8. Kernkräfte

Der einfachste gebundene Kern ist das Deuteron, das ein gebundener Kernzustand zwischen einem Proton und einem Neutron ist. An ihm sollten alle wesentlichen Eigenschaften und Phänomene zu testen sein, die zur Beschreibung von Kernen und den sie zusammenhaltenden Kräften entwickelt wurden. Wir beginnen deshalb dieses Kapitel mit einer kurzen Übersicht über das Deuteron.

8.1 Das Deuteron

Das Deuteron, das schwere stabile Isotop des Wasserstoffkerns, hat eine Masse von $m_\mathrm{d} = (2.01355321271 \pm 0.00000000035)$ u, die massenspektrometrisch bestimmt wurde. Proton und Neutron sind im Deuteron mit einer Energie von

$$E_\mathrm{B} = (2.22456671 \pm 0.00000039)\ \mathrm{MeV} \tag{8.1}$$

gebunden. Dieser Wert wurde mit der Neutroneneinfangreaktion H(n,γ)D gemessen [KE99]. Es existiert kein angeregter Zustand. Im Grundzustand hat das Deuteron den Spin und die Parität $I^\pi = 1^+$. Demzufolge können Proton und Neutron sich nur im Zustand mit dem relativen Bahndrehimpuls $\ell =$0, 1, 2 befinden, wobei allerdings $\ell = 1$ wegen der positiven Parität ausgeschlossen ist. Das Deuteron hat den Isopin $T = 0$.

Das magnetische Moment des Deuterons beträgt

$$\mu_\mathrm{d} = (0.8574382284 \pm 0.0000000094)\, \mu_\mathrm{K}\ . \tag{8.2}$$

Mit Hilfe der Molekularstrahltechnik wurde ein elektrisches Quadrupolmoment

$$Q = (2.860 \pm 0.015) \cdot 10^{-27}\ \mathrm{cm}^2 \tag{8.3}$$

experimentell gemessen.

Beide Bestimmungsgrößen haben weitreichende Konsequenzen für die Beschreibung des Deuterons. Der relative Bahndrehimpuls $\ell = 0$ bedeutet, daß

Proton und Neutron durch eine kugelsymmetrische Wellenfunktion beschrieben werden könnten. In diesem Falle wäre aber das elektrische Quadrupolmoment null. Das gemessene magnetische Moment müßte in einem solchen Zustand gerade gleich der Summe der magnetischen Momente von Proton und Neutron (vgl. Abschn. 3.3.4) sein, falls sich die magnetischen Momente durch die Bindung nicht ändern.

$$\mu_\mathrm{p} + \mu_\mathrm{n} = 2.792\mu_\mathrm{K} - 1.913\mu_\mathrm{K} = 0.879\mu_\mathrm{K} \tag{8.4}$$

Der gemessene Wert weicht allerdings davon ab. Wenn man jedoch annimmt, daß die Wellenfunktion des Deuterons nicht allein durch den S-Zustand charakterisiert ist, sondern daß noch weitere Komponenten beigemischt sein können, wird der Wert des magnetischen Moments und des elektrischen Quadrupolmoments geändert. Die Wellenfunktion Ψ, die das Deuteron beschreibt, setzen wir mit einer Beimischung eines D-Zustandes an:

$$\Psi = \sqrt{P_\mathrm{S}}\Psi^{(\mathrm{S})} + \sqrt{P_\mathrm{D}}\Psi^{(\mathrm{D})} \; . \tag{8.5}$$

wobei $\sqrt{P_\mathrm{S}}$, $\sqrt{P_\mathrm{D}}$ die Amplituden der beiden den Grundzustand des Deuterons beschreibenden Komponenten sind. Wenn nur diese beiden Komponenten eingehen, gilt für die Wahrscheinlichkeit $P_\mathrm{S} + P_\mathrm{D} = 1$. Aus dem Wert für das gemessene magnetische Moment ergibt sich in quantenmechanischer Rechnung als Wert für die Beimischung $P_\mathrm{D} \simeq 0.0393$. Damit liegt ein etwa 4-prozentiger Anteil einer D-Wellenfunktion im Deuteron vor. Auch das gemessene Quadrupolmoment deutet darauf hin, daß das Deuteron nicht kugelsymmetrisch, sondern prolat deformiert ist.

8.2 Streuzustände

8.2.1 Streuzustände im Zwei-Nukleonensystem

Die Existenz eines gebundenen Zustands zwischen Proton und Neutron führt auf die Frage nach dem physikalischen Verhalten zweier gleichartiger Nukleonen untereinander. Wenn die Kernkraft unabhängig von der Ladung ist, dann müssen auch zwei Protonen und zwei Neutronen den gleichen Kräften unterworfen sein. Da es keinen Kern ^{2}He und kein gebundenes Dineutron-System gibt, kann die Auswirkung der Ladungsunabhängigkeit der Kernkraft nur in Streuexperimenten untersucht werden.

Die Proton-Proton-Streuung läßt sich über einen weiten Energiebereich von keV bis GeV Energien untersuchen, da Wasserstofftargets verfügbar sind. Neutronen können an freien Neutronen nicht gestreut werden, weil keine Neutronentargets existieren, jedoch können Neutronen an Deuterium gestreut werden, wobei sich die Streuquerschnitte dann aus der Neutron-Proton-Streuung und der Neutron-Neutron-Streuung zusammensetzen.

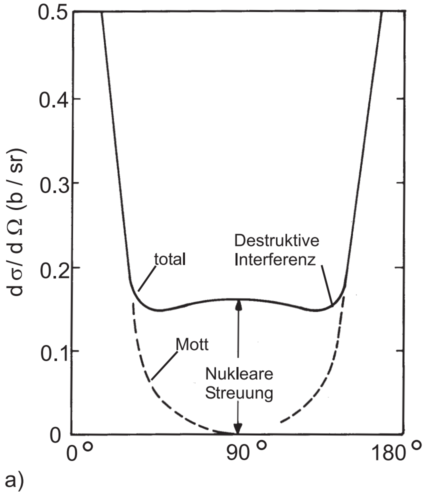
Bei der Behandlung der Streuung (Abschn. 6.3.1) haben wir stets die Streuung ungleicher Kerne angenommen. Hier bei der Proton-Proton-Streuung tritt die Streuung identischer Teilchen auf, die wir bereits in Abschn. 3.2 als Methode zur Bestimmung der Spins schwerer Kerne beschrieben haben. Mit Gleichung (3.23) wurde der Mott-Streuquerschnitt angegeben, der die Symmetrie des Streuquerschnitts um 90° angibt, aber zunächst nur die Coulomb-Wechselwirkung berücksichtigt. Diesen Streuquerschnitt müssen wir jedoch für die Untersuchung der Proton-Proton-Streuung um die Anteile der starken Wechselwirkung erweitern

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\sigma(\theta)}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 4T}\right)^2 \Bigg[& \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{\cos^4\frac{\theta}{2}} - \frac{\cos\left(\eta\ln\tan^2\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}} \\ & -\frac{2}{\eta}\sin\delta_0\left\{\frac{\cos\left(\delta_0+\eta\ln\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\frac{\theta}{2}} + \frac{\cos\left(\delta_0+\eta\ln\cos^2\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\right\} \\ & + \frac{4}{\eta^2}\sin^2\delta_0\Bigg] \,. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Darin ist $\eta = e^2/(4\pi\varepsilon_0\hbar v)$ der Sommerfeld-Parameter und $m = \frac{2}{3}m_{\mathrm{prot}}$ die reduzierte Masse. Der erste Term gibt gerade den Rutherford-Streuquerschnitt an (vgl. (2.11)). Der zweite Term beschreibt die Rutherford-Streuung identischer Teilchen, während der dritte Term ein quantenmechanischer Coulomb-Interferenzterm bei der Streuung identischer Teilchen ist (vgl. (3.23)). Die nächsten beiden Terme berücksichtigen die Interferenz zwischen Coulomb- und Kernpotentialstreuung. Schließlich beschreibt der letzte Term die reine Kernpotentialstreuung. Mit dieser Formel wurde die Proton-Proton-Streuung bis ca. 300 keV richtig beschrieben, weil bis zu dieser Energie die Kernkräfte keinen merklichen Einfluß ausüben. Die gestrichelte Linie in Bild 8.1a zeigt diesen Verlauf. Oberhalb dieser Energie wird der Einfluß der Kernkraft bemerkbar, der Wirkungsquerschnitt steigt an, wie die ausgezogene Linie für die Streuung von 2.5 MeV Protonen zeigt.

Bis ca. 10 MeV kann dieser Prozeß als s-Wellen-Streuung, also nur unter Berücksichtigung des gegenseitigen Bahndrehimpulses mit $\ell = 0$, beschrieben werden. Deshalb tritt nur die Streuphase δ_0 auf. Im vierten Term in (8.6) ist die Interferenz von Coulomb- und nuklearer Streuamplitude berücksichtigt. Aus diesem Interferenzterm kann auch das Vorzeichen der nuklearen Streuphase relativ zur Coulomb-Streuphase entnommen werden. Die Interferenz ist destruktiv, also sind die Vorzeichen entgegengesetzt. Da die Coulomb-Streuphase wegen der abstoßenden Kraft negativ ist (vgl. Bild 6.10), muß die nukleare Streuphase positiv sein, wie es auch das anziehende Potential erfordert. Die Messungen im Bereich bis 10 MeV entsprechen sehr gut den erläuterten Vorstellungen, wie in Bild 8.1b gezeigt.

Eine detaillierte Analyse der Streuphase δ_0 liefert ferner die Aussage, daß es im Proton-Proton-System keinen gebundenen Zustand geben kann. Allerdings geben Reaktionen, in denen schnelle ^{17}F-Kerne ein Proton einfangen,



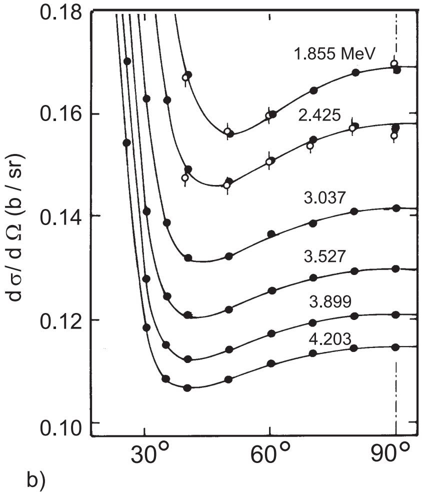


Bild 8.1. (**a**) Differentieller Streuquerschnitt der p-p-Streuung, (**b**) gemessener differentieller Wirkungsquerschnitt im Winkelbereich bis 90° (im CM-System)

Hinweise darauf, dass eine korrelierte Emission zweier Protonen aus dem Kern ^{18}Ne erfolgen kann, die als Diprotonenzustand gedeutet werden können.

Die Analyse der Streuphase bei Streuexperimenten mit Neutronen an Deuteronen zeigt ebenfalls, daß es kein gebundenens n-n-System gibt.

8.2.2 Streuzustände zur Bestimmung der Spin-Bahn-Wechselwirkung

Die Spin-Abhängigkeit der Kernkraft wurde ebenfalls in Streuexperimenten nachgewiesen. Wenn z.B. polarisierte Protonen an einem Kern mit Spin 0 (z.B. ^{12}C) gestreut werden, beobachtet man eine Rechts-Links-Asymmetrie in der Winkelverteilung, weil eine Wechselwirkung zwischen dem Bahndrehimpuls in Bezug auf den streuenden Kern und dem Nukleonenspin einsetzt.

Wir wollen die Situation anhand der Streuung eines unpolarisierten Strahls erläutern. In Bild 8.2a und b sind Teilchen auf zwei Wegen um einen Targetkern gezeigt, deren Spins gleichhäufig nach oben wie nach unten zeigen mögen. Der Bahndrehimpulsvektor von Teilchen, die links am Targetkern vorbeifliegen, zeige nach unten, derjenige von Teilchen, die rechts am Target vorbeifliegen, nach oben. Bei einem unpolarisierten Strahl stehen Spin und Bahndrehimpuls dann gleichhäufig parallel wie antiparallel. Wenn es eine Spin-Bahnkraft gibt, womit wir im Abschn. 4.2 bereits die Sequenz der Energieniveaus nach dem Einzelteilchen-Schalenmodell erläutert haben, dann sollte die Kraft für parallele und antiparallele Orientierung verschieden voneinander sein, woraus sich unterschiedliche Winkelablenkungen ergeben. Damit

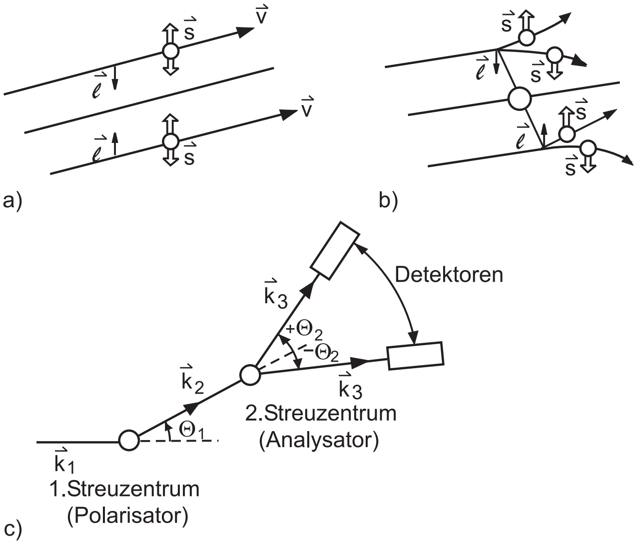


Bild 8.2. Streuung eines unpolarisierten Strahls: (**a**) gleiche Wahrscheinlichkeit für „Spin nach oben" und „Spin nach unten" für unterschiedliche Richtungen des Bahndrehimpulses ℓ, (**b**) asymmetrische Streuung für Teilchen in unterschiedlichen Spinzuständen (Einfluß der Spin-Bahn-Kraft), (**c**) Prinzip eines Doppel-Streuexperiments. In der ersten Streuung wird der Strahl polarisiert, in der zweiten analysiert (k_i Wellenvektoren).

lassen sich Spinorientierungen trennen, d.h. zumindest teilpolarisierte Strahlen können auf diese Weise erzeugt werden. In einem Doppelstreuexperiment, wie in Bild 8.2c gezeigt, ließe sich dann aus der Polarisation (Spinausrichtung) die Wirkung der Spin-Bahn-Kraft bestimmen.

8.3 Das phänomenologische Kernpotential

Ein Kernpotential, dessen negativer Gradient die Kernkraft liefern soll ($\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\partial} V/\boldsymbol{\partial r}$), muß folgenden experimentell bestimmten Eigenschaften der Kraft Rechnung tragen:

- starke Kraft,
- kurze Reichweite, die nicht über die Pionen-Compton-Wellenlänge $\lambda_C^\pi \simeq$ 1.43 fm hinausreicht, oberhalb etwa 4 fm verschwindet die Kraft,
- weitgehend anziehend,
- sättigend, denn die Bindungsenergie pro Nukleon hat einen fast konstanten Wert, wie die Beschreibung mit dem Tröpfchenmodell (Kap. 3) zeigte. Dieses Faktum kann als eine Kombination eines abstoßenden Terms bei sehr kleinen Abständen ($\lesssim$0.5 fm), einer Tensorkraft und des Pauli-Prinzips verstanden werden.

- aus dem für die erfolgreiche Beschreibung vieler Kerneigenschaften wichtigen Einzelteilchen-Schalenmodell ist ferner die starke Spin-Bahn-Kraft bekannt.

Bereits 1935 schlug Hideki Yukawa ein Kernpotential vor, mit dem die bekannten Phänomene der Kernphysik beschrieben werden sollten (vgl. Kasten 8.1). Dieses Potential

$$V_0(r) = -g^2 \frac{\mathrm{e}^{-r/\lambda\!\!\!^{-}}}{r} \tag{8.7}$$

mit der Kopplungskonstanten g erlaubt es, die kurze Reichweite der Kernkräfte zu beschreiben. Die Größe $\lambda\!\!\!^{-}$ im Exponenten wird mit der Compton-Wellenlänge des Pions gleichgesetzt, worauf die Vorstellung beruht, daß die Kernkräfte durch den Austausch von Pionen wirken. Die Pionen haben einen ganzzahligen Spin, womit sie als Feldquanten des Kernkraftfeldes verstanden werden können, in Analogie zum Photon, das als Feldquant des elektromagnetischen Feldes wirkt.

Im Bereich oberhalb 1.2 fm ist der Pionenaustausch für die Wechselwirkung als Ein-Pionen-Austausch verantwortlich. Im Bereich $0.6 \leq r \leq 1.3$ fm wird die anziehende Wirkung durch den Austausch mehrerer skalarer Mesonen (Pionen, η-Mesonen) beschrieben, während der innere, harte, abstoßende Kern (hard core) durch den Austausch von Vektor-Mesonen (ϱ-Mesonen, ω-Mesonen) beschrieben wird. In Bild 8.3 sind die einzelnen Anteile separat aufgeführt.

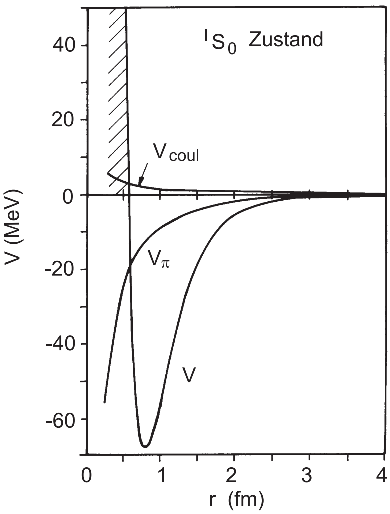


Bild 8.3. Potentiale zur Beschreibung der Kernkraft für einen $^1S_0$-Zustand

Neben einem radialsymmetrischen Anteil sind jedoch diejenigen Potentiale zu berücksichtigen, die in den vorhergehenden Abschnitten erläutert wurden. Das Nukleon-Nukleon-Potential setzt sich demnach aus einer ganzen Reihe von Termen zusammen:

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{NN}}(r) = {} & V_0(r) + V_{SS}(r)\frac{S_1 S_2}{\hbar^2} + V_{\mathrm{T}}(r)\left(\frac{3(\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{S}_2 \cdot \boldsymbol{r})}{r^2\hbar^2} - \frac{S_1 S_2}{\hbar^2}\right) \\ & + V_{LS}(r)(S_1 + S_2)\frac{L}{\hbar^2} + V_{LS}(r)\frac{(\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{L})(\boldsymbol{S}_2 \cdot \boldsymbol{L})}{\hbar^4} \\ & + V_{Sp}(r)\frac{(\boldsymbol{S}_2 \cdot \boldsymbol{p})(\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{p})}{\hbar^2 m^2 c^2} \; . \end{aligned} \tag{8.8}$$

Der erste Term $V_0(r)$ ist das Zentralpotential, der zweite Term berücksichtigt die reine Spin-Spin-Wechselwirkung, der dritte Term ist das Tensorpotential, auf das die Deformation des Deuterons als Einfluß einer nichtzentralen Kraft hingewiesen hat. Die Form der Wechselwirkung ist die gleiche wie die Wechselwirkung zweier magnetischer Dipole. Tritt dieser Term auf, dann können Mischungen von Bahndrehimpulszuständen vorkommen. Der vierte Term beinhaltet die auf den Kernkräften beruhende Spin-Bahn-Wechselwirkung. Die beiden letzten Terme entstammen Symmetriebetrachtungen, so daß sie eher aus formalen Gründen eingeführt werden, zumal ihre quadratische Abhängigkeit vom Impuls sie als klein gegenüber den anderen Termen ausweist. Sie werden häufig gegenüber den zuerst genannten Termen vernachlässigt.

Dieser phänomenologische Ansatz enthält eine Reihe von Parametern, die durch Vergleich mit experimentellen Ergebnissen angepaßt werden. Dazu gehören die Streuphasen der p-p-, n-n-, und n-d-Streuung, sowie auch die Wellenfunktion des Deuterons.

Kasten 8.1: Stärke der Kernkraft

Am Beispiel des Deuterons wollen wir die Stärke der Kernkraft zwischen zwei Nukleonen abschätzen. Dazu gehen wir vom attraktiven Yukawa-Potential $V_0(r)$ (8.7) aus:

$$V_0(r) = -g^2 \frac{\mathrm{e}^{-r/\lambda\!\!\!^{-}}}{r} \; . \tag{8.9}$$

Die Konstante $\lambda\!\!\!^{-}$ folgt aus der Yukawa-Theorie als Compton-Wellenlänge des Pions: $\lambda\!\!\!^{-} = \lambda\!\!\!^{-}{}_{\mathrm{C}}^{\pi} = \hbar/m_\pi c$, mit der Pionmasse $m_\pi = 138$ MeV/c^2. Setzt man die Konstanten ein, so erhalten wir für die Reichweite der Kernkraft $\lambda\!\!\!^{-} = 1.43$ fm.

Den Faktor g^2, mit der Dimension MeV·fm, die Stärke der Kernkraft, wollen wir aus der nachfolgenden Überlegung abschätzen. Wir nehmen an, daß sich Proton und Neutron in ihrem ruhenden Schwerpunktsystem befinden, wobei der Schwerpunkt auch Koordinatenursprung sein soll. Dann ist $\boldsymbol{r}_2 = -\boldsymbol{r}_1$ und die Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}_2 = -\boldsymbol{v}_1$, z.B. bei einer Rotationsbewegung um den Schwerpunkt. Wir setzen ferner $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$ und $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$, woraus sich als mechanische Energie ergibt:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m_1 \boldsymbol{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \boldsymbol{v}_2^2 - g^2 \frac{\mathrm{e}^{-|\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}|/\lambda\!\!\!^-}}{|\boldsymbol{r_2} - \boldsymbol{r_1}|} \\ &= \frac{1}{2} \mu \boldsymbol{v}^2 - g^2 \frac{\mathrm{e}^{-r/\lambda\!\!\!^-}}{r} \ . \end{aligned} \tag{8.10}$$

Darin haben wir die reduzierte Masse $\mu = (m_1 m_2)/(m_1 + m_2) = m/2$ eingesetzt, da die Nukleonenmassen nahezu gleich sind. Die Relativkoordinaten erlauben es, das „Zweimassenproblem“ auf die reduzierte Masse zu beschränken. Wir müssen ferner den Energie- und Drehimpulserhaltungssatz berücksichtigen. Mit dem Drehimpuls

$$L = \mu r v \tag{8.11}$$

geht (8.10) über in

$$E = \frac{L^2}{2\mu r^2} - g^2 \frac{\mathrm{e}^{-r/\lambda\!\!\!^-}}{r} \ . \tag{8.12}$$

Der Drehimpuls ist quantisiert und seine möglichen Werte sind $L_n = n\hbar$ mit $n = 1, 2, \ldots$. Damit und mit der Quantisierungsvorschrift $r_n = x_n \lambda\!\!\!^-$ erhalten wir die Energieeigenwerte

$$E_n = \frac{n^2 \hbar^2}{2\mu \lambda\!\!\!^{-2} x_n^2} - g^2 \frac{\mathrm{e}^{-r_n/\lambda\!\!\!^-}}{x_n \lambda\!\!\!^-} \ . \tag{8.13}$$

Zur Bestimmung von g^2 betrachten wir die Zentripetalkraft, die durch

$$\frac{m v^2 \boldsymbol{r}}{r^2} = -\frac{\partial V_0}{\partial r} \frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{8.14}$$

gegeben ist. Dies führt auf die Beziehung

$$L^2 = (\mu v r)^2 = \mu g^2 r^2 \left(\frac{1}{\lambda\!\!\!^-} + \frac{1}{r} \right) \mathrm{e}^{-r/\lambda\!\!\!^-} \ . \tag{8.15}$$

Mit den oben angegebenen Quantisierungsvorschriften folgt

$$g^2 = \frac{\hbar^2 n^2}{\mu \lambda\!\!\!^{-2} x_n^2} \left(\frac{1}{\lambda\!\!\!^-} + \frac{1}{\lambda\!\!\!^- x_n} \right)^{-1} \mathrm{e}^{x_n} \tag{8.16}$$

und aus der Eigenwertgleichung (8.13)

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2\mu\lambda\!\!\!^-{}^2} \frac{1}{x_n^2} \frac{(x_n - 1)}{(x_n + 1)} \; . \tag{8.17}$$

Um diese Gleichung zu lösen, gehen wir von der experimentellen Tatsache aus, daß die Bindungsenergie des Deuterons $E_\mathrm{B} = 2.225$ MeV beträgt. Diese Energie nehmen wir als Energie des Zustandes für $n = 1$, also $E_{n=1} = -E_\mathrm{B}$. Mit der Abkürzung $\alpha = \hbar^2/(2\mu\lambda\!\!\!^-{}^2 E_\mathrm{B}) = 9.2$ folgt der Zustand $x_{n=1} = x_1$ aus der Gleichung 3. Grades

$$x_1^3 + x_1^2 + \alpha x_1 = \alpha \tag{8.18}$$

zu $x_1 = 0.85$. Setzt man diesen Wert in (8.16) ein, so erhält man für $n = 1$:

$$g^2 = 86 \text{ MeV fm} \; . \tag{8.19}$$

Da g^2 in Bruchteilen von $\hbar c$ angegeben wird, ist $g^2 = 0.4\hbar c$. Dieser Wert ist mit demjenigen zu vergleichen, der gegenwärtig von einer umfangreichen Theorie vorgestellt wird: $g^2 = 0.3\hbar c$. Unsere sehr einfache Argumentation kommt diesem „genaueren“ Wert erstaunlich nahe.

8.4 Vom Quark zum Kern

Im Jahre 1964 postulierte Murray Gell-Mann aufgrund von Argumenten zur Symmetrie der SU(3)-Gruppe eine Struktur der Nukleonen, die aus drei Partonen – diesen Namen hat Richard Feynman geprägt – bestehen. Basierend auf literarischen Vorbildern wurden die Partonen von Gell-Mann als „Quarks“ bezeichnet.[1] Die Quarks tragen eine elektrische Ladung, und zwar Vielfache eines Drittels der Elementarladung. Im freien Raum ist diese Ladung bisher nicht aufgetreten. Die Erforschung der Elementarteilchen hat bisher drei Familien von Quarks mit jeweils zwei Mitgliedern erbracht, deren Eigenschaften in Tabelle 8.1 zusammengestellt sind.

Die Nukleonen sollen nach diesem „Standardmodell“ aus drei Quarks, die Mesonen aus einem Quark-Antiquark-Paar zusammengesetzt sein.

In einem ersten, zunächst noch primitiven Modell waren die Quarks als Teilchen einer Substruktur ebenfalls Fermionen mit dem Spin $\frac{1}{2}\hbar$. Demzufolge ist das Pauli-Prinzip zu beachten, denn es können nur zwei Teilchen

[1] Nach James Joyce in „Finnegans Wake“: Three quarks for master Mark.

Tabelle 8.1. Quarks

Bezeichnung		Ladung (e)	Masse (MeV/c^2)
u	(up)	+2/3	5 ± 2
d	(down)	−1/3	9 ± 3
s	(strange)	−1/3	175 ± 50
c	(charm)	+2/3	1500
b	(bottom)	−1/3	4500
t	(top)	+2/3	174000

mit entgegengesetztem Spin einen Zustand mit sonst gleichen Quantenzahlen besetzen. Da dies für die Bildung eines Nukleons nicht möglich ist, mußte den Quarks und dann auch den Austauschquanten der starken Wechselwirkung, die *Gluonen* genannt werden, ein weiteres Unterscheidungsmerkmal – als zusätzliche Quantenzahl – hinzugefügt werden. Dieses Unterscheidungsmerkmal wird *Farbe*, besser *Farbladung*, genannt. Die Quarks befinden sich in Farbladungszuständen. Der Ausdruck „Farbe“ bezeichnet nur eine Eigenschaft, deren genaue Natur noch unbekannt ist. So kommen alle Quarks in drei verschiedenen Farbladungszuständen vor, die entsprechend dem Namen „Farbe“ als rot, blau und grün bezeichnet werden. Die Farbladungen sind bisher frei, d.h. in Reaktionsprodukten der Kern- oder Elementarteilchenexperimente, nicht beobachtet worden. Deshalb wird angenommen, daß die Summe von rot, blau und grün bei freien Teilchen das neutrale „weiß“ ergibt.[2] Außer den in Tabelle 8.1 genannten Quarks gibt es dann in der Natur auch die dazugehörigen Antiquarks mit den gleichen Massen, aber entgegengesetzter elektrischer Ladung und entgegengesetzter Farbladung. So hat ein Anti-u-Quark die Ladung $-\frac{2}{3}e$ und existiert in den Farbladungszuständen antirot, antiblau und antigrün.

Zwischen den Quarks agieren als Feldquanten die Gluonen, die ebenso wie das Photon die Masse Null und den Spin $1\hbar$ haben sollen. Auch sie tragen Farbladungen. Wesentlich folgt daraus die Eigenschaft, daß Gluonen untereinander wechselwirken können.

In einer sehr einfachen Weise läßt sich dann ein Modell vorstellen, das z.B. für den Zustand „Proton“ gilt $\langle \mathrm{uud} \rangle$. Die Summe der Ladungen ergibt $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 1$, wir müssen aber nach der Farbregel jedem Quark eine andere der drei genannten Farben zuordnen. Entsprechendes gilt für das Neutron $\langle \mathrm{udd} \rangle$, dessen Ladungssumme Null ergibt.

Um die Modellvorstellung experimentell zu verifizieren, wurde in Streuexperimenten mit hochenergetischen Leptonen (Elektronen und Myonen) die Struktur der Nukleonen untersucht. Damit wiederholt sich der gleiche Gedankengang, mit dem Rutherford die Struktur des Atoms und Hofstadter die

[2] In der Optik existiert ein Analogon. Wenn man die Farben rot, blau, grün addiert, z.B. durch Überlagerung entsprechender Farbfilter, kann man dieses Ergebnis experimentell nachvollziehen.

Struktur der Kerne aufklären konnte. Man benötigt eine Sonde, deren Wellenlänge kleiner ist als die Dimensionen der Struktur, die aufgeklärt werden soll. Dies bedeutet nach (2.14), daß Elektronen mit GeV-Energien benötigt werden, um die Strukturen zu erforschen. Auch diese Streuexperimente werden tiefinelastisch genannt, weil im Stoß ein großer Impuls auf die Konstituenten übertragen wird.

Außer der Eigenschaft, Ladung zu tragen, besitzen die Nukleonen den Spin $\frac{1}{2}\hbar$. Es ist demzufolge wichtig, in den skizzierten Experimenten auch den Spin der Nukleonen zu bestimmen. Die bisherigen Experimente haben gezeigt, daß das einfache Bild, den Spin z.B. des Protons aus der entsprechenden Kopplung der Spins der Quarks $\langle\uparrow\rangle = \langle\uparrow\downarrow\uparrow\rangle$ abzuleiten, nicht verifiziert werden kann. Gegenwärtig werden zur Klärung dieser Frage die in Abschn. 8.5 erörterten Experimente durchgeführt. Die stark dynamisch wechselnden Quarkgruppen haben wesentlich größere Massen, als die in Tabelle 8.1 angegebenen „nackten Quarks“ (vgl. Kasten 8.2), die deshalb „Valenz-Quarks“ genannt werden, in Analogie zu den Valenzelektronen im Periodensystem oder den Valenznukleonen im Nuklidsystem. Diese Annahme wird gestützt durch Überlegungen zum magnetischen Moment z.B. des Protons. Wie bereits in (3.52) angegeben, ist das magnetische Moment eines Teilchens ohne innere Struktur mit dem Spin $\frac{1}{2}\hbar$ und der Masse m gegeben durch

$$\mu_{\text{Dirac}} = \frac{e\hbar}{2m} \quad . \tag{8.20}$$

Kasten 8.2: Massen der Nukleonen

Die fundamentale Lagrange-Funktion der Quantenchromodynamik (QCD) beschreibt die Wechselwirkung der Quarks. Die dabei auftretenden Felder, die mit den u- und d-Quarks gekoppelt sind, verlangen für diese beiden Quarks Massen m_q von ca. 5 MeV/c^2. Diese als Stromquarks bezeichneten Größen sind jedoch nicht diejenigen, die gemeint sind, wenn der Aufbau eines Nukleons aus drei Quarks beschrieben wird. Die drei ein Nukleon bildenden Quarks sind ständig eingefangen durch starke Farbfelder. Ihre Massen lassen sich nicht mit den oben genannten Massen der Lagrange-Funktion gleichsetzen. Man muß zur Beschreibung der Nukleonen effektive Massen einsetzen, die den Einschluß der Quarks berücksichtigen. Deshalb nennt man diese Quarks die „Konstituenten-Quarks“. Ihre Masse läßt sich mit Hilfe der Heisenbergschen Unschärfe-Relation abschätzen:

$$\delta p_x \delta x \sim \hbar \; . \tag{8.21}$$

Nehmen wir als räumlichen Einschlußbereich den Protonenradius mit ~ 1 fm an, dann ist

$$\delta p_x \sim \hbar/\delta x \sim 200 \text{ MeV}/c \,. \tag{8.22}$$

Betrachten wir das Nukleon in drei Dimensionen dann gilt näherungsweise

$$\begin{aligned}\delta p &\approx \sqrt{(\delta p_x)^2 + (\delta p_y)^2 + (\delta p_z)^2} \\ &\approx \sqrt{3}\delta p_x \approx 340 \text{ MeV}/c \,.\end{aligned} \tag{8.23}$$

Mit $m_q \sim 5 \text{ MeV}/c^2 \ll \delta p/c \sim 340 \text{ MeV}/c^2$ erhalten wir $\delta E \sim \sqrt{c^2(\delta p)^2 + m_q^2 c^4} \sim \delta p$. Dies ist dann die Energie, der die Konstituenten-Quarkmasse entspricht.

Demnach hat das Nukleon die Masse $3m_q \sim 3 \cdot 340 \text{ MeV}/c^2$, ein Wert, der größer als die Protonen-Ruhemasse ist. Hier können wir nun die übliche Vorstellung über die Bindungsenergie anwenden, nach der die Masse eines zusammengesetzten Systems kleiner ist als die Summe der Massen seiner Konstituenten. Im Gegensatz zur Atom- und Kernphysik (vgl. Kap. 3) lassen sich hier die Quarks nicht durch „Ionisation" separieren.

Für Elektronen und Myonen ist dieser Wert bestätigt worden, eine Tatsache, die mit der Annahme, daß beide Teilchen keine innere Struktur besitzen, übereinstimmt.

Für Protonen sollte sich als Wert das Kernmagneton μ_K ergeben. Wie ebenfalls in Abschn. 3.3.1 gezeigt, hat das magnetische Moment des Protons den Wert $\mu_\mathrm{p} = 2.79\mu_\mathrm{K}$. Wenn wir annehmen, daß der Grundzustand des Protons $\langle\mathrm{uud}\rangle$ ein Zustand mit dem Gesamtbahndrehimpuls $\ell = 0$ ist, kann man das magnetische Moment des Protons als Vektorsumme der magnetischen Momente der Quarks ansetzen:

$$\mu(\mathrm{p}) = \mu_\mathrm{u} + \mu_\mathrm{u} + \mu_\mathrm{d} \,. \tag{8.24}$$

Mit den Spinanteilen der geeignet normierten Gesamtwellenfunktion erhält man dann

$$\mu(\mathrm{p}) = \frac{4}{3}\mu_\mathrm{u} - \frac{1}{3}\mu_\mathrm{d} \,. \tag{8.25}$$

Die magnetischen Momente der Quarks sind analog zur obigen Definition

$$\mu_\mathrm{u,d} = \frac{Z_\mathrm{u,d}e\hbar}{2m_\mathrm{u,d}} \quad . \tag{8.26}$$

Zur Bestimmung der magnetischen Momente der Quarks müssen demnach ihre Massen bekannt sein. Wir wollen hier jedoch zunächst durch Vergleich mit dem gemessenen magnetischen Moment des Protons die Quarkmassen bestimmen, indem wir zunächst einmal $m_\mathrm{u} = m_\mathrm{d}$ setzen. Dann ist $\mu(\mathrm{p}) = \frac{3}{2}\mu_\mathrm{u}$, daraus erhalten wir

$$m_\mathrm{u} = m_\mathrm{p}/2.79 = 336\ \mathrm{MeV}/c^2 \quad . \tag{8.27}$$

Dieser Wert ist wesentlich größer als der Wert der Valenz-Quarks. Er stellt den Wert der Masse der Konstituentenquarks. Dieser Wert stimmt erstaunlich gut mit dem in Kasten 8.1 angegebenen auf unterschiedliche Überlegungen zurückgehenden Massenwert überein.

Im Standardmodell der Partonen sind die Mesonen, die wir als Vermittler der Kernkraft kennengelernt haben, definiert als eine Zusammensetzung jeweils eines Quark-Antiquark-Paares, wobei die Ladungs- und die Spinkombinationen die an den freien Mesonen beobachteten Größen haben. In Abschn. 7.4 haben wir als Beispiel für die schwache Wechselwirkung den Neutronenzerfall kennengelernt. Wenn wir das Quark-Modell heranziehen, bedeutet der Übergang eines Neutrons in ein Proton die Änderung des Zustandes $\langle\mathrm{uud}\rangle \longrightarrow \langle\mathrm{udd}\rangle$, ein d-Quark geht in ein u-Quark über. Dies geschieht durch Aussendung eines W^--Bosons, das dann in das Leptonenpaar zerfällt. In der Yukawa-Vorstellung wird die sehr kurze Reichweite durch eine große Masse des Bosons bedingt. Der gemessene Wert der Masse des W-Bosons ist

$$m_\mathrm{W}c^2 = (80.419 \pm 0.056)\ \mathrm{GeV}\ . \tag{8.28}$$

Ziel der Forschung ist es, wie in Kapitel 1 angedeutet, aus dem Partonenmodell ein Modell zu entwickeln, das alle Eigenschaften der Kerne, die bisher als Daten zusammengetragen worden sind, zu beschreiben erlaubt.

Auch die starke Abstoßung bei kleinen Abständen, d.h. der hard core, läßt sich mit dem Quark-Modell der Kernkräfte erklären. Diese Abstoßung beruht auf der starken Spin-Spin-Wechselwirkung der Quarks [FA88]. Wenn zwei Nukleonen sich bei Annäherung teilweise überlappen, kann für den Abstand der Schwerpunkte, d.h. für $r = 0$, die in Bild 8.4 gezeigte Wellenfunktion auftreten. Die besetzten Zustände sind in einem Oszillatorpotential dargestellt. Zur Gesamtwellenfunktion trägt ein Zustand bei, bei dem sich alle sechs Quarks

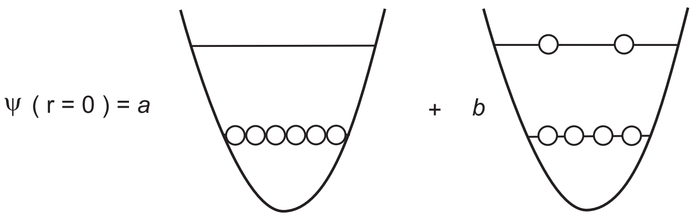


Bild 8.4. Quark-Zustand bei überlappenden Nukleonen. Gezeigt ist die Besetzung zweier Zustände im Oszillatorpotential [FA88].

im Zustand $\ell = 0$ befinden. In diesem Zustand muß die potentielle Energie zunehmen, weil die Zahl der Quark-Paare mit parallel ausgerichtetem Spin größer ist als bei getrennten Nukleonen. Die Gesamtwellenfunktion des Nukleon-Nukleon-Systems hat demnach zwei Komponenten, die mit den Amplituden a und b addiert werden. In einem energetisch günstigeren Zustand hat das Nukleon-Nukleon-System zwei Quarks in einem Zustand $\ell = 1$.

8.5 Der Nukleonenspin

Streuexperimente mit hochenergetischen Projektilen z.B.Protonen oder Pionen haben gezeigt, daß die Nukleonen, Protonen und Neutronen, in energiereiche Zustände angeregt werden können. Die Niveauschemata für Isospin-Zustände $I = 1/2$ (N-Zustände) und für Isospin-Zustände $I = 3/2$ (Δ-Zustände) sind mit ihrer Spin- und Paritätszuordnung in Bild 8.5 gezeigt. Die Energieskala ist in Einheiten von GeV angegeben [GR00]. Diese Zustände treten in den Wirkungsquerschnitten als Resonanzen auf.

Die bekannteste Δ-Resonanz des Protons ist die $P_{3/2,3/2}$-Resonanz. Die Indices geben den Spin und den Isospin dieses Zustandes an. Wenn der Spin

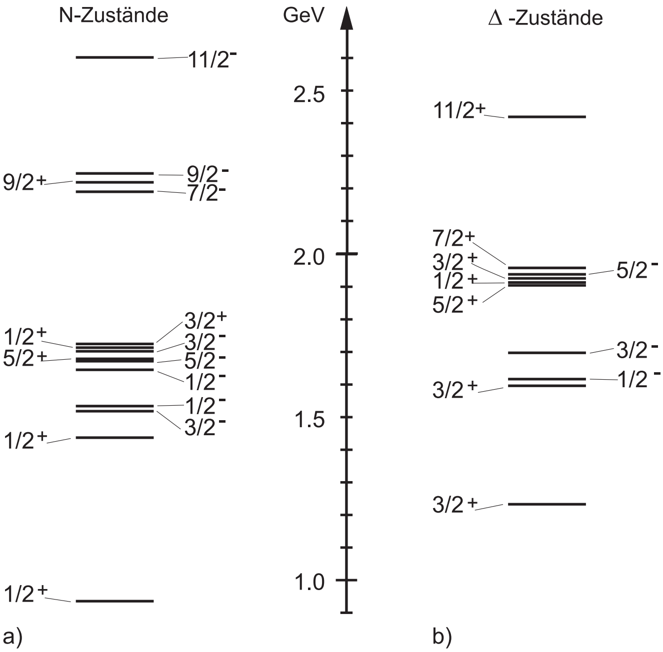


Bild 8.5. Spin- und Paritätszuordnung **(a)** für N-Zustände ($I = 1/2$) und **(b)** für Δ-Zustände ($I = 3/2$) [GR00]. Es sind nur die Zustände eingezeichnet, deren Exisitenz aufgrund experimenteller Daten derzeit gesichert ist.

3/2 auftritt, müssen die Spins aller Quarks gleichgerichtet sein. Diese Resonanz tritt in der Anregungsfunktion der Streuung von Pionen an Nukleonen bei 1232 MeV auf. Dies ist ein Zustand, der ebenso wie das Proton, zu einem einfach positiv geladenen Teilchen gehört. Man nennt diese Resonanz auch Δ^+-Resonanz, die ebenso wie das Proton aus zwei u- und einem d-Quark besteht. Sie läßt sich als ein Zustand ansehen, der zu einem Quartett von Zuständen gehört, die alle aus Quarks der ersten Familie (u und d) aufgebaut sind. Die möglichen Quarkkonfigurationen (ddd,udd,uud,uuu) bilden das Quartett der Zustände Δ^-, Δ^0, Δ^+ und Δ^{++}, die alle den Spin 3/2 haben. Damit wird evident, daß die Nukleonen eine Unterstruktur besitzen müssen und nicht, wie von Rutherford angenommen, Elementarteilchen sind. Im sehr einfachen Standardmodell wird der Spin der Nukleonen als die Parallelausrichtung zweier intrinsischer Quarkspins mit einem weiteren antiparallelen intrinsischen Spin des dritten Quark angesehen. Demgegenüber sind die intrinsischen Spins der drei Quarks bei den Zuständen des Quartetts alle parallel ausgerichtet.

Um die Spinstruktur der Nukleonen experimentell zu untersuchen, müssen Strahlen polarisierter Teilchen auf Targets geschossen werden, in denen die Kerne ebenfalls polarisiert sind. Derartige Streuexperimente wurden bei sehr hohen Projektilenergien ausgeführt und zwar mit polarisierten Elektronen am Stanford Linear Collider (SLAC) bei 10 bis 20 GeV, mit polarisierten Myonen am CERN in Genf bei 100 bis 200 GeV und schließlich an der Elektronen-Positronen- Speicherringanlage HERA des Deutschen Elektronen Synchrotrons (DESY) in Hamburg im Experiment HERMES (HERA Measurement

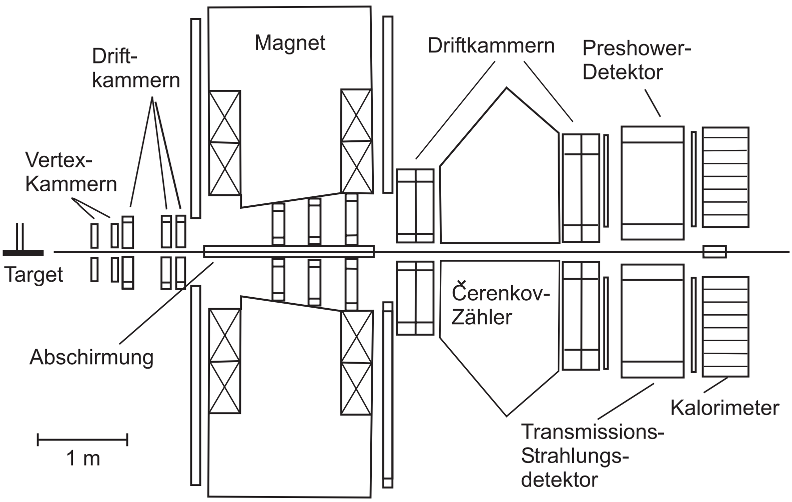


Bild 8.6. Schematischer Aufbau des HERMES-Experiments

of Nuclean Spin) bei 27.5 GeV. Das Schema des Experiments ist in Bild 8.6 gezeigt.

Im HERMES-Experiment werden nicht nur die gestreuten Elektronen, sondern auch die in den Stoßprozessen erzeugten Hadronen nachgewisen und vor allem identifiziert. Dadurch können die Beiträge der verschiedenen Quarksorten zum Spin des Nukleons getrennt gemessen werden. Außerdem konnte die Polarisation der u- und d-Quarks bestimmt werden. Außer den erwarteten Quark-Bestandteilen wurde jedoch auch ein Beitrag von Antiquarks gefunden. Schließlich sind die Quarks im Nukleon durch Gluonen verbunden, die den Spin $1\hbar$ tragen. Daraus ergibt sich, daß der Nukleonenspin aus mehreren Anteilen besteht. In vereinfachter Weise (leading order) wird er repräsentiert durch

$$s_N = \frac{1}{2} = \Delta q + L_q + \Delta G + L_G \tag{8.29}$$

Darin wird mit Δq die Summe der intrinsischen Spins der drei Quarks, mit ΔG der Beitrag der Gluonen und mit L_q bzw. L_G jeweils die Bahndrehimpulse der Quarks und Gluonen bezeichnet. Nach den bisherigen experimentellen Ergebnissen zeichnet sich eine Vorstellung ab, wie in Bild 8.7 wiedergegeben.

Es handelt sich um vorläufige Ergebnisse, wobei der Formfaktor für den Spinanteil (Formfaktor, vergl. Abschn. 2.3) als Funktion der Bjorken-Variablen $x = Q^2/2M(E' - E)$ aufgetragen ist. In diesem Ausdruck ist Q^2 das Quadrat des Impulsübertrags, M die Masse des Targetkerns sowie E und E' jeweils die Energien des einfallenden und des gestreuten Leptons. Im Ergebnis zeigt sich, daß es zu den bisher genannten Bestandteilen noch Beiträge von Quark-Antiquark-Paaren gibt, die kurzzeitig entstehen und dann

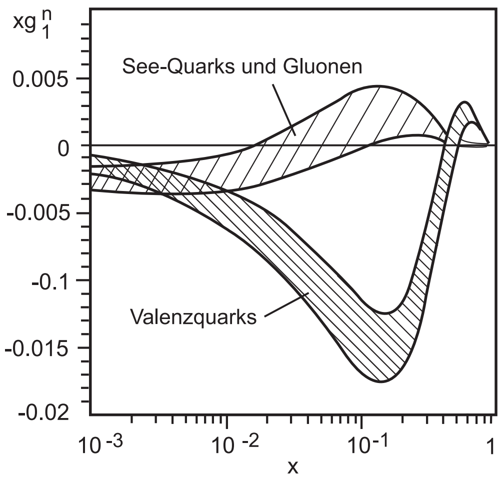


Bild 8.7. Formfaktor des Spinanteils des Nukleons als Funktion der Bjorken-Variablen x

wieder annihilieren. Diese Quark-Paare werden „See“-Quarks genannt. Unter diesen „See“-Quarks können auch Quark-Paare aus den anderen Quarkfamilien (vgl.Tabelle 8.1) auftreten. Die drei Quark-Bestandteile dagegen werden Valenz-Quarks genannt [HU99]. Die einzelnen in (8.29) genannten Beiträge lassen sich nicht separat angeben, weil sich z.B. der Bahndrehimpuls im theoretischen Bild nicht festlegen läßt. Sein Beitrag muß jedoch groß sein. Der Wert für Δq liegt zwischen 25 und 38%. In Bild 8.8 wird eine anschauliche Darstellung der komplexen intrinsischen Struktur des Nukleons wiedergegeben, die eine Vorstellung der Spinstruktur vermittelt [RI99].

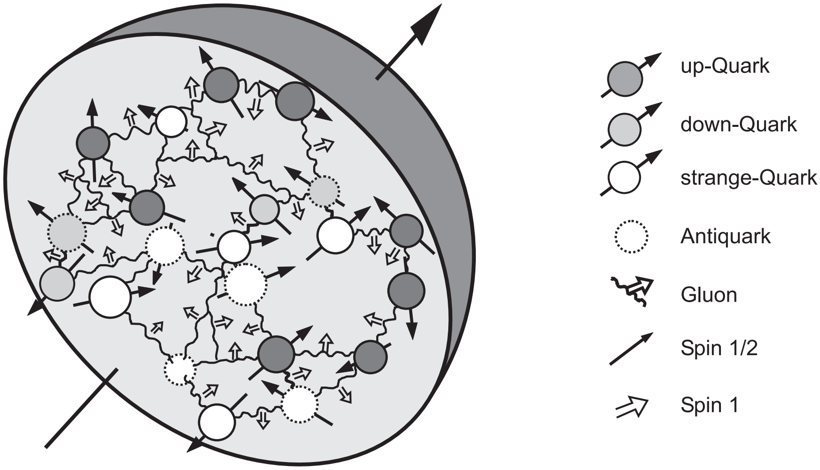


Bild 8.8. Darstellung der intrinsischen Nukleonenstruktur

8.6 Übungen

8.1 Zur Berechnung der Neutron-Proton-Streuung wird für den Triplett-Zustand ein Rechteckpotential mit der Tiefe $V_{0,\mathrm{T}} = 38.5$ MeV und der Breite $b_\mathrm{T} = R_{0,\mathrm{T}} = 1.93$ fm angenommen. Der Singulett-Zustand (ungebunden) hat den Spin 0 und läßt sich mit einem Potential der Tiefe $V_{0,\mathrm{S}} = 14.3$ MeV und $b_\mathrm{S} = R_{0,\mathrm{S}} = 2.50$ fm beschreiben. Welchen Wert müßte $V_{0,\mathrm{S}}$ haben, wenn der Zustand gebunden sein soll?

8.2 Zeigen Sie, daß der Erwartungswert des elektrischen Quadrupolmoments für ein Neutron-Proton-System im $^3\mathrm{S}_1$-Zustand Null ist.

8.3 Berechnen Sie das magnetische Dipolmoment für das Deuteron im $^3\mathrm{S}_1$-Zustand.

8.4 Zeigen Sie, daß das experimentell bestimmte magnetische Dipolmoment $\mu = (0.8574373 \pm 0.0000004)\mu_{\mathrm{K}}$ mit dem berechneten magnetischem Dipolmoment für eine Wellenfunktion mit einer Mischung aus 96 % $^3\mathrm{S}_1$- und 4 % $^3\mathrm{D}_1$-Anteilen konsistent ist.

8.5 Proton und Neutron seien im Deuteron in einem $^1\mathrm{P}_1$- oder $^3\mathrm{P}_1$-Zustand gebunden. Berechnen Sie das magnetische Dipolmoment für diese Zustände.

8.6 Zeigen Sie, daß der Radius R des Deuterons für den gebundenen Grundzustand im Potential $V(r) = \{-V_0$ für $r \leq R_0$ und 0 für $r > R_0\}$ mit der Bindungsenergie E_{B} quantenmechanisch durch $R \cong (2R_0/\pi)(V_0/E_{\mathrm{B}})^{1/2}$ abgeschätzt werden kann.

8.7 Wie groß ist die Höhe des elektrostatischen Potentialwalls in MeV, wenn sich zwei Deuteronen bis auf einen Abstand von 10^{-14} m nähern müssen, damit die Kernkraft die abstoßende Kraft überwinden kann?

8.8 Auf welche Temperatur muß Deuterium aufgeheizt werden, damit die mittlere kinetische Energie je Deuteron 0.14 MeV beträgt?