quad (12.4.22)$$

läßt sich (12.4.21) folgendermaßen umformen

$$\begin{aligned} g^\mu &= \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\mu}} S_{rs}^{\nu\sigma} \phi_s \Delta\omega_{\nu\sigma} - \frac{1}{2} T^{\mu\nu} \Delta\omega_{\nu\sigma} x^\sigma - \frac{1}{2} T^{\mu\sigma} \Delta\omega_{\sigma\nu} x^\nu \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{r,\mu}} S_{rs}^{\nu\sigma} \phi_s + x^\nu T^{\mu\sigma} - x^\sigma T^{\mu\nu} \right) \Delta\omega_{\nu\sigma} \\ &= \frac{1}{2} M^{\mu\nu\sigma} \Delta\omega_{\nu\sigma} . \end{aligned} \quad (12.4.20')$$

Da die 6 nichtverschwindenden Elemente der antisymmetrischen Matrix $\Delta\omega_{\nu\sigma}$ voneinander unabhängig sind, folgt, daß die Größen $M^{\mu\nu\sigma}$ die sechs Kontinuitätsgleichungen

$$\partial_\mu M^{\mu\nu\sigma} = 0 \quad (12.4.23)$$

erfüllen. Daraus folgen die 6 Größen

$$\begin{aligned} M^{\nu\sigma} &= \int d^3x M^{0\nu\sigma} \\ &= \int d^3x (\pi_r(x) S_{rs}^{\nu\sigma} \phi_s(x) + x^\nu T^{0\sigma} - x^\sigma T^{0\nu}) . \end{aligned} \quad (12.4.24)$$

Für die räumlichen Komponenten erhält man den *Drehimpuls*-Operator

$$M^{ij} = \int d^3x (\pi_r S_{rs}^{ij} \phi_s + x^i T^{0j} - x^j T^{0i}) . \quad (12.4.25)$$

Dabei ist der Drehimpulsvektor $(I^1, I^2, I^3) \equiv (M^{23}, M^{31}, M^{12})$ erhalten. Die Summe aus zweitem und drittem Term stellt das äußere Produkt des Ortsvektors mit der räumlichen Impulsdichte dar, kann also als Bahndrehimpuls des Feldes aufgefaßt werden. Der erste Term wird als innerer Drehimpuls oder Spin interpretiert (siehe später (13.3.13') und (E.31c)). Die raumzeitlichen Komponenten $(0i)$

$$M^{0i} = \int d^3x M^{00i}$$

können zum dreikomponentigen boost-Vektor

$$\mathbf{K} = (M^{01}, M^{02}, M^{03}) \quad (12.4.26)$$

zusammengefaßt werden, welcher Erzeugender der Lorentz-Transformationen ist.

(iii) *Eichtransformationen* (Eichtransformation erster Art)

Als letzte Anwendung des Noetherschen Theorems betrachten wir die Folgerung aus der *Eichinvarianz*.

Angenommen, die Lagrange-Dichte enthält eine Teilmenge von Feldern ϕ_r und ϕ_r^\dagger nur in Kombinationen der Art $\phi_r^\dagger(x)\phi_r(x)$ und $\phi_{r,\mu}^\dagger(x)\phi_r{}^{\prime\mu}(x)$ dann ist die Lagrange-Dichte invariant gegen die Eichtransformation erster Art, die definiert ist durch

$$\begin{aligned}\phi_r(x) &\rightarrow \phi_r'(x) = e^{i\varepsilon}\phi_r(x) \approx (1+i\varepsilon)\phi_r(x) \\ \phi_r^\dagger(x) &\rightarrow \phi_r^{\dagger'}(x) = e^{-i\varepsilon}\phi_r^\dagger(x) \approx (1-i\varepsilon)\phi_r^\dagger(x)\end{aligned}\quad (12.4.27)$$

mit beliebigem reellem ε . Die Koordinaten werden nicht transformiert, so daß nach Gl.(12.4.14)

$$\begin{aligned}\delta\phi_r(x) &= i\varepsilon\phi_r(x) \\ \delta\phi_r^\dagger(x) &= -i\varepsilon\phi_r^\dagger(x)\end{aligned}\quad (12.4.28)$$

und (12.4.16)

$$\Delta\phi_r(x) = \delta\phi_r(x), \quad \Delta\phi_r^\dagger(x) = \delta\phi_r^\dagger(x)\quad (12.4.29)$$

gilt. Aus dem Noether-Theorem (12.4.18b) folgt die Viererstromdichte

$$g^\mu \propto \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{r,\mu}} i\varepsilon\phi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{r,\mu}^\dagger} (-i\varepsilon)\phi_r^\dagger,$$

d.h.

$$\begin{aligned}g^\mu(x) &= i \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{r,\mu}}\phi_r - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{r,\mu}^\dagger}\phi_r^\dagger \right) \\ g^0(x) &= i (\pi_r(x)\phi_r(x) - \pi_r^\dagger(x)\phi_r^\dagger(x))\end{aligned}\quad (12.4.30)$$

genügt einer Kontinuitätsgleichung. Daraus folgt, daß

$$Q = -iq \int d^3x (\pi_r(x)\phi_r(x) - \pi_r^\dagger(x)\phi_r^\dagger(x))\quad (12.4.31)$$

erhalten ist; d.h. in quantisierter Form:

$$\frac{dQ}{dt} = 0, \quad [Q, H] = 0.\quad (12.4.32)$$

q wird sich als Ladung erweisen. Um dies schon im gegenwärtigen Stadium einzusehen, berechnen wir den Kommutator von Q und ϕ_r mit den Vertauschungsrelationen (12.3.1):

$$[Q, \phi_r(x)] = -iq \int d^3x' \underbrace{[\pi_s(x'), \phi_r(x)]}_{-i\delta_{sr}\delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x})} \phi_s(x') = -q\phi_r(x).\quad (12.4.33)$$

Falls $|Q'\rangle$ ein Eigenzustand von Q ist,

$$Q|Q'\rangle = Q'|Q'\rangle, \quad (12.4.34)$$

dann ist $\phi_r(x)|Q'\rangle$ Eigenzustand zum Eigenwert $Q' - q$ und $\phi_r^\dagger(x)|Q'\rangle$ Eigenzustand zum Eigenwert $Q' + q$, wie aus (12.4.33) folgt:

$$\begin{aligned} (Q\phi_r - \phi_r Q)|Q'\rangle &= -q\phi_r|Q'\rangle \\ Q\phi_r|Q'\rangle - \phi_r Q|Q'\rangle &= -q\phi_r|Q'\rangle \\ Q\phi_r|Q'\rangle &= (Q' - q)\phi_r|Q'\rangle. \end{aligned} \quad (12.4.35)$$

Mit komplexen, d.h. mit nichthermiteschen Feldern kann man geladene Teilchen darstellen. Die Erhaltung der Ladung folgt aus der Invarianz gegenüber Eichtransformationen erster Art (d.h. die Phase ist unabhängig von x). In Theorien, in denen das Feld an ein Eichfeld koppelt, gibt es auch Eichtransformationen zweiter Art $\psi \rightarrow \psi' = \psi e^{i\alpha(x)}$, $A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \frac{1}{e}\partial^\mu\alpha(x)$.

12.4.2.3 Erzeugende der Symmetrietransformationen in der Quantenmechanik

Wir setzen voraus, daß der Hamilton-Operator H zeitunabhängig ist und betrachten Bewegungskonstante $A(t)$, die nicht explizit von der Zeit abhängen. Die Heisenberg-Bewegungsgleichungen

$$\frac{dA(t)}{dt} = i[H, A(t)] \quad (12.4.36)$$

implizieren, daß derartige Konstante der Bewegung mit H kommutieren

$$[H, A] = 0. \quad (12.4.37)$$

Symmetrietransformationen können allgemein durch unitäre oder im Fall der Zeitumkehr durch antiunitäre Transformationen dargestellt werden¹. Im Fall der kontinuierlichen Transformationen, die stetig mit der Einheit zusammenhängen, wie zum Beispiel die Drehungen, sind die Transformationen unitär. D.h. die Zustände und Operatoren transformieren sich wie

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = U|\psi\rangle \quad (12.4.38a)$$

und

$$A \rightarrow A' = UAU^\dagger. \quad (12.4.38b)$$

Die Unitarität garantiert, daß Übergangsamplituden und Matrixelemente von Operatoren invariant bleiben, und daß Operator-Gleichungen kovariant sind,

¹ E.P. Wigner, *Group Theory and its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra*, Academic Press, New York, 1959, Appendix to Chapt. 20, p. 233; V. Bargmann, *J. Math. Phys.* **5**, 862 (1964)

d.h. in den ursprünglichen und in den transformierten Operatoren haben die Bewegungsgleichungen und Vertauschungsrelationen die gleiche Gestalt.

Für eine kontinuierliche Transformation können wir den unitären Operator in der Form

$$U = e^{i\alpha T} \quad (12.4.39)$$

mit $T^\dagger = T$ und einem reellen stetigen Parameter α darstellen. Der hermitesche Operator T heißt Erzeugende der Transformation. Für $\alpha = 0$ ist $U(\alpha = 0) = 1$. Für eine infinitesimale Transformation ($\alpha \rightarrow \delta\alpha$) kann U entwickelt werden

$$U = 1 + i\delta\alpha T + O(\delta\alpha^2), \quad (12.4.39')$$

und das Transformationsgesetz für einen Operator A hat die Gestalt

$$\begin{aligned} A' &= A + \delta A = (1 + i\delta\alpha T)A(1 - i\delta\alpha T) + O(\delta\alpha^2) \\ \text{also } \delta A &= i\delta\alpha [T, A]. \end{aligned} \quad (12.4.37b')$$

Wenn das physikalische System unter der betrachteten Transformation invariant ist, dann muß der Hamilton-Operator invariant bleiben, $\delta H = 0$, und aus (12.4.37b') folgt

$$[T, H] = 0. \quad (12.4.40)$$

Da T mit H kommutiert, ist die Erzeugende der Symmetrietransformation eine Bewegungskonstante.

Umgekehrt wird durch jede der Erhaltungsgrößen G^0 über den unitären Operator

$$U = e^{i\alpha G^0} \quad (12.4.41)$$

eine Symmetrietransformation erzeugt, da G^0 wegen $[H, G^0] = \frac{1}{i}\dot{G}^0 = 0$ mit H kommutiert und deshalb $UHU^\dagger = H$, also H invariant ist. Daß dies genau diejenige Transformation ist, aus der man die zugehörige, einer Kontinuitätsgleichung genügende, erhaltene Viererstromdichte hergeleitet hat, ist naheliegend und kann explizit für P^μ , Q und $M^{\mu\nu}$ nachgeprüft werden.

Der boost-Vektor (12.4.26)

$$\mathbf{K} = t\mathbf{p} - \int d^3x \left(\mathbf{x}T^{00}(\mathbf{x}, t) - \pi_r(x) S_{rs}^{0i} \phi_s(x) \right)$$

ist zwar konstant, hängt aber explizit von der Zeit ab. Aus der Heisenberg-Bewegungsgleichung $\dot{\mathbf{K}} = 0 = i[H, \mathbf{K}] + \mathbf{p}$ folgt, daß \mathbf{K} nicht mit H kommutiert

$$[H, \mathbf{K}] = \mathbf{p}. \quad (12.4.42)$$

Aufgaben zu Kapitel 12

12.1 Beweisen Sie die Vollständigkeitsrelation (12.1.7b) und Orthogonalitätsrelation (12.1.7b).

12.2 Zeigen Sie die Richtigkeit der Vertauschungsrelation (12.1.10).

12.3 Zeigen Sie, daß der Hamilton-Operator (12.1.1) für die gekoppelten Oszillatoren in (12.1.11) umgeformt werden kann und die Dispersionsrelation (12.1.12) ergibt.

12.4 Beweisen Sie die Umkehrrelation (12.1.14a,b).

12.5 Beweisen Sie die Vertauschungsrelationen der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren (12.1.15).

12.6 Zeigen Sie den Erhaltungssatz (12.4.7b), indem Sie $\frac{dG^0}{dt}$ unter Verwendung des dreidimensionalen Gaußschen Integralsatzes berechnen und in der Definition von G^0 über den ganzen Raum integrieren.

12.7 Die kohärenten Zustände für die lineare Kette sind als Eigenzustände für die Vernichtungsoperatoren a_k definiert. Berechnen Sie den Mittelwert des Operators

$$q_n(t) = \sum_k \frac{1}{\sqrt{2Nm\omega_k}} \left[e^{i(kna - \omega_k t)} a_k(0) + e^{-i(kna - \omega_k t)} a_k^\dagger(0) \right]$$

für kohärente Zustände.