Vorwort zur 21. Auflage

Einen Klassiker übernehmen, der älter ist als der neue Herausgeber selbst! Und die Kapiteleinteilung ist noch dieselbe wie in der 12. Auflage aus der Zeit meines eigenen Grundstudiums in Physik …

Das ist ein Wagnis, aber auch eine Herausforderung, der Physik tatsächlich in ihrer ganzen Breite zu Leibe zu rücken. Es soll auch in Zukunft so sein, daß Generationen von Studierenden den Gerthsen als wichtigste Quelle zur Prüfungsvorbereitung im Fach Physik und später als allgemeines Nachschlagewerk schätzen lernen.

Ein Werk wie der Gerthsen kann nicht statisch verstanden werden, es muß sich kontinuierlich entwickeln, und genau so haben es auch frühere Autoren gehalten; es sind immer wieder neue Kapitel und Unterkapitel hinzugekommen, dieses Mal ein längerer Abschnitt zur Laserphysik. Dennoch soll die Einteilung in den nächsten Auflagen eine Grundüberholung erfahren, um die Systematik der Physik sichtbar werden zu lassen. Zum Beispiel sollte die nichtlineare Dynamik gleich an das Kapitel über Schwingungen anschließen. Die Zukunft wird auch zeigen, welche Rolle elektronische Informationen und neue Medien im Zusammenhang mit Lehrbüchern spielen werden, der neue Gerthsen soll mit diesen Konzepten vorsichtig experimentieren.

Ich wünsche dem Leser intensives Lesen und Arbeiten mit dem Buch und richte meinen herzlichen Dank an das lebendige Gerthsen-Team des Springer-Verlags, an Dr. *Hans J. Kölsch*, Frau *Petra Treiber*, die Herren *Claus-Dieter Bachem* und *Ingmar Köser*.

Bonn, Juni 2001 *Dieter Meschede*

Vorwort zur 18. bis 20. Auflage

Ein halbes Jahrhundert ist dieses Buch nun alt. „Was man liebt, darf man auch kritisieren, sogar zu verbessern suchen“, schrieb ich vor 25 Jahren, als ich die Bearbeitung übernahm. Seitdem ist nicht viel vom Text, wohl aber von der Intention von Christian Gerthsen erhalten geblieben: Dem Studienanfänger eine möglichst klare und umfassende Einführung zu vermitteln, die ihm auch im späteren Studium noch nützt, obwohl er im Spezialgebiet seiner Diplom- oder Doktorarbeit viel genauer Bescheid wissen muß.

Damals, kurz nach dem Krieg, ahnte man noch nichts von Quarks oder Quasars, man hörte Wunderdinge von Maschinen, die ganze Zimmer füllten und denen heute jeder Taschenrechner haushoch überlegen ist. Die zahllosen technischen Anwendungen, die unser Leben in nie gekanntem Tempo verändern, können in einem solchen Buch nur angedeutet werden, ebenso wie die Zweige der Physik, Bio-, Astro-, Geophysik, in denen Hochinteressantes passiert ist. Hiermit beschäftigen sich hauptsächlich viele Aufgaben. Als neue Gebiete konnten Festkörperphysik und nichtlineare Dynamik aufgenommen werden. Alles andere, besonders Relativitäts-, Quanten-, statistische Physik ist so systematisch dargestellt, wie es mit dem knappen, einführenden Charakter zu vereinbaren ist. Neben unseren Drang, die Welt zu verstehen, rückt immer mehr unser Bemühen, sie zu erhalten. Auch dem trägt dieses Buch nur stellenweise Rechnung. Klar ist aber, daß man die Welt verstehen muß, um sie zu erhalten.

Wird es immer schwieriger, Physik zu studieren, da immer mehr Neues dazukommt? Wohl kaum, denn auch didaktisch haben wir viel dazugelernt. Da fällt mir immer Isaac Newton ein, der 19 Jahre zögerte, sein Gravitationsgesetz, ein Kernstück seiner Principia, zu veröffentlichen, weil er zunächst nicht nachweisen konnte, daß eine Kugel genauso anzieht, als sei ihre Masse im Zentrum konzentriert. Schließlich hatte er die Mathematik dazu ja auch gerade erst erfinden müssen. Jeder bessere Student kann diesen Nachweis heute in ebenso vielen Sekunden führen, mit anderen Mitteln, nämlich der Feldvorstellung, die sich zudem noch auf ein Dutzend anderer Gebiete übertragen läßt. Solche hilfreichen Analogien zu finden und zu nutzen, soll dieses Buch auch anregen.

Der Klarheit und Anschaulichkeit haben Verlag und Autor diesmal besonders viel Mühe gewidmet. Herr *J. Schreiber* hat die von mir computergenerierten Abbildungen ebenso wie die bisherigen mit viel Geschick graphisch gestaltet. Durchgehende Neugestaltung und vollständiger Neusatz brachten viele technische Probleme. Daß schließlich alles in menschlich-erfreulicher Art geklappt hat, danke ich Herrn Dr. *H. J. Kölsch*, Frau *P. Treiber*, Herrn *C.-D. Bachem*, der nun schon vier Auflagen betreut, den vielen ungenannten Mitarbeitern im Verlag und in der Druckerei und wieder meiner lieben Frau *Carla*, ohne deren unermüdliche Hilfe ich besonders diese Arbeit bestimmt nicht geschafft hätte.

Freising, im Juli 1995 *Helmut Vogel*

Vorwort zur ersten Auflage

Dieses Buch ist aus Niederschriften hervorgegangen, die ich im Studienjahr 1946/47 den Hörern meiner Vorlesungen über Experimentalphysik an der Universität Berlin ausgehändigt habe. Sie sollten den drückenden Mangel an Lehrbüchern der Physik überwinden helfen.

Diesem Ursprung verdankt das Buch seinen in mancher Hinsicht vom Üblichen abweichenden Charakter. Es erhebt nicht den Anspruch, ein Lehrbuch zu sein, dessen Studium eine Vorlesung zu ersetzen vermag. Es soll nicht statt, sondern neben einer Vorlesung verwendet werden.

...

Die in dem vorliegenden Buch enthaltene Theorie ist um Anschaulichkeit bemüht und daher weniger systematisch. So habe ich z.B. die elektrischen Erscheinungen nicht einheitlich dargestellt. Die klassische Kontinuumstheorie wechselt mit der elektronentheoretischen Deutung je nach dem didaktischen Erfolg, den ich mir von der Darstellung verspreche.

Auch der Umfang, in dem ich die verschiedenen Gebiete behandelt habe, richtet sich nach den Bedürfnissen des Unterrichts. Gegenwärtig wird auf allen deutschen Hochschulen von den Studierenden der Physik die Mechanik schon vor den Kursvorlesungen der theoretischen Physik gehört, sie durfte daher besonders knapp dargestellt werden.

Die Gebiete, die in der einführenden, sich über zwei Semester erstreckenden Vorlesung wegen der knappen Zeit wohl immer etwas zu kurz kommen, sind die Optik und die Atomphysik. Sie nehmen daher in diesem Buch einen verhältnismäßig großen Platz in Anspruch.

Bei dem Bemühen, den häufig sehr gedrängten Text durch möglichst anschauliche und inhaltsreiche Abbildungen zu ergänzen, erfreute ich mich der Hilfe meines Mitarbeiters, Herrn Dr. *Max Pollermann*, dem ich den zeichnerischen Entwurf mancher Abbildung verdanke.

Für das Lesen der Korrektur und manche Verbesserungsvorschläge habe ich vor allem Herrn Professor Dr. *Josef Meixner*, Aachen, zu danken. Auch Herrn Dr. *Werner Stein* und Fräulein Diplomphysiker *Käthe Müller* danke ich für gute Ratschläge.

Berlin-Charlottenburg, im August 1948
Christian Gerthsen

Nutzen Sie dieses Buch individuell…

Schon seit der 18. Auflage erscheint der Gerthsen in neuem, übersichtlichen Gewand. Autor und Verlag wollen Ihnen hier einen allgemeinen Überblick über die Text- und Bildbausteine des Gerthsen geben und wünschen viel Erfolg und Freude beim Lernen und Lesen. Anregungen und Kritik, per Post (siehe nebenstehende Adresse) oder e-mail gerthsen-physik@springer.de, sind uns sehr willkommen.

Springer-Verlag,
Planung Gerthsen-Physik
Tiergartenstraße 17
69121 Heidelberg
Deutschland

Nutzen

- als Lehrbuch neben Vorlesungen
- als Übungsbuch
- zur Prüfungsvorbereitung
- zur Vertiefung einzelner Fragestellungen
- als handliches, umfassendes Nachschlagewerk

Gliederung

Der Gerthsen führt in 19 Kapiteln in alle wesentlichen Aspekte der klassischen und modernen Physik ein:

Inhaltsverzeichnis

Jedes Kapitel gibt eine Inhaltsübersicht und wird mit einer kurzen Einleitung eröffnet; zum Kapitelanfang gehört auch ein Bild mit Zitat eines berühmten Forschers, meist des Begründers dieses Gebietes.

Inhalt

Einleitung

Im täglichen Leben hat man es mit Systemen aus ungeheuer vielen Teilchen zu tun, die alle aufeinander Kräfte ausüben. Dazu kommen noch von außen wirkende Kräfte. Daß man so etwas überhaupt behandeln kann, ist vielen vereinfachenden

„Welcher der Wasserausflüsse hat die größte Kraft, ein Rad zu drehen? Mir scheint, ihre Kraft muß gleich sein: Der Strom 1, obwohl er aus großer Höhe fällt, hat nichts hinter sich, was ihn treibt, wogegen 2 die ganze Höhe des Wassers über sich hat, das ihn fortdrängt.“ (vgl. Abb. 3.57)

Leonardo da Vinci, Codex Madrid I, 134

Otto v. Guericke (1602–1686), Jurist, Stadtrat und ab 1648 Bürgermeister von Magdeburg, demonstrierte 1654 auf dem Regensburger ...

Am Schluß eines jeden Kapitels reflektiert ein kurzer Ausblick den Gegenstand des Kapitels und weist auf weiterführende Entwicklungen hin. Zum Ausblick gehört auch ein Bild eines historischen oder modernen Experiments.

▲ Ausblick

Wir haben makroskopische Körper, also Systeme aus ungeheuer vielen Teilchen einigermaßen behandeln können, indem wir sie als deformierbare Kontinua betrachteten, deren Eigenschaften durch eine Reihe von Materialkonstanten beschrieben werden: Dichte, Oberflächenspannung, Viskosität, Elastizitätsmodul usw. Warum diese Konstanten genau diese Werte haben, möchte man gern aus dem molekularen Aufbau verstehen. Für die Oberflächenspannung haben ...

Hervorhebungen

Der Gerthsen arbeitet mit weiteren Hervorhebungen, um das Lesen, Erinnern und Wiederfinden, aber auch das einfache Nachschlagen zu erleichtern:

- **Wichtige Definitionen**

Greift an einem Flächenstück A senkrecht zu ihm die flächenhaft verteilte Kraft F an, dann heißt das Verhältnis der Kraft zur Fläche **Druck**

$$p = \frac{F}{A}. \tag{3.2}$$

...

- **Grundlegende Formeln**

$$\boxed{\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2} = 0} \tag{3.14}$$

- **Weitere wichtige Formeln**

$$\boxed{\Delta p = \frac{2\sigma}{r}} \tag{3.13a}$$

- **Wichtige Begriffe, die sich auch im Sachverzeichnis wiederfinden und das Nachschlagen erleichtern helfen**
- **Sprachliche Betonungen, um Sachverhalte deutlicher auszudrücken**

... wenn die ... gewisse Grenzen überschr..., beginnt **plastisches Fließen**, das schließlich zum Bruch führt. **Flüssigkeiten** haben ein bestimmtes Volumen, aber keine bestimmte Form. Dementsprechend erfordert nur die Volumenänderung Kräfte. Es herrscht in weiten Grenzen **Volumenelastizität**: Bei Entlastung nach einer Kompression stellt sich wieder das Anfangsvolumen ein. Eine reine *Form*änderung, z.B. eine Scherung, erfordert nur dann Kräfte, wenn sie schnell ausgeführt werden soll ...

- **Namen wichtiger Forscher**

... würde der Druck immer ... abnehmen, während die Dichte konstant bliebe. Bei konstanter Temperatur muß aber nach *Boyle-Mariotte* die Dichte proportional zum Druck mit der Höhe abnehmen. Wir können also (3.6) nur auf eine dünne Schicht der Dicke dh anwenden (Abb. 3.16): ...

Tabelle 3.2. Viskosität einiger Stoffe

	η N s m^{-2}	Temperatur °C
Wasser	0,00182	0
	0,001025	20
	0,000288	100
Ethylalkohol	0,00121	20
Ethylether	0,000248	20
Glyzerin	1,528	20
Luft (1 bar)	0,0000174	0
Wasserstoff (1 bar)	0,0000086	0

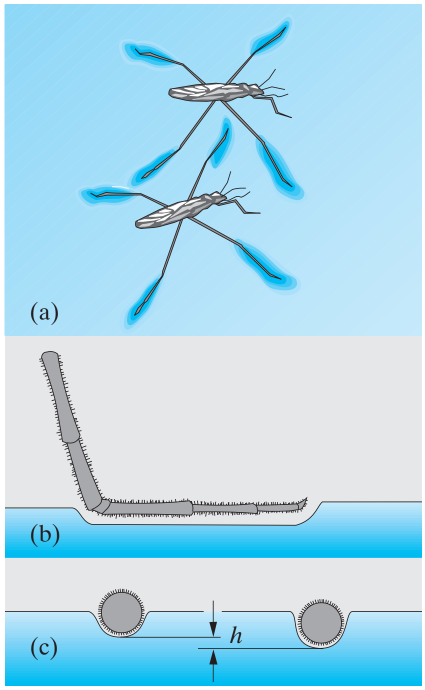


Abb. 3.20a–c. Der Wasserläufer (hier dargestellt die Art *Gerris lacustris*) wird von der Oberflächenspannung getragen

Abbildungen

Neben zahlreichen Halbtonabbildungen befinden sich am Schluß des Buches Farbtafeln zu ausgesuchten Themen. Alle anderen Abbildungen im Text wurden zweifarbig gestaltet, um das Wichtige hervorzuheben.

Tabellen

Die Tabellen wurden übersichtlicher gestaltet und enthalten wichtige Daten zum Thema des Abschnitts.

✗ Beispiel

Vom Rand eines Glases mit sehr starkem Wein, besonders Portwein, perlen ständig Tropfen nieder. Wie kommt es dazu?

Ist der Glasrand einmal benetzt, dann verdampft aus der dünnen Flüssigkeitshaut vorzugsweise der Alkohol. Dadurch steigt die Oberflächenspannung der

Durchgerechnete Beispiele und Aufgaben

Beispiele im Text dienen zur Anregung und Kontrolle des eigenen Verständnisses.

✔ Aufgaben

● **3.1.1. Seemannsgarn?**
Ist es wahr, daß untergegangene Schiffe in einer gewissen Tiefe schweben bleiben, weil das Wasser in der Tiefe viel dichter ist?

●● **3.1.3. Schwingende Säule**
In einem U-Rohr, lichter Querschnitt A steht eine Flüssigkeitssäule, Dichte ϱ, Gesamtlänge L. Die Flüssigkeit bewegt

●●● **3.2.10. Catenoid**
Man ziehe eine Seifenhaut zwischen zwei parallelen Kreisringen. Sie nimmt „Sanduhrform" (seitlich eingebeulter Zylinder) an. Warum? Was muß man machen, um einen „ordentlichen" geraden Zylinder zu erhalten?

Am Schluß eines jeden Kapitels finden sich zahlreiche Aufgaben. Diese wurden in verschiedene Schwierigkeitsgrade eingeteilt (●, ●● und ●●●), um die Auswahl zu erleichtern und den Leser auf die zu erwartende Denk- und Rechenarbeit vorzubereiten.

= Lösungen

3.1.1. Seemannsgarn?
Die Kompressibilität des Wassers ist $5 \cdot 10^{-6}$ cm^2/N $= 5 \cdot 10^{-5}$ bar^{-1}. In 10 km Tiefe herrschen 1000 bar. Das Wasser ist dort al… 5% dic…

3.1.2. Aufstieg
Beim Aufstieg au…
dazu nötige Ener…

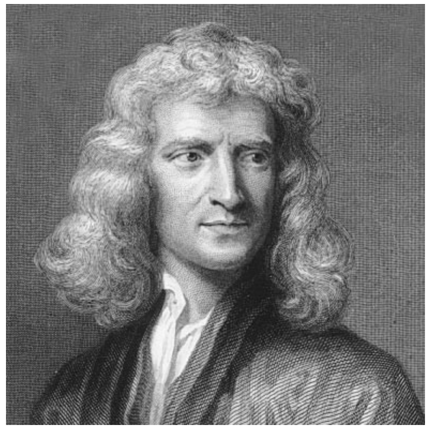
Lösungen

Zu jeder Aufgabe wird eine ausführliche Lösung bereitgestellt;
(S. 1033–1239).

Mechanik der Massenpunkte

1

Inhalt



„. . . im November (1665) hatte ich die Differentialrechnung, im Januar darauf die Farbtheorie, im Mai hatte ich Zugang zu der umgekehrten Differentialrechnung, und im selben Jahr begann ich zu denken, daß die Schwerkraft sich auch auf den Mond erstrecke, und . . . aus Keplers Gesetz . . . leitete ich ab, daß die Kräfte auf die Planeten in umgekehrtem Verhältnis zum Quadrat ihres Abstandes stehen . . . denn damals war ich in der Blüte des Alters, in dem ich Erfindungen machte . . ."

Isaac Newton, 1716

Einleitung

Der einfachste Teil der Mechanik behandelt Fälle, in denen man von der Ausdehnung der Körper absehen und sie als mit Masse behaftete Punkte, **Massenpunkte** betrachten kann.

Dieser Begriff des Massenpunktes ist nicht so unproblematisch wie er klingt. Es ist verwunderlich, daß er sich überhaupt auf die Wirklichkeit anwenden läßt. Selbst ein Atom ist z. B. eigentlich kein Massenpunkt: Es kann u. a. rotieren und Rotationsenergie aufnehmen, was ein Massen*punkt* nicht kann (oder wenn er es täte, würde es niemand merken). Wieso die Punktmechanik trotzdem für Atome so gut stimmt, hat erst die Quantenmechanik aufgeklärt (Abschn. 14.3.2). Eine weitere dem Begriff des Massenpunktes innewohnende Schwierigkeit, nämlich daß er eine unendliche Energie haben müßte, macht der Physik der Elementarteilchen noch heute zu schaffen (Abschn. 16.4.6).

Aus der Punktmechanik kann man logisch einwandfrei die Mechanik des starren Körpers (Kap. 2) und die der deformierbaren Körper (Kap. 3) entwickeln, indem man diese als Systeme unendlich vieler Massenpunkte mit festen bzw. veränderlichen relativen Lagebeziehungen auffaßt.

1.1 Messen und Maßeinheiten

Die Physik ist eine messende Wissenschaft. Parallel zum „Wie" und oft noch vor dem „Warum" fragt sie nach dem „Wieviel".

1.1.1 Messen

Eine Größe messen heißt, sie direkt oder indirekt mit einer Maßeinheit vergleichen. Der direkteste Vergleich besteht z. B. im wiederholten Anlegen eines Maßstabes. Meist ist der Vergleich indirekt, er benutzt dann eine Frage der Art: Wie heiß muß der Körper sein, damit er eine gewisse

Wirkung hervorbringt, z. B. so und so stark Licht abstrahlt (**Pyrometrie**). Indirektes Messen setzt ein Naturgesetz voraus, das die zu messende Größe (die Temperatur) und ihre direkt beobachtete Wirkung (die Lichtstrahlung) verknüpft. Dieses Naturgesetz muß durch unabhängige Beobachtungen vorher sichergestellt worden sein, die die nicht direkt beobachtete Größe (die Temperatur) durch eine andere ihrer Wirkungen (z. B. die Längenausdehnung von Körpern) erfassen. Offensichtlich läuft dieses Verfahren Gefahr, sich in den Schwanz zu beißen. Der einzige Ausweg aus dem Circulus vitiosus ist eine *Definition* der zu messenden Größe durch eine ihrer Wirkungen. So wird die **Temperatur** im täglichen Leben durch die Längenausdehnung einer Quecksilbersäule, in der Physik durch die mittlere kinetische Energie der Moleküle *definiert*. Andere als solche **operationellen Definitionen** von Größen, die implizit ein Meßverfahren enthalten, darf die Physik nicht anerkennen. Ein tieferes Durchdenken der Frage, ob eine Größe operationell definiert ist oder nicht, führt zu weitreichenden Ergebnissen, z. B. zur Relativitäts- und zur Quantentheorie.

1.1.2 Maßeinheiten

Für jede physikalische Größe muß eine **Maßeinheit** materiell festgelegt sein. Man unterscheidet natürliche und willkürliche Einheiten, aber diese Unterscheidung ist selbst nicht ganz natürlich. Wenn Henry I. von England (1120) das Yard durch seinen ausgestreckten Arm definierte, oder selbst wenn König David von Schottland (1150) das Inch als durchschnittliche Daumendicke dreier Männer „eines großen, eines kleinen und eines mittelgroßen Mannes“ festlegte, so sind das zweifellos willkürliche Definitionen. Aber auch der Erdäquator ist weder unveränderlich, noch hat er universelle Bedeutung. Eine natürliche **Längeneinheit** könnte man z. B. durch den Abstand zweier Atome in einem bestimmten Kristall festlegen, der keiner Kraft ausgesetzt ist. Willkürliche Einheiten müssen durch **Normale** festgehalten werden. Jeder Meterstab ist ein solches, wenn auch mehr oder weniger unvollkommenes, Normal. Natürliche Einheiten lassen sich im Prinzip jederzeit reproduzieren, allerdings oft durch einen ziemlich langwierigen Prozeß.

1.1.3 Maßsysteme und Dimensionen

Welche physikalischen Größen man als Grund- und welche als abgeleitete Größen betrachtet, ist lediglich eine Frage der Zweckmäßigkeit. Von den vielen **Maßsystemen**, jedes charakterisiert durch einen Satz von Grundgrößen, die die Physik und ihre Teilgebiete entwickelt haben, wird in diesem Buch nur eins benutzt:

Das **Internationale System (SI)**, das als Weiterentwicklung des mechanischen MKS- und des elektromagnetischen Giorgi-Systems die Grundgrößen *Länge, Zeit, Masse, Temperatur, elektrischer Strom, Lichtstärke* und *Substanzmenge* mit den **Einheiten** Meter (m), Sekunde (s), Kilogramm (kg), Kelvin (K), Ampere (A), Candela (cd), und Mol (mol) benutzt und in der Technik Gesetzeskraft hat.

Das **CGS-System**, das die Ladung durch die mechanischen Grundgrößen ausdrückt, mit den **Einheiten** Zentimeter (cm), Sekunde (s) und Gramm (g), beherrscht noch praktisch die ganze atomphysikalische Literatur, besonders im nichtdeutschen Sprachbereich. Die Atomphysik hat es nämlich hauptsächlich mit **Punktladungen** zu tun, und die elektrostatische Energie zweier Punktladungen e im Abstand r ist im CGS-System einfach e^2/r, im SI $e^2/(4\pi\varepsilon_0 r)$. In den Energiestufen des Bohrschen Atommodells tritt der Faktor $4\pi\varepsilon_0$ sogar zweimal auf. Dagegen ist die Umrechnung von Strömen, Widerständen, Induktivitäten zwischen den CGS-Einheiten und den praktischen Einheiten Ampere, Ohm, Henry des SI ziemlich unangenehm.

Abgeleitete Größen erhalten eine **Dimension**, d. h. eine algebraische Kombination der Grundgrößen, die ihrer Definition entspricht. Man sollte bei keiner physikalischen Rechnung versäumen nachzuprüfen, ob die berechneten Größen die richtige Dimension haben, und ob zwei durch ein Gleichheits-, Plus- oder Minuszeichen verknüpfte Ausdrücke die gleiche Dimension haben. Über diese schnellste Fehlerkontrolle hinaus liefert die Dimensionsanalyse häufig Anhaltspunkte, wie eine gesuchte Beziehung überhaupt aussehen kann. In den Ähnlichkeitskriterien der Hydrodynamik und anderer Gebiete sind diese Methoden weit entwickelt worden.

In den einzelnen Gebieten der Physik und ihrer Anwendungen treten sehr verschiedene Größenordnungen für die einzelnen Größen auf. Es ist daher bequem, Vielfache und Teile der Einheiten zu benutzen (Tabelle 1.1).

Tabelle 1.1. Präfixe für Einheiten

Vorsilbe	Symbol	Potenz
Exa-	E	10^{18}
Peta-	P	10^{15}
Tera-	T	10^{12}
Giga-	G	10^{9}
Mega-	M	10^{6}
Kilo-	k	10^{3}
Centi-	c	10^{-2}
Milli-	m	10^{-3}
Mikro-	µ	10^{-6}
Nano-	n	10^{-9}
Pico-	p	10^{-12}
Femto-	f	10^{-15}
Atto-	a	10^{-18}

Die Wellenlängen des sichtbaren Lichts liegen knapp unter 1 µm, die Durchmesser der Atome betragen einige Å (1 Å $= 10^{-10}$ m), die der Atomkerne einige fm. Fixsterne sind einige Lichtjahre voneinander entfernt (1 Lichtjahr $= 9{,}47 \cdot 10^{15}$ m), dem ganzen Weltall schreibt man einen Radius von etwa 10^{10} Lichtjahren zu.

✗ Beispiel . . .

Prüfen Sie die angegebene Länge des Lichtjahres nach. Die Astronomen benutzen öfter 1 Parsec = 1 pc. Das ist der Abstand, aus dem der Erdbahnradius unter dem Winkel 1″ (1 Bogensekunde) erscheinen würde. Wie lang ist 1 pc?

$1\,\text{Lichtjahr} = 3{,}00 \cdot 10^8\,\text{m}\,\text{s}^{-1} \cdot 3{,}16 \cdot 10^7\,\text{s} = 9{,}47 \cdot 10^{15}\,\text{m}.$
$1\,\text{pc} = 1{,}5 \cdot 10^{11}\,\text{m} \cdot 57 \cdot 60 \cdot 60 = 3{,}08 \cdot 10^{16}\,\text{m}.$

1.1.4 Längeneinheit

Das **Meter** war vor 1799 als der 10 000 000ste Teil des (ungenau gemessenen) Erdquadranten, später auf Grund dieser Definition durch einen im Sèvres deponierten Platin-Iridium-Stab, das Archivmeter, festgelegt. Nachdem das Archivmeter den steigenden Anforderungen von Physik und Technik an Definiertheit und Konstanz nicht mehr genügte, wurde 1960 die Vakuum-Wellenlänge zugrundegelegt, die das Nuklid ^{86}Kr beim Übergang $5d_5 \to 2p_{10}$ aussendet. Seit 1983 ist das Meter an die sehr viel genauere Sekundendefinition durch die modernen Atomuhren angeschlossen: Das Meter ist die Strecke, die das Licht im Vakuum in 1/299 792 458 s zurücklegt.

Große Entfernungen lassen sich damit aus der Laufzeit elektromagnetischer Wellen direkt mit der Uhr messen, sehr kleine Abstände mit interferrometrischen Methoden ebenfalls. Im dazwischenliegenden Bereich alltäglicher Längen überträgt man die natürliche Einheit auf sekundäre Normale wie **Endmaße**.

Endmaße dienen für besonders genaue Messungen nicht zu großer Längen. Es sind quaderförmige Metallstücke, an denen zwei gegenüberliegende Flächen sehr genau planparallel geschliffen und hochpoliert sind. Der Abstand dieser Flächen ist auf wenige µm genau angegeben. Planflächen von so hoher Qualität haften aneinander, so daß man durch Aneinandersetzen mehrerer Endmaße neue Maße bilden kann, die ebenso präzis sind.

1.1.5 Winkelmaße

Ebene **Winkel** kann man im Gradmaß angeben. 1 Grad (1°) ist $\frac{1}{360}$ des „vollen“ Winkels. Kleinere Einheiten sind (Bogen-) Minute ($'$) und (Bogen-) Sekunde ($''$). $1^\circ = 60' = 3\,600''$. Bei astronomischen Messungen erreicht man eine Genauigkeit von Bruchteilen von Bogensekunden.

> Mathematisch einfacher ist das **Bogenmaß**, d. h. das Verhältnis der Kreisbogenlänge, die der gegebene Winkel aufspannt, zum Radius dieses Kreises.

Die Einheit erhält manchmal den eigenen Namen **Radiant (rad)**:

$$1\,\mathrm{rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57{,}295^\circ\,.$$

Radiant ist nur ein anderer Name für die Zahl 1. Entsprechend ist 1° nur ein anderer Name für die Zahl $\frac{1}{57{,}295} = 0{,}01745$.

Ein **Raumwinkel** ist gegeben durch das Verhältnis des über ihm aufgespannten Kugelflächenteils zum Quadrat des Radius der Kugel. Die Einheit wird manchmal **Steradiant** genannt (Aufgabe 1.1.1).

1.1.6 Zeitmessung

Alle periodischen Vorgänge sind als mehr oder weniger genaue **Uhren** brauchbar. Der Ablauf einmaliger Vorgänge hat dagegen nur noch geringe Bedeutung für die Zeitmessung (Sanduhr). Besonders regelmäßige periodische Vorgänge sind Pendelschwingungen, elastische Schwingungen, Atomschwingungen und die Rotation der Erde. Bei der Erddrehung sind zu unterscheiden die Rotationsperiode relativ zu den Fixsternen (**Sterntag**) und relativ zur Sonne (**Sonnentag**). Die Länge des Sonnentages variiert mit der Jahreszeit. Der **mittlere Sonnentag** ist um $\frac{1}{365{,}256}$ länger als der Sterntag, weil die Erde an einem Tag auf ihrer Bahn um die Sonne um gerade diesen Teil des Vollkreises weiterrückt und die Drehungen der Erde um die Sonne und um ihre Achse im gleichen Sinn erfolgen (Aufgabe 1.1.2). Sterntag und Sonnentag werden gemessen als Zeitabstand der Durchgänge eines Fixsterns bzw. der Sonne durch den gleichen Himmelsmeridian, z. B. durch den Meridian, der durch den Zenit geht (obere bzw. untere Kulmination). Ältere Zeiteinheit ist die *mittlere Sonnensekunde* (s).

Auch diese Sekunde ist keine zuverlässige natürliche Einheit. Die Achsdrehung der Erde hängt von der Massenverteilung um die Achse ab und erfolgt nicht mit genau konstanter Winkelgeschwindigkeit. Die Gezeitenreibung bremst außerdem die Drehung langsam, aber ständig ab. Andererseits ist die Schwingungsdauer eines „Sekundenpendels" nicht nur von der Pendellänge, sondern auch von der Fallbeschleunigung abhängig; diese hängt ebenfalls von der Massenverteilung auf und in der Erde ab und ist daher örtlich und in geringerem Maße zeitlich veränderlich (Aufgaben 1.1.4–1.1.6).

Ein Quarzstab kann piezoelektrisch (Abschn. 6.2.5) zu Schwingungen angeregt werden, deren Periode außer von den Stababmessungen nur von der Dichte und den elastischen Eigenschaften abhängt (Abschn. 4.4.3). Diese sind aber durch Masse, Anordnung der Atome im Kristallgitter und Atomkräfte eindeutig bestimmt. Es gibt **Quarzuhren**, deren Gang an Regelmäßigkeit den der besten astronomischen Pendeluhren übertrifft.

Eine bessere Konstanz als die Rotation der Erde zeigen auch periodische Vorgänge innerhalb des Atoms. Zum Bau von höchstkonstanten Uhren verwendet man einen inneratomaren Prozeß eines Isotops des Caesiums (^{133}Cs), dessen Frequenz im Bereich technisch erzeugbarer elektromagnetischer Schwingungen liegt ($9 \cdot 10^9$ Hz). Die Absorption dieser Schwingungen durch die ^{133}Cs-Atome wird benützt, um die Frequenz des sie erzeugenden Senders dauernd genau auf dieser inneratomaren Frequenz zu halten. Die relative Frequenzabweichung kann um 10^{-13} gehalten werden.

Im Jahr 1964 wurde durch Anschluß an die alte Sekundendefinition (Sonnensekunde) provisorisch festgelegt, die Zeit für 9 192 631 770 Schwingungen dieses ^{133}Cs-Übergangs als 1 s zu bezeichnen.

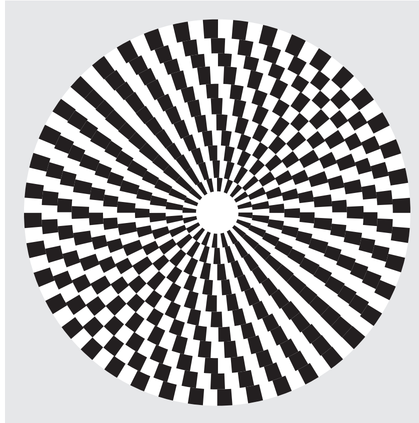


Abb. 1.1. Stroboskop. Der innerste Ring hat $N = 20$ schwarze Sektoren, nach außen nimmt N in Zweierschritten zu bis 40 ganz außen. Wenn im Lampenlicht, das mit 100 Hz schwankt, nur der Ring mit N klar zu sehen ist, hat die Scheibe $6\,000/N$ Umdrehungen/min oder ein Vielfaches davon

1.1.7 Meßfehler

Eine völlig genaue Messung einer kontinuierlichen Größe ist nicht möglich. Es besteht immer eine Abweichung $\Delta x = x_\mathrm{a} - x_\mathrm{r}$, genannt **absoluter Fehler**, zwischen dem abgelesenen Wert x_a und dem realen Wert x_r. Für Vergleichszwecke wichtig ist auch der **relative Fehler** $\Delta x/x_\mathrm{a}$. Die Kunst des Experimentators liegt darin, den Fehler klein zu halten und den unvermeidlichen Fehler sauber abzuschätzen.

Von **groben Fehlern**, bedingt durch Unachtsamkeit, unsachgemäße Handhabung des Meßgeräts, Benutzung einer falschen Theorie der untersuchten Vorgänge wollen wir hier nicht reden. Die Messung soll „allen Regeln der Kunst" entsprechen. Dann bleiben Fehler, die durch Unvollkommenheiten des Meßgeräts oder störende Einflüsse der Umgebung bedingt sind (objektive Fehler), und Fehler, die der Beobachter beim Einstellen und Ablesen macht (subjektive Fehler). Beide Arten von Fehlern können konstant, systematisch oder zufällig sein.

Konstante Fehler, z. B. infolge einer falsch gestellten Uhr (objektiv) oder die Tatsache, daß der Beobachter immer etwas von links her auf Zeiger und Skala schaut statt genau senkrecht (**parallaktischer Fehler**, subjektiv), sind meist leicht durch Differenzmessung zu beseitigen. Oft kommt es nur auf die Differenz zweier Ablesungen an; der Parallaxenfehler fällt weg, wenn der Beobachter aller Zeigerstellungen von seiner „persönlichen Nullstellung" an rechnet.

Für die Erfassung und Beseitigung **systematischer Fehler** gibt es keine so einfache Regel. Bestandteil jeder Messung ist eine mindestens qualitative Analyse der erkennbaren, aber mit den gegebenen Mitteln nicht unterdrückbaren systematischen Fehler.

Oft ist das Ergebnis eines Experiments keine direkte Zeigerablesung, sondern entsteht durch Kombination aus Messungen mehrerer Größen. So bestimmt man eine Geschwindigkeit i. allg. aus einer Weg- und einer Zeitmessung. Die zu bestimmende Größe y sei also eine Funktion mehrerer anderer Größen $x_1, x_2, \ldots, x_k$:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_k) .$$

Wenn die Fehler der x_i bekannt und klein sind, d. h. $\Delta x_i \ll x_i$, ergibt sich der Fehler von y nach dem **Fehlerfortpflanzungsgesetz**

$$\boxed{\Delta y = \sum_{i=1}^{k} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i} \quad . \tag{1.1}$$

Dies folgt analytisch aus der Taylor-Entwicklung der Funktion f, anschaulich wenigstens für zwei Variable $(k = 2)$ durch Betrachtung der Fläche $y = f(x_1, x_2)$. Die Absolutstriche sorgen dafür, daß man den *maximalen* Fehler von y erhält, der bei *ungünstiger* Kombination der Einzelfehler zustandekommen kann. Aus (1.1) sieht man sofort:

> Der *absolute* Fehler einer *Summe* oder Differenz zweier Größen, $y = x_1 + x_2$ oder $y = x_1 - x_2$, ist die *Summe der absoluten Fehler* dieser Größen. Der *relative* Fehler eines *Produktes* oder *Quotienten* $y = x_1 x_2$ oder $y = x_1 / x_2$ ist die *Summe der relativen Fehler* dieser Größen. Der relative Fehler der *n.* Potenz einer Größe, $y = a x^n$, ist n-mal der relative Fehler dieser Größe.

Zufällige Fehler sind zwar in der Einzelmessung unvermeidlich, aber durch Kombination mehrerer Messungen im Prinzip beliebig reduzierbar. Im Gegensatz zu den systematischen Fehlern rechnet man hierzu Abweichungen, die auf unkontrollierbaren Einflüssen des Meßgeräts, der Umgebung oder des Beobachters beruhen und die *ebensooft* in *positiver wie in negativer* Richtung erfolgen. Wenn man eine solche Messung mehrfach unter Umständen ausführt, die so identisch wie möglich sind, erhält man Ergebnisse $x_1, x_2, \ldots, x_n$, die sich irgendwo über die x-Achse verteilen. x_i sei das Ergebnis der i-ten Messung (zu unterscheiden von den x_i in (1.1), die Messungen *verschiedener* Größen beschreiben). Dann definiert man als **Mittelwert** der Ergebnisse

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i} \quad . \tag{1.2}$$

Er stellt offenbar die unter den Umständen beste Schätzung des wahren Wertes x_{r} dar. Wie gut diese Schätzung ist, sieht man aus der Breite der Verteilung, beschrieben durch die *Streuung* oder **Standard-Abweichung**

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}} \tag{1.3}$$

(für $n \gg 1$: Aufgabe 1.1.7). Wenn man das Quadrat ausmultipliziert und (1.2) benutzt, findet man

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\frac{1}{n}\left(\sum x_i^2 - 2\bar{x}\sum x_i + \sum \bar{x}^2\right)}\\ &= \sqrt{\frac{1}{n}\left(\sum x_i^2 - 2n\bar{x}\bar{x} + n\bar{x}^2\right)} = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}\,,\end{aligned} \tag{1.4}$$

was zur praktischen Berechnung und für weiterführende Betrachtungen günstiger ist. (Man beachte: in $\overline{x^2}$ wird erst quadriert, dann gemittelt, in $\bar{x}^2$ umgekehrt.)

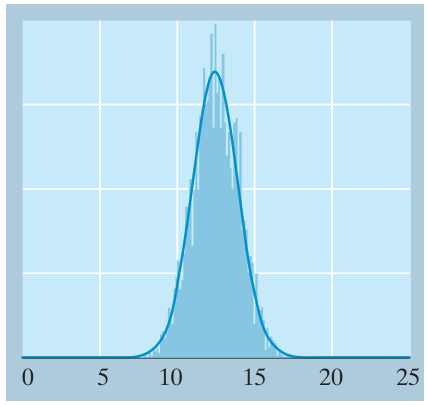


Abb. 1.2. 2500 Summen aus je 25 Zufallszahlen verteilen sich nach Gauß, ähnlich wie die Ergebnisse vieler gleichartiger Messungen. Wovon hängen Mittel und Standard-Abweichung ab? Das Mittel von Zufallszahlen aus $(0,1)$ ist $\frac{1}{2}$, ihre Standard-Abweichung $\sigma = \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$, wobei $\overline{x^2} = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$, also $\sigma = 0{,}2887$. Für N Summen aus je Z Zufallszahlen: Mittel $Z/2$, Standard-Abweichung $\sqrt{Z}\sigma$. Je größer N, desto besser die Annäherung an die Gauß-Funktion

Mit zufälligen Fehlern behaftete Größen sind i. allg. *normalverteilt*, d. h. sie folgen einer **Normal-** oder **Gauß-Verteilung**: Eine Einzelmessung der Größe x hat die Wahrscheinlichkeit $p(x)\mathrm{d}x$, einen Wert aus dem Intervall $(x, x+\mathrm{d}x)$ zu ergeben, wobei

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,\mathrm{e}^{-(x-\bar{x})^2/(2\sigma^2)}\,. \tag{1.5}$$

Das Bild dieser Funktion ist eine symmetrische Glockenkurve mit dem Maximum bei $x = \bar{x}$. Wenn man sich auf der Abszisse um ein Stück σ von diesem Wert $\bar{x}$ entfernt, fällt die Kurve auf den Bruchteil $\mathrm{e}^{-1/2} = 0{,}607$ ihres Maximalwerts. Der Faktor $1/\sqrt{2\pi}\,\sigma$ sorgt dafür, daß die Fläche unter der Kurve von $x = 0$ bis $x = \infty$, d. h. die Wahrscheinlichkeit, daß x *irgendeinen* Wert hat, sich zu 1 ergibt (Aufgabe 1.1.8). $\bar{x}$ ist der Mittelwert, denn

$$\int x\,p(x)\,\mathrm{d}x = \bar{x}\,,$$

σ ist die Streuung, denn

$$\int (x-\bar{x})^2\,p(x)\,\mathrm{d}x = \sigma^2\,.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein gemessener Wert nicht mehr als eine gegebene Abweichung δ vom wahren Wert (repräsentiert durch $\bar{x}$) hat, ist gleich der Fläche unter der Gauß-Kurve zwischen $x-\delta$ und $x+\delta$. Diese Wahrscheinlichkeit heißt auch *statistische Sicherheit* P für die **Vertrauensgrenze** δ. P hängt nur von δ/σ ab. Wenn jemand 95 % Sicherheit haben will, daß seine Vertrauensgrenzen den wahren Wert umfassen, muß er angeben $x = \bar{x} \pm 1{,}96\,\sigma$.

δ/σ	0,676	1,000	1,960
	2,000	2,581	3,000
P	0,500	0,683	0,950
	0,954	0,990	0,997

Wie kommt man zu diesen Werten? $P(z)$ ist die Fläche unter der Gauß-Kurve zwischen $z = 0$ und $z = \delta/(\sqrt{2}\sigma)$, also $P(z) = (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-1} = \int_0^z \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$. Das Integral bestimmen wir durch Reihenentwicklung des Integranden: $\int_0^z (1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - + \ldots) = z - \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{10}z^5 - + \ldots$. Das ist noch mit $2/\sqrt{\pi}$ zu multiplizieren. Wenige Taschenrechnerschritte liefern die Tabellenwerte.

Normalverteilte zufällige Fehler reduzieren sich durch wiederholte Messung. Ein einzelner Meßpunkt weicht im Durchschnitt um σ vom wahren Wert ab, d. h. er hat die Wahrscheinlichkeit 0,683, ▶

innerhalb des Intervalls $x_r \pm \sigma$ zu liegen. Der *Mittelwert* von n Messungen weicht im Durchschnitt nur um

$$\Delta\bar{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{1.6}$$

ab, d. h. liegt mit der Wahrscheinlichkeit 0,683 in dem viel kleineren Intervall $x \pm \sigma/\sqrt{n}$.

Dies ist ein wichtiges Ergebnis der von *C.F. Gauß* begründeten **Ausgleichsrechnung**. Sie geht davon aus, daß sich die Wahrscheinlichkeiten unabhängiger Ereignisse zur Wahrscheinlichkeit des Gesamtereignisses multiplizieren. Wenn man Wahrscheinlichkeiten wie (1.5) multipliziert, addieren sich die Exponenten. Nun geht es darum, die Schätzwerte x_r so zu bestimmen, daß die Gesamtwahrscheinlichkeit maximal wird, daß also der Exponent, der ja negativ ist, minimal wird. Der Exponent ist die Summe der Quadrate von Abweichungen $x - x_r$. Daher spricht man von der **Methode der kleinsten Quadrate**.

Diese Überlegungen führen auf ein anderes Fehlerfortpflanzungsgesetz als (1.1). Dieses stellt den schlimmsten Fall dar, wo sich alle Einzelfehler im gleichen Sinn zusammentun, um das Ergebnis zu verfälschen. Wenn es sich um viele *unabhängige* Einzelfaktoren handelt, ist das sehr unwahrscheinlich. Man bleibt im Rahmen vernünftig gewählter statistischer Sicherheit (z. B. $P = 0{,}683$), wenn man die Standard-Abweichung der *kombinierten* Verteilung als Vertrauensgrenze angibt. Diese Standard-Abweichung ergibt sich aus der *geometrischen* Addition der Einzelfehler:

$$\Delta y = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_i^2}\,, \tag{1.7}$$

als ob jeder Einzelfaktor seine eigene Raumdimension hätte und der Gesamtfehler aus dem Pythagoras folgte, oder, was dasselbe ist, als Betrag eines Vektors entstünde. Da der Betrag eines Vektors immer kleiner ist als die Summe seiner absolut genommenen Komponenten, gibt das **Fehlerfortpflanzungsgesetz von Gauß** (1.7) eine mildere Schätzung als (1.1).

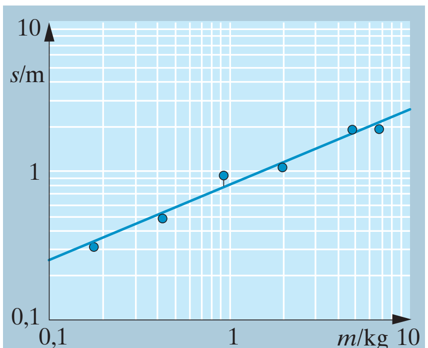
Eine andere wichtige Anwendung der Ausgleichsrechnung ist die **lineare Regression**. Man hat eine Größe y gemessen, von der man annimmt, daß sie linear von einer anderen Größe x abhängt. Meßwerte von y liegen für die x-Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vor, d. h. man verfügt über n Wertepaare (x_i, y_i), die in die x,y-Ebene eingetragen eine mehr oder weniger längliche Punktwolke ergeben. Welches ist die Gerade $y = a + bx$, die die Meßwerte am besten beschreibt? Gesucht sind also die Werte a und b, für die die Summe S der Quadrate der vertikalen Abstände zwischen den Meßpunkten und der Geraden so klein wie möglich ist, d. h. für die

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2 = \min\ . \tag{1.8}$$

Leonardo da Vinci stellte folgende Daten über Körpermassen m und Flügelspannweiten s von Vögeln zusammen (hier in heutigen Einheiten ausgedrückt):

	m/kg	s/m
Amsel	0,17	0,32
Eichelhäher	0,42	0,48
Bleßhuhn	0,92	0,95
Stockente	1,95	1,10
Graugans	4,80	1,85
Storch	6,60	1,95

Da wir eine Potenzabhängigkeit $s(m) = am^b$ vermuten, tragen wir die Werte in einem $\log(s)$-$\log(m)$-Diagramm auf, dessen Steigung den Exponenten b ergibt. Lesen Sie b ab und erklären Sie das Ergebnis. Welche Spannweite braucht ein fliegender Mensch?



$\log s = -0{,}091 + 0{,}506 \log m$
$s = 0{,}81\sqrt{m}$

Man findet dieses Minimum durch Nullsetzen der Ableitungen nach a und b:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2\sum(y_i - a - bx_i) = 0\,, \quad \text{d. h. } \bar{y} = a + b\bar{x}\,. \tag{1.9}$$

Das bedeutet, daß die beste Gerade durch den Punkt geht, der den Mittelwerten von x und y entspricht. Weiter

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2\sum x_i(y_i - a - bx_i) = 0\,, \quad \text{d. h.}$$
$$\sum x_i y_i = a\sum x_i + b\sum x_i^2\,.$$

Hier setzen wir $a = \bar{y} - b\bar{x}$ aus (1.9) ein und erhalten, nach b aufgelöst,

$$\boxed{b = \frac{\sum x_i y_i - \bar{x}\sum y_i}{\sum x_i^2 - \bar{x}\sum x_i}}\,. \tag{1.10}$$

Damit sind Steigung b und y-Abschnitt a der besten Geraden durch die bekannten Meßwerte x_i und y_i ausgedrückt. Kompliziertere als lineare Abhängigkeiten kann man oft durch geeignete Auftragung auf lineare zurückführen. Vermutet man z. B. ein Gesetz $y = a\,\mathrm{e}^{-bx}$, dann trage man y logarithmisch auf (einfach-logarithmisches mm-Papier) und kann aus $\ln y = -bx + \ln a$ die Konstanten $-b$ und $\ln a$ nach der obigen Methode finden.

1.2 Kinematik

Die Kinematik untersucht das „Wie“, den Ablauf der Bewegung, ohne nach dem „Warum“ zu fragen.

1.2.1 Ortsvektor

Um Bewegungen zu beschreiben, muß man zuerst ein **Bezugssystem** festlegen. Sein Ursprung O kann materiell definiert sein (Zimmerecke, Auto-Zündschloß, Erdmittelpunkt, Sonne ...), oder ein gedachter Punkt (Schwerpunkt des Systems Erde–Mond ...). Ob sich O selbst bewegt, spielt zunächst keine Rolle und läßt sich auch prinzipiell nicht sagen, jedenfalls nicht bei gleichförmiger Bewegung (Abschn. 1.8). Den Ort eines Massenpunktes zur Zeit t beschreibt man dann durch einen Vektor $\boldsymbol{r}(t)$, der von O bis zu diesem Ort führt. Will man diesen **Ortsvektor** in cartesische Koordinaten zerlegen, braucht man noch drei durch O gehende aufeinander senkrechte Achsen. Wenn sich der Massenpunkt relativ zu O bewegt, ändert sich $\boldsymbol{r}$ mit der Zeit t. Die Gesamtheit aller Endpunkte der Vektoren $\boldsymbol{r}(t)$ zu allen möglichen Zeiten t bildet die Bahnkurve des Massenpunktes.

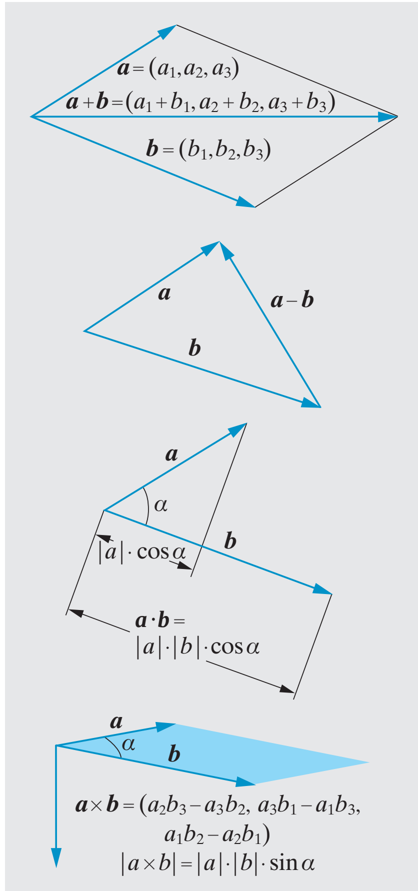


Abb. 1.3. Rekapitulation der Vektoralgebra

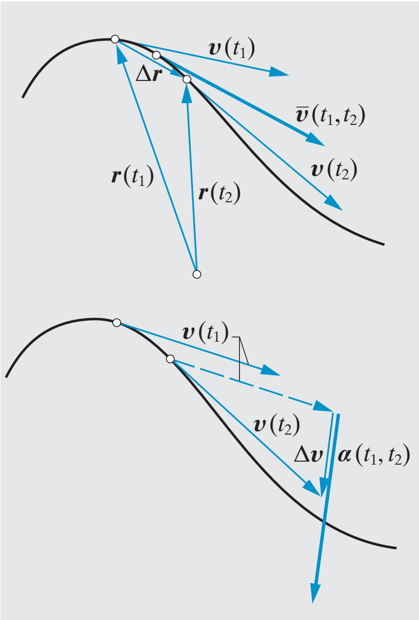


Abb. 1.4. *Oben*: Konstruktion der Geschwindigkeit aus der Bahnkurve. *Unten*: Konstruktion der Beschleunigung aus den Geschwindigkeitsvektoren

1.2.2 Geschwindigkeit

Die Differenz der Ortsvektoren für zwei Zeiten t_1 und t_2 ist die *Verschiebung* des Massenpunktes während dieser Zeit:

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t_2) - \boldsymbol{r}(t_1)\,. \tag{1.11}$$

Diese Verschiebung ist „in Luftlinie" gemessen, ohne Berücksichtigung eventueller Bahnkrümmungen (Abb. 1.4).

✘ Beispiel . . .

Worauf beruht die bekannte Regel: Man teile die Zeit zwischen Blitz und Donner (in Sekunden) durch 3 und erhält den Abstand des Gewitters in km?

Der Schall breitet sich mit $c = 333$ m/s aus, das Licht praktisch unendlich schnell. Wenn das Gewitter 1 km entfernt ist, hört man den Donner 3 s nach dem Blitz.

Division der Verschiebung durch die dazu benötigte Zeit $t_2 - t_1$ liefert die **mittlere Geschwindigkeit** während dieser Zeit:

$$\overline{\boldsymbol{v}}(t_1, t_2) = \frac{\boldsymbol{r}(t_2) - \boldsymbol{r}(t_1)}{t_2 - t_1}\,. \tag{1.12}$$

Sie berücksichtigt offensichtlich nur den Gesamteffekt, nicht eventuelle Änderungen der Geschwindigkeit während dieser Zeit. Um die **Momentangeschwindigkeit** oder **Geschwindigkeit** schlechthin für einen bestimmten Zeitpunkt, etwa t_1, zu erhalten, argumentiert man folgendermaßen: Wenn man den Zeitpunkt t_2 immer näher an t_1 heranrücken läßt, verringert man immer mehr die Möglichkeit für Geschwindigkeitsänderungen innerhalb dieses Zeitintervalls.

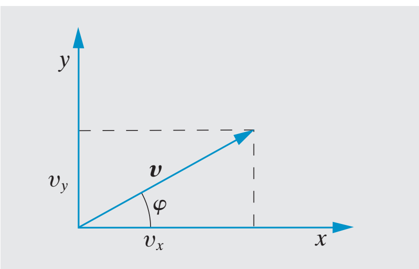


Abb. 1.5. Komponentenzerlegung

Der Grenzwert des Ausdruckes $\overline{\boldsymbol{v}}(t_1, t_2)$ für $t_2 \to t_1$ ist die Momentangeschwindigkeit

$$\boldsymbol{v}(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\boldsymbol{r}(t_2) - \boldsymbol{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{r}}\,. \tag{1.13}$$

In der Folge werden wir häufig die zeitliche Ableitung einer Größe kurz durch einen darübergesetzten Punkt kennzeichnen.

Wählt man das Meter als Längen- und die Sekunde als Zeiteinheit, so ist die Einheit der Geschwindigkeit sinngemäß m/s.

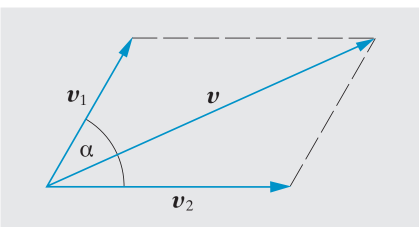


Abb. 1.6. Addition von Geschwindigkeiten

Die Geschwindigkeit ist zweifellos ein Vektor: Ihrer mathematischen Entstehung nach als Quotient des Verschiebungsvektors und des Skalars Zeit; vor allem aber ihrer physikalischen Bedeutung nach, denn sie hat eine Größe *und* eine Richtung. Ihre *Richtung* ist die gleiche wie die Grenzlage des Verschiebungsvektors für $t_2 \to t_1$, also die Richtung der Tangente an die Bahnkurve an der entsprechenden Stelle.

Im allgemeinen wird sich die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}(t)$ von Bahnpunkt zu Bahnpunkt, also auch von Zeitpunkt zu Zeitpunkt ändern. Ändert sich die Richtung von $\boldsymbol{v}$ nicht (aber evtl. die Größe), so ist die Bahn geradlinig. Ändert sich die Größe von $\boldsymbol{v}$ nicht (aber evtl. die Richtung), so nennt man die Bewegung *gleichförmig*; sie kann indessen noch auf jeder beliebig gekrümmten Bahn erfolgen.

✗ Beispiel...

Wie groß ist die Bahngeschwindigkeit der Erde auf der Bahn um die Sonne; die des Mondes auf der Bahn um die Erde; die eines Punktes am Äquator bei der Achsendrehung der Erde? Mittlerer Abstand Sonne–Erde $1{,}5 \cdot 10^8$ km; mittlerer Abstand Erde–Mond 384 000 km; mittlerer Erdradius 6 378 km.

Erde um Sonne: $2\pi \cdot 1{,}5 \cdot 10^8\,\mathrm{km}/3{,}15 \cdot 10^7\,\mathrm{s} = 29{,}7\,\mathrm{km/s}$.
Mond um Erde: $2\pi \cdot 384\,000\,\mathrm{km}/(27{,}3 \cdot 86\,400\,\mathrm{s}) = 1{,}02\,\mathrm{km/s}$.
Punkt am Äquator: $2\pi \cdot 6\,378\,\mathrm{km}/(86\,400\,\mathrm{s} \cdot 365/366) = 0{,}465\,\mathrm{km/s}$.

1.2.3 Beschleunigung

Die Geschwindigkeitsänderung $\Delta\boldsymbol{v}(t_1, t_2)$ zwischen zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 ergibt sich wieder durch vektorielle Differenzbildung zwischen $\boldsymbol{v}(t_2)$ und $\boldsymbol{v}(t_1)$. Diese Operation erfaßt auch den Fall, daß sich nicht, oder nicht nur die Größe, sondern auch die Richtung der Geschwindigkeit ändert. Bei der zeichnerischen Bestimmung von $\Delta\boldsymbol{v}$ muß man einen der beiden Vektoren so parallelverschieben, daß beide Anfangspunkte koinzidieren (eine Parallelverschiebung ändert den Vektor nicht).

Die **mittlere Beschleunigung** während eines Zeitraums, z. B. des Intervalls (t_1, t_2), ergibt sich wieder, indem man die Geschwindigkeitsänderung durch die dazu benötigte Zeit dividiert:

$$\overline{\boldsymbol{a}}(t_1, t_2) = \frac{\boldsymbol{v}(t_2) - \boldsymbol{v}(t_1)}{t_2 - t_1}\,. \tag{1.14}$$

Der Grenzübergang $t_2 \to t_1$ definiert die **Momentanbeschleunigung** oder **Beschleunigung** schlechthin für den Zeitpunkt t_1:

$$\boldsymbol{a}(t_1) = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\boldsymbol{v}(t_2) - \boldsymbol{v}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\boldsymbol{r}}\,. \tag{1.15}$$

Die Einheit der mittleren und der momentanen Beschleunigung ist sinngemäß $\mathrm{m/s/s} = \mathrm{m\,s^{-2}}$.

Folgende Tatsachen sind leicht aus diesen Definitionen abzuleiten (Abb. 1.7):

Wenn sich nur die *Größe* der Geschwindigkeit ändert, hat die Beschleunigung $\boldsymbol{a}$ die Richtung (oder Gegenrichtung) zur Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$, je nachdem, ob es sich um eine „Beschleunigung" im alltäglichen Sinne oder um eine Bremsung handelt (Tangentialbeschleunigung).

Wenn sich nur die *Richtung* der Geschwindigkeit ändert, steht der Beschleunigungsvektor senkrecht auf dem Geschwindigkeitsvektor, also auch senkrecht auf der Bahn (Normalbeschleunigung).

Im allgemeinen Fall der Größen- *und* Richtungsänderung der Geschwindigkeit führt die eine zu einer Tangential-, die andere zu einer Normalkomponente der Beschleunigung („normal" = senkrecht).

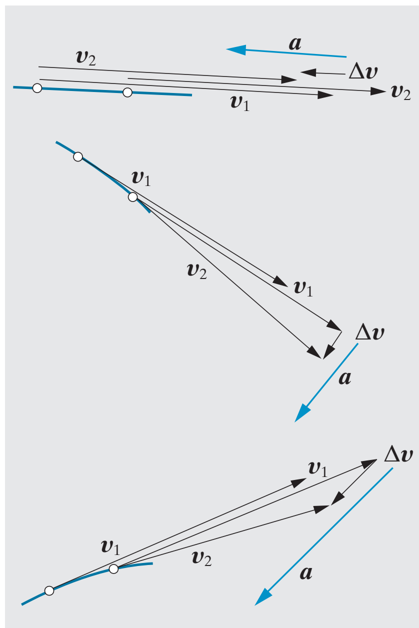


Abb. 1.7. *Oben*: Reine Tangentialbeschleunigung. *Mitte*: Reine Normalbeschleunigung. *Unten*: Allgemeiner Fall

oder vielfach in strömenden Flüssigkeiten, kann und will kein Mensch jedes einzelne verfolgen, nicht nur, weil die Quantenmechanik (Kap. 12) das auch prinzipiell gar nicht zuließe. Hier sind statistische Gesetze, Aussagen über Mittelwert und mittlere Abweichungen davon, alles was man vernünftigerweise verlangen und verarbeiten kann (Kap. 5, 18): Wer wollte denn verfolgen, was jedes von 10^{30} Teilchen macht?

✓ Aufgaben . . .

● 1.1.1. Bogenmaß

Welchen Längen entsprechen $1°$, $1'$, $1''$, 1 rad auf der Erdoberfläche? Welchen Flächen entsprechen 1 Quadratgrad, 1 Quadratminute, 1 Quadratsekunde, 1 sterad? Wieviel sterad, Quadratgrad usw. hat die ganze Kugel; ein Halbraum; eine Kreisscheibe vom Radius r im Abstand a; ein Rechteck mit den Seiten a und b im Abstand r (senkrecht bzw. unter einem Winkel betrachtet); die Sonne, von der Erde aus gesehen; Ihre Hand bei ausgestrecktem Arm von Ihrem Auge aus (hat Ihre Körpergröße einen Einfluß?); die Bundesrepublik vom Erdmittelpunkt aus? Welchen Anteil der Sonnenstrahlung fängt die ganze Erde auf? Wenn λ die geographische Länge, φ die Breite ist, wieso ist das Raumwinkelelement der Erdoberfläche $\cos\varphi\, d\lambda\, d\varphi$? In sphärischen Polarkoordinaten zählt die „Breite“ anders herum als auf der Erde ($\vartheta = 0$ am Pol, $\pi/2$ am Äquator). Wie sieht das Raumwinkelelement aus? Wann spricht man bei einer Messung (z. B. Strahlungsmessung) von „4π-Geometrie“?

●● 1.1.2. Sonnen- und Sterntag

Wie kommt es zu dem Verhältnis 366,25/365,25 zwischen Sonnen- und Sterntag?

● 1.1.3. Stroboskopeffekt

Warum sieht man im Kino oder Fernsehen oft Flugzeugpropeller, Panzerketten, Kutschenräder viel zu langsam oder rückwärts laufen? Was kann man schließen, wenn die Rückwärtsdrehung in eine Vorwärtsdrehung übergeht oder umgekehrt? Kann der Effekt beim Anfahren öfter auftreten? Wie kann man den Effekt zur Drehzahlmessung an Motoren, Zentrifugen usw. ausnutzen? Braucht man dazu natürliche oder künstliche Beleuchtung?

●● 1.1.4. Tageslänge

Schätzen Sie, in welchem Maße folgende Ereignisse das Trägheitsmoment der Erde und damit die Winkelgeschwindigkeit ihrer Rotation beeinflussen: Die Krakatau-Katastrophe (mehrere km^3 Gestein einige km hoch geblasen); der Bau der chinesischen Mauer; die Sättigung der gesamten Troposphäre mit Wasserdampf; eine Abkühlung der Atmosphäre (Schrumpfung der Skalenhöhe); eine Eiszeit; die Bildung eines Hochgebirges wie des Himalaja (beachten Sie die Breitenlage); die gesamte tertiäre Gebirgs- und Hochlandbildung. Welcher dieser Effekte kann merkliche Veränderungen der Sonnensekunde bringen?

●●● 1.1.5. Pendeluhren

Wie beeinflussen die in Aufgabe 1.1.4 genannten Vorgänge die Periode von Präzisionspendeln, die am Ort des Geschehens oder anderswo aufgestellt sind? Man vergleiche mit der Periodenänderung infolge thermischer Ausdehnung des Pendelarmes (z. B. Temperaturschwankungen der Atmosphäre). Welche Präzision der Thermostatisierung lohnt sich angesichts dieser Einflüsse noch?

●● 1.1.6. Tageslänge

Die Totalitätszone der **Sonnenfinsternis** von 484 n. Chr. lief nach zeitgenössischen Berichten über Korfu, Rhodos und den Libanon. Rechnet man mit der sehr genau bekannten Länge des Finsterniszyklus zurück, kommt man zwar auf das richtige Datum, aber auf eine Totalitätszone Lissabon–Karthago–Cypern. Diese Diskrepanz fiel schon *Halley* um 1700 auf. *Kant*, der durchaus nicht nur abstrakter Philosoph war, schlug **Gezeitenbremsung** der Erdrotation als Erklärung vor. An Schliffen von Korallenstöcken kann man mikroskopisch periodische Änderungen der Kalkablagerung als Jahres- und sogar Tagesringe feststellen. An devonischen ($3 \cdot 10^8$ Jahre alten) Korallen zählt man 400 ± 10 Tagesringe pro Jahresring. Heutige Atomuhren gestatten Direktmessung der Zunahme der **Tageslänge**: 20 ± 5 µs/Jahr. Vergleichen Sie die drei Angaben miteinander und mit der in Aufgabe 1.7.19 geschätzten Gezeitenreibung. Wie sind diese Schätzung und die Folgerungen über Vergangenheit und Zukunft des Erde-Mond-Systems abzuändern? Worauf könnte der Unterschied beruhen?

●●● 1.1.7. Standard-Abweichung

Vielfach definiert man die Standard-Abweichung anders als in (1.3), nämlich $\sigma' = \sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2/(n-1)}$. Dies bezieht sich auf eine Stichprobe von endlich vielen Werten x_i. Gleichung (1.3) ist dagegen die „Standard-Abweichung der Grundgesamtheit“. Der Unterschied rührt daher, daß der Mittelwert (1.2) der Stichprobe etwas vom „wahren Mittel“ der Grundgesamtheit abweicht. Führen Sie das näher aus.

●● 1.1.8. Gauß-Fläche

Weisen Sie nach, daß die Gesamtfläche unter der **Gauß-Funktion** 1 ist (was bedeutet das?), und daß ihr Mittelwert tatsächlich $\bar{x}$, ihre Standard-Abweichung σ ist.

●●● 1.1.9. Normalverteilung

Warum sind Zufallsabweichungen normalverteilt? Beachten Sie: Solche Abweichungen beruhen auf sehr vielen verschiedenen Ursachen, man kann sie auf viele verschiedene Weisen in Anteile zerlegen. Nach welchem Gesetz addieren sich diese Beiträge? Die Verteilungsfunktion für diese Abweichungen muß immer den gleichen Bau haben, ob es sich um irgendwelche Teilbeträge oder die Gesamtabweichung handelt.

● 1.2.1. Wie schnell ist der Mensch?

Berechnen Sie aus den Weltrekordzeiten für einige Laufstrecken (Leichtathletik, Eisschnellauf usw.) die mittleren Geschwindigkeiten. Treten während des Laufs irgendwann höhere Geschwindigkeiten auf?

● 1.2.2. Ein schneller Hund

Morgens um 6 Uhr bricht Jäger Bumke zu seiner 10 km entfernten Jagdhütte auf. Sein Hund läuft doppelt so schnell, kehrt an der Jagdhütte um, läuft wieder bis zum Herrn zurück und pendelt so ständig zwischen Jäger und Hütte hin und her. Welche Strecke ist der Hund gelaufen, wenn der Jäger um 8 Uhr an der Hütte anlangt?

●● 1.2.3. Wo ist der Hund?

Ein Junge, ein Mädchen und ein Hund setzen sich gleichzeitig vom gleichen Punkt einer schnurgeraden Straße aus in Marsch. Der Junge geht mit 6 km/h, das Mädchen mit 4 km/h, der Hund pendelt ständig mit 10 km/h zwischen beiden hin und her. Wo befinden sich der Junge, das Mädchen, der Hund nach genau einer Stunde, in welche Richtung läuft der Hund?

●●● 1.2.4. Ein nasser Hund

Ein Hund entdeckt seinen Herrn am anderen Ufer eines Flusses, springt genau gegenüber ins Wasser und schwimmt immer genau in Richtung auf Herrchen, obwohl ihn die Strömung abtreibt. Der Fluß habe überall die gleiche Geschwindigkeit. Wo landet der Hund, wie lange braucht er, welche Kurve beschreibt er?

●●● 1.2.5. Der Lobatschewsky-Hund

Ein Hund, der sich abseits der Straße an einem Baum beschäftigt hatte, wird jetzt von seinem Herrn, der geradlinig und gleichförmig auf der Straße weitergeht, an strammer Leine mitgezerrt. Welche Kurve beschreibt der Hund?

●● 1.2.6. Un problema quadrato per teste quadrate

Ein junges Mädchen, ein Wanderer, ein Räuber und ein Polizist befinden sich auf einer Ebene in genau quadratischer Anordnung, als jeder den genau 1 km entfernten Gegenstand seines Interesses entdeckt – der Wanderer das Mädchen, der Räuber den Wanderer, der Polizist den Räuber, das Mädchen den Polizisten – und beginnt, mit 6 km/h auf ihn zuzugehen. Welche Kurven beschreiben die Leute, wann und wo treffen sie zusammen? Wie ist die Lage, wenn es nur drei, wenn es fünf, sechs usw. Personen sind, die sich entsprechend verhalten?

●● 1.2.7. Satyr und Nymphe

In einem exakt kreisförmigen, vom Ufer ab sehr tiefen See schwimmt ein junges Mädchen genau in der Mitte, als sie das Herannahen eines allem Anschein nach sehr starken, sehr intelligenten, aber sonst widerlichen Mannes mit offenbar sehr bösen Absichten bemerkt, der zum Glück nicht schwimmen und genau viermal so schnell am Ufer laufen kann wie sie schwimmt, aber nicht schneller als sie läuft. Was muß sie tun, um ihm zu entkommen?

●●● 1.2.8. Ans Ende der Welt

In einer Science fiction-Story gerät der Held auf eine Art Fließband, auf dem er nur vorsichtig mit 1 m/s vorwärtskommt. Bald bemerkt er, daß von den beiden Enden A und B des Bandes eines (A) feststeht. Das andere (B) wird mit 10 m/s weggezogen. Zum Glück ist das Bandmaterial beliebig dehnbar. Kann der Held, der bei A auf das anfangs 1 km lange Band geraten ist, jemals das Ende B erreichen, und wenn ja, wann? – Der „Rand des Weltalls", der z. Z. etwa $2 \cdot 10^{10}$ Lichtjahre entfernt ist, rast mit Lichtgeschwindigkeit von uns weg. Wenn im Weltall als Ganzem die übliche Geometrie herrschte, wann würde eine Rakete, die mit $c/2$ fliegt, den Rand der Welt erreichen?

● 1.2.9. Hemmt Wind immer?

Ein Flugzeug fliegt mit der Reisegeschwindigkeit v eine Strecke d hin und zurück. Es weht ein Wind mit der Geschwindigkeit w genau in Flugrichtung bzw. beim Rückflug in Gegenrichtung. Gleicht der Gewinn an Flugzeit beim Hinflug den Verlust beim Rückflug aus?

●● 1.2.10. Michelson im Fluß

Ein Fluß hat überall die Strömungsgeschwindigkeit w. Ein Schwimmer überquert den Fluß zum genau gegenüberliegenden Punkt und kehrt zum Ausgangspunkt zurück. Ein anderer schwimmt genau die Flußbreite stromab und wieder zurück. Welcher der beiden gleich guten Schwimmer gewinnt?

●● 1.2.11. Wie kommt man rüber?

Ein Fluß hat überall die gleiche Strömungsgeschwindigkeit. Wie muß man sich verhalten, damit man beim Hinüberschwimmen

a) eine möglichst kurze Strecke abgetrieben wird; wie lang ist die Überquerungszeit?
b) in möglichst kurzer Zeit hinüberkommt; wie weit wird man abgetrieben?
c) Der Fluß strömt schneller als man schwimmt. Am sehr unwegsamen Ufer kommt man zu Fuß auch nur langsam vorwärts. Man soll in möglichst kurzer Zeit ans jenseitige Ufer schwimmen und wieder zum Ausgangspunkt zurückkehren.

● 1.3.1. Hier irrte Aristoteles

Aristoteles behauptete, ein schwerer Körper falle schneller als ein leichter (auch abgesehen vom Luftwiderstand). *Galilei* schlug vor, man solle sich einen schweren und einen leichten Körper durch einen Faden verbunden denken und diesen immer dünner bzw. dicker machen. Was beweist das?

●● 1.3.2. Was ist Masse?
Newton definiert zu Beginn der „Principia“ die Masse (er sagt: „Quantity of matter“) wie folgt: „The quantity of matter is the measure of the same, arising from its density and its bulk conjunctly“. Er kommentiert dies: „Thus air of a double density, in a double space, is quadruple in quantity, ...“. Ist diese Definition logisch befriedigend?

●● 1.3.3. Wie viele Axiome braucht man?
Eine Betrachtung aus *Newtons* „Principia“: Angenommen, zwei Körper A und B ziehen einander an, aber entgegen dem Reaktionsprinzip so, daß B von A stärker gezogen wird als A von B. Jetzt verbinden wir A und B durch eine Stange. Sie wird nach Voraussetzung durch B stärker geschoben als durch A, erfährt also eine gegen A gerichtete resultierende Kraft, die sie auf A überträgt. Das ganze System müßte sich damit nach dem Aktionsprinzip selbständig beschleunigen, ohne äußeren Kräften ausgesetzt zu sein, im Widerspruch zum Trägheitsprinzip und zur Erfahrung. Ist das eine echte Herleitung des Reaktionsprinzips, die es als Axiom überflüssig macht?

●●● 1.3.4. Da kann man sich sehr täuschen
Ein Stein wird genau senkrecht hochgeworfen. Trifft er genau an der gleichen Stelle wieder auf? Man läßt einen Stein von einem Turm fallen. Kommt er genau senkrecht unter der Abwurfstelle an? (Beide Male Windstille.)

● 1.4.1. Brunnentiefe
Sie lassen einen Stein in einen Brunnen fallen und hören es nach der Zeit t platschen. Wie tief ist der Brunnen?

● 1.4.2. Tachoregel
Was halten Sie von der Kraftfahrregel: Um den Bremsweg (in m) zu erhalten, teile man die Geschwindigkeit (in km/h) durch 10 und quadriere? Welcher Bremsverzögerung entspricht das (Vergleich mit der TÜV-Forderung von $6\,\mathrm{m/s^2}$)? Welchen Winkel gegen die Vertikale muß ein stehender Fahrgast in einem gebremsten Fahrzeug einnehmen, wenn er ohne Halt nicht umfallen will? Wie lauten die Werte von Beschleunigung und Einstellwinkel für einen PKW, der in 12 s auf 100 km/h beschleunigt?

● 1.4.3. Sicherheitsabstand
Welchen Sicherheitsabstand sollte man bei gegebener Geschwindigkeit halten, wenn man (a) die eigenen Bremsen für mindestens so gut hält wie die des Vordermannes und die eigene Reaktionszeit mit t veranschlagt (speziell etwa $t = 0{,}3$; 1,0; 2,0 s), (b) damit rechnen muß, daß die Bremsverzögerung des Vordermannes doppelt so groß ist wie die eigene (er hat z. B. bessere Bremsen, Sie bremsen nur entsprechend Aufgabe 1.4.2)? Was sagen Sie zu der Faustregel: In der Stadt fahre man halben, im Freien vollen Tachometerabstand (Tachometerabstand: so viele m, wie der Tacho km/h zeigt)?

● 1.4.4. Hier irrte Jules Verne
Jules Vernes Mondschuß: Eine Granate, als Passagierkabine eingerichtet, wird aus einem tiefen Felsschacht als Kanonenrohr abgeschossen und soll so auf die „parabolische Geschwindigkeit“ von 11,2 km/s gebracht werden, die ein Objekt (ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes) zum Entweichen von der Erde braucht. Diskutieren Sie die Möglichkeit des Projektes. Denken Sie daran, daß ein Mensch unter günstigsten Bedingungen (welche sind das?) 1 s lang $30g$, 5 s lang $15g$, 60 s lang $8g$, 200 s lang $6g$ aushält.

● 1.4.5. Wurfweite
Wie groß sind die fehlenden Werte (Anfangsgeschwindigkeit v_0, Wurfweite w, Scheitelhöhe h) bei folgenden Problemen (Voraussetzung: kein Luftwiderstand, Wurfwinkel so, daß w maximal): Weitsprung (Absprung als reine Umlenkung auffassen!); Speerwerfer wirft 90 m. Wie schnell bewegt er die Wurfhand relativ zum Körper? Ferngeschütz schießt 100 km weit (warum so großes Kaliber?); Rakete fliegt 280 km weit. Satelliten-Rakete (letzte Stufe): $v_0 = 8\,\mathrm{km/s}$. Sind die Formeln des schiefen Wurfs in allen Fällen anwendbar?

●●● 1.4.6. Kugelstoß
Sollte ein Kugelstoßer auch unter 45° abstoßen wie ein Ballwerfer?

●● 1.4.7. Drehscheibe
Auf einer mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Scheibe vom Radius r ist längs eines Durchmessers ein Gleis montiert. Jemand schiebt einen Wagen der Masse m von außen bis ins Zentrum. Welche Arbeit leistet er dabei mindestens? Wie groß ist der Unterschied an potentieller Energie des Wagens zwischen Umfang und Zentrum? Wie schnell würde ein nahe dem Zentrum losgelassener Wagen am Umfang ankommen? Ist seine Bewegung gleichmäßig beschleunigt? (Reibung überall vernachlässigen!) Man koppelt zwei Wagen mit den Massen m_1 und m_2 durch ein Seil der Länge l zusammen. Wo müssen sie stehen, damit sie ohne Bremsvorrichtung nicht wegrollen? Ist das Gleichgewicht stabil?

●● 1.4.8. Kurvenfahrt
Kommt man auf der Innen- oder Außenspur schneller um eine nicht überhöhte Kurve, falls man nicht „schneiden“ kann oder darf, also seine Spur beibehält und so schnell fährt, daß man gerade nicht seitlich wegrutscht?

● 1.4.9. Überhöhung
Wie groß ist die richtige Überhöhung einer Kurve vom Krümmungsradius r, die mit der Geschwindigkeit v durchfahren werden soll? Sollte man die Kurve nach dem Prinzip bauen: gerades Stück – Kreisbogen – gerades Stück?