

# Vorwort

*You can't learn anything without teaching.*  
*J. A. Wheeler*

Dieses Lehrbuch ist – wie viele andere auch – aus Vorlesungen entstanden. An der Technischen Hochschule Aachen habe ich die Kursvorlesung Elementarteilchenphysik I/II sehr oft gehalten. Naturgemäß wuchs der Umfang des sich daraus entwickelnden Lehrbuchs weit über den Rahmen der Vorlesung hinaus, obwohl die grundsätzliche Struktur übernommen wurde.

Ein Vorläufer dieses Buches ist mein 1992 erschienenes Lehrbuch „Teilchenphysik“, welches eine überraschend freundliche Aufnahme gefunden hat. Allerdings wurde immer wieder das Fehlen eines Abschnitts über Teilchenbeschleuniger und Detektoren bedauert. Eine Behandlung dieser Themen war daher für eine eventuelle Neuauflage vorgesehen. In der Zwischenzeit hat sich aber unser Gebiet so stürmisch entwickelt, daß bei einer Berücksichtigung der neuen Ergebnisse der Umfang von etwa 270 Seiten auf über 450 Seiten anstieg. Daraus ist dann ein neuer Text entstanden.

Die Hörer der Vorlesung sind Studenten im 6. und 7. Semester. Ich versuche daher, ein konsistentes Bild der modernen Teilchenphysik auf der Grundlage einer soliden Kenntnis der nichtrelativistischen Quantenmechanik sowie der Atom- und Kernphysik zu vermitteln. Alle anderen benötigten Hilfsmittel, wie z.B. Dirac-Gleichung und Feynman-Graphen, werden im Buch bereitgestellt. Insbesondere die Behandlung der Feynman-Graphen ist hierin beispielhaft für eine moderne Form des Lernens. Es ist manchmal unumgänglich, zunächst die Anwendung von intuitiv ansprechenden Regeln zu üben und erst in einem späteren Teil des Studiums deren exakte Begründung zu erlernen. Jeder wendet heute Computer zur Lösung numerischer oder algebraischer Probleme an, ohne etwas über Turing-Maschinen oder Digitalelektronik usw. zu wissen.

Die Experimente der Teilchenphysik werden zur Zeit immer mit den Vorhersagen des sog. Standard-Modells verglichen. In diesem Sinne ist auch das vorliegende Buch eine Abhandlung über das Standard-Modell. Da Physik keine historische Wissenschaft ist, folge ich in der Entwicklung des Modells nicht dem historischen Weg. Es erschien mir richtiger, gleich zu Beginn die qualitativen Grundlagen zu beschreiben und die ausführliche Behandlung den späteren Abschnitten zu überlassen. Es ist ganz im Sinne dieses unhistorischen Ansatzes, daß z.B. die Gruppe  $SU_3$  nicht an Hand der Quark-Arten sondern über ihre Farben eingeführt wird.

Die Entwicklung des Standard-Modells ist untrennbar mit dem überwältigenden Erfolg der Eichtheorien verbunden, wozu es einige ausgezeichnete Bücher gibt. Ich habe daher im vorliegenden Buch auf eine Darstellung der theoretischen Grundlagen verzichtet. Hinzu kommt, daß einige der in diesem formalen Rahmen erzielten Resultate auch an Hand der weit anschaulicheren Diskussion des Verhaltens von Wirkungsquerschnitten bei hohen Energien gewonnen werden können.

Die Erfolge des Standard-Modells beim Berechnen der Reaktionswahrscheinlichkeiten für die verschiedensten Prozesse verstellen manchmal den Blick darauf, daß sich manche dieser Ergebnisse auch ohne ein spezifisches Modell erreichen lassen. Daher wurde im zweiten Kapitel des Buches der Betrachtung der Symmetrioperationen der Teilchenphysik ein breiter Raum gewidmet. Besonderer Wert wurde hierbei auf den Helizitätsformalismus, d.h. auf eine konsistente Beschreibung des Spins, gelegt. Dieser Formalismus ist gerade für den Experimentalphysiker von unschätzbarem Wert, wenn es z.B. darum geht, aus Winkelverteilungen der Reaktionsprodukte auf den Spin von Teilchen zu schließen. Vielleicht werden diese Kenntnisse bei der Entdeckung neuer Teilchen und der Bestimmung ihrer Quantenzahlen an zukünftigen Beschleunigern wieder besonders wichtig werden.

Der vorliegende Text ist auch aus vielen Diskussionen entstanden, die ich mit jungen Physikern im Rahmen der Anfertigung ihrer Diplom- und Doktorarbeiten führen konnte. Es wurde deshalb versucht, die meisten der Begriffe und Formeln, die in der täglichen Arbeit benötigt werden, zu diskutieren. In einem einführenden Buch ist dies natürlich nur in einem beschränkten Umfang möglich. Nichtsdestoweniger habe ich das Buch in diesem Sinne auch für mich selbst geschrieben.

Das Studium der Physik ist sicher schwierig. Es ist ganz natürlich, daß ein Student den Text nicht einfach lesen kann, sondern sich den Inhalt mit Papier und Bleistift in der Hand erarbeiten muß. Um dem Anfänger zu helfen, beziehen sich die Literaturangaben in den meisten Fällen nicht auf die Originalarbeiten, sondern auf weiterführende Lehrbücher. Inzwischen erlaubt das Internet einen engen Kontakt zwischen Leser und Autor. Auf der *web page* des Buches (<http://mozart.physik.rwth-aachen.de/elmt.html>) sind zusätzliche Angaben zu den Lösungen der Übungsaufgaben zu finden. Hier sollen aber auch eventuelle Fehler oder Unklarheiten korrigiert werden. Damit dies möglich ist, brauche ich Ihre Mitarbeit.

Aachen, im Juli 2001

*Christoph Berger*

# Elektronen und Quarks

## Einführung

Dieses Kapitel behandelt elektromagnetische Reaktionen von Elektronen und Hadronen, also die Prozesse, die durch den Austausch von Photonen beschrieben werden können. Das ist v.a. die Elektron-Positron-Paarvernichtung in Hadronen bei Schwerpunktsenergien weit unterhalb der Masse des  $Z^0$ -Bosons. Genauso wichtig ist die (inelastische) Elektron-Proton-Streuung bei Werten von  $\sqrt{|q^2|}$ , die klein gegenüber der Masse der  $W$ - und  $Z$ -Bosonen sind. Im Quarkmodell werden diese Reaktionen als elektromagnetische Streuprozesse zwischen Elektronen und Quarks interpretiert. Sobald Quarks im Spiel sind, kann die elektromagnetische Wechselwirkung nicht mehr ohne Beachtung der Quantenchromodynamik behandelt werden. Die QCD kommt auf zwei Weisen ins Spiel: erstens über störungstheoretisch erfaßbare Korrekturen der elektromagnetischen Querschnitte, zweitens über die Beschreibung der Hadronisierung der Quarks und Gluonen; letztere ist störungstheoretisch nicht berechenbar.

## Inhalt

5.1 Elektron-Positron-Annihilation in Hadronen . . . . .	297
5.2 Die elastische Elektron-Nukleon-Streuung . . .	309
5.3 Inelastische Elektron-Nukleon-Streuung . . .	316
5.4 Zwei-Photonen-Physik . . . . .	336

## 5.1 Elektron-Positron-Annihilation in Hadronen

### 5.1.1 Der Wirkungsquerschnitt

Falls freie Quarks beobachtet werden könnten, wäre die Reaktion

$$e^- + e^+ \rightarrow q + \bar{q} \quad (5.1)$$

nur eine fast triviale Variante der in Abschn. 3.2.1 behandelten Myon-Paarzeugung in Elektron-Positron-Stößen mit einem totalen Wirkungsquerschnitt

$$\sigma = \sum_f Q_f^2 \frac{4\pi\alpha^2}{s} . \quad (5.2)$$

Die Summe läuft hier über alle Quarksorten  $f$ , die bei einer Schwerpunktsenergie von  $\sqrt{s} = 2E$  erzeugt werden können. Die Summation über die drei Farbfreiheitsgrade ergibt einen Faktor drei, der in (5.2) schon enthalten ist.

Die Reaktion (5.1) kann nicht direkt beobachtet werden, da es keine freien Quarks gibt. Die Erzeugung von Hadronen in Elektron-Positron-Stößen, also die Reaktion  $e^- e^+ \rightarrow X$ , wobei  $X$  ein beliebiger hadronischer Endzustand ist, kann jedoch im Quarkmodell als ein Zwei-Stufen-Prozeß interpretiert werden. In der ersten Stufe werden Quark-Antiquark-Paare erzeugt, die anschließend hadronisieren. Man könnte nun zunächst vermuten, daß die durch den Einschluß der Quarks erzwungene Hadronisierung die Amplitude auf eine solche Weise verändert, daß jede Ähnlichkeit mit dem Wirkungsquerschnitt (5.2) verlorengeht. Das ist aber nicht so, da Paarzeugung und Hadronisierung bei zwei ganz verschiedenen Abstandsskalen  $d$  stattfinden.

Um dieses Argument in voller Schärfe zu sehen, nehmen wir als Beispiel eine Strahlenergie  $E$  von 5 GeV an. Das bei der Annihilation von Elektron und Positron entstehende Photon hat den Spin 1. Wenn er durch den relativen Bahndrehimpuls von Quark und Antiquark aufgebaut werden soll, gilt  $Ed \approx 1$ , so daß die Paarerzeugung bei einem Abstand von  $d \approx 1/25$  fm passiert.<sup>1</sup> Bei einem solchen Abstand sind die Quarks praktisch frei und können gemäß der Kinematik freier Teilchen auseinanderlaufen. Das Einschluß-Potential der QCD verhindert die Separation der Quarks auf Abstände, die wesentlich größer als 1 fm sind. Im Prinzip müßte jetzt der Querschnitt (5.2) mit der Wahrscheinlichkeit  $W_f$  multipliziert werden, einen bestimmten hadronischen Endzustand zu erreichen. Wenn man aber nicht einen speziellen hadronischen Endzustand betrachtet, sondern über alle möglichen Konfigurationen summiert, gilt natürlich  $\sum W_f = 1$ , so daß (5.2) die theoretische Vorhersage des Quarkmodells für die Hadronerzeugung in der Elektron-Positron-Vernichtung ist. Mit diesem Trick werden die Probleme der Hadronisierung sehr elegant ausgeschaltet.

Die Skala der Hadronerzeugung ist also durch den Wirkungsquerschnitt zur Erzeugung von  $\mu^- \mu^+$ -Paaren definiert. Man gibt daher i.allg. als Vorhersage des Quarkmodells das Verhältnis

$$R = \frac{\sigma(e^- e^+ \rightarrow \text{Hadronen})}{\sigma(e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+)} = 3 \sum_f Q_f^2 \quad (5.3)$$

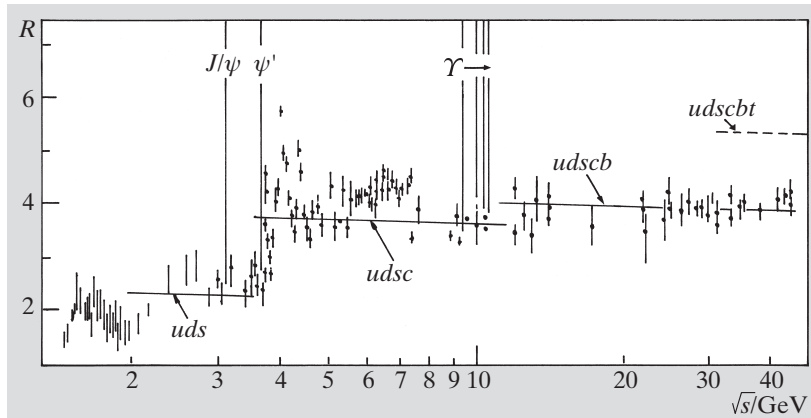
an. Das ist eine sehr bemerkenswerte Voraussage, bedeutet sie doch, daß dieses Verhältnis in Stufen anwächst, z.B.  $\Delta R = 4/3$  beim Überschreiten der *charm*-Schwelle.

Die Abb. 5.1 zeigt die gute Übereinstimmung des Experiments mit der Theorie über einen sehr weiten Bereich der Schwerpunktsenergie  $\sqrt{s}$ . Das Erstaunliche ist, daß schon bei sehr niedrigen Energien oberhalb der Schwelle für die Erzeugung von  $\rho$ ,  $\omega$ ,  $\Phi$ -Mesonen die Hadronproduktion durch das Quarkmodell weitgehend richtig wiedergegeben wird. Andererseits darf nicht übersehen werden, daß im Bereich von  $5 \text{ GeV} < \sqrt{s} < 8 \text{ GeV}$  die Daten deutlich oberhalb der theoretischen Vorhersage liegen. Eine Nachmessung wäre hier sehr wünschenswert.

Die Formel (5.3) beschreibt die Hadronproduktion über den Mechanismus der Erzeugung schneller Quarks mit anschließender Hadronisierung. Beim Überschreiten einer neuen Schwelle ist die Relativbewegung der neuen Quarks zunächst so langsam, daß gebundene Zustände, die Vektormesonen, erzeugt werden können. Diese Reaktionen wurden schon in Abschn. 4.6.1 behandelt. Der Bereich zwischen den Vektormesonen wird häufig als *Kontinuum* bezeichnet. Es gibt demnach zwei Möglichkeiten, eine weitere Sorte Quarks zu finden: Beobachtung eines neuartigen Vektormesons oder eine Stufe von  $R$  im Kontinuum.

Eine Schwelle in  $R$  muß allerdings nicht unbedingt von einer neuen Quarksorte herrühren. Auch andere neue Teilchen, die in Hadronen übergehen, erhöhen dieses Verhältnis. Die  $\tau$ -Leptonen z.B. zerfallen zu ca. 70% in Hadronen und tragen daher mit  $\Delta R \approx 0,9$  zur Hadronerzeugung in Elektron-Positron-Stößen oberhalb einer Schwerpunktsenergie von etwa 4 GeV bei.

<sup>1</sup>Diese halbklassische Abschätzung wurde schon in den Übungen zu Abschn. 1.1 benutzt. Sie vernachlässigt den Spin der Quarks.

**Abb. 5.1**

Die inklusive Hadronerzeugung in der  $e^-e^+$ -Annihilation. Die Meßwerte stammen von 14 verschiedenen Experimenten mit Normierungsfehlern, die bis zu 20% betragen können. Die fast waagerechten Linien sind die Vorhersagen gemäß (5.3) nach Berücksichtigung der QCD-Korrekturen aus (5.17)

Beim Erstellen der Abb. 5.1 wurden aber Ereignisse mit Hadronen aus  $\tau$ -Zerfällen in der Bestimmung der Raten nicht berücksichtigt. Sie zeigt daher nur die Produktion von Hadronen über Quarks, ist also sozusagen „theoretisch vorbelastet“. Man sieht daran vielleicht am deutlichsten, wie sehr wir inzwischen von der Richtigkeit des Modells überzeugt sind.

### Schlüsselexperiment

Das  $\tau$ -Lepton wurde 1975 mit dem gleichen Detektor entdeckt, mit dem schon die  $\psi$ -Resonanzen in der  $e^-e^+$ -Vernichtung gefunden wurden [Per75]. Das Vorgehen der Experimentatoren kann als Musterbeispiel für viele ähnliche, spätere Experimente auf der Suche nach neuen Teilchen gelten. Die Aufgabe war besonders schwierig, da im Bereich einer Schwerpunktsenergie von 4 GeV auch die Paarerzeugung von  $c$ -Quarks möglich ist. Die Autoren wählten zunächst Ereignisse mit genau zwei entgegengesetzt geladenen Spuren in einem ansonsten leeren Detektor aus. Sie benutzten dann zu ihrer Suche nach neuen Leptonen die Signatur

$$e^- + e^+ \rightarrow e^\pm + \mu^\mp + \text{fehlende Energie} . \quad (5.4)$$

Auf den ersten Blick verletzen solche Ereignisse die Erhaltung der Elektronen- und Myonenzahl. Der gewählten Signatur liegt jedoch die Hypothese zugrunde, daß die in der Reaktion

$$e^- + e^+ \rightarrow \tau^- + \tau^+ \quad (5.5)$$

erzeugten  $\tau$ -Paare Zerfallskanäle wie das Myon haben, also z.B.  $\tau^+ \rightarrow \bar{\nu}_\tau \mu^+ \nu_\mu$  oder  $\tau^- \rightarrow \nu_\tau e^- \bar{\nu}_e$ . Die auslaufenden Neutrinos sind demnach für die fehlende Energie im Detektor und für die scheinbare Verletzung der  $L_e$ - und  $L_\mu$ -Erhaltung verantwortlich. Es ist klar, daß der in einem solchen Experiment verwendete Detektor eine sehr gute Erkennung von Elektronen, Photonen und Myonen über einen großen Bereich des Raumwinkels erlauben muß. Auf diese Weise kann man dann z.B. beweisen,

daß ein Elektron nicht durch eine Myonspur vorgetäuscht wird, die zufällig mit einem durch ein Photon ausgelösten elektromagnetischen Schauer zusammenfällt. Die Autoren führten diesen Beweis, indem sie zeigten, daß der Impuls der Elektronkandidaten aus der Vermessung der Spur mit der Energie des zugehörigen kalorimetrischen Signals übereinstimmte.

Die Eigenschaften und die Rate der so ausgewählten Ereignisse konnten mit der Hypothese (5.5) erklärt werden, während keine andere Annahme auf die Daten paßte. Eine typische Quelle von Untergrund, die studiert werden muß, sind z.B. Zwei-Photonen-Reaktionen  $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+\mu^-\mu^+$ , bei denen jeweils ein Elektron und ein Myon, den Detektor entlang der Strahlröhre verlassen.

Martin L. Perl, der Leiter dieser Analyse, erhielt 1995 den Nobelpreis für Physik. Zusammen mit ihm wurde Frederick Reines für die Entdeckung des Elektron-Neutrinos (Beschreibung auf S. 24f.) geehrt.

### 5.1.2 QCD-Korrekturen

Sobald Quarks im Spiel sind, macht es keinen Sinn, die elektromagnetische Wechselwirkung von der starken Wechselwirkung getrennt zu behandeln. In niedrigster Ordnung der Störungstheorie z.B. kann die elektromagnetische Paarerzeugung von Quarks (Abb. 5.2a) durch die Abstrahlung eines zusätzlichen Gluons modifiziert werden (Abb. 5.2b,c). Die Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts für die Reaktion

$$e^- + e^+ \rightarrow q + \bar{q} + g \quad (5.6)$$

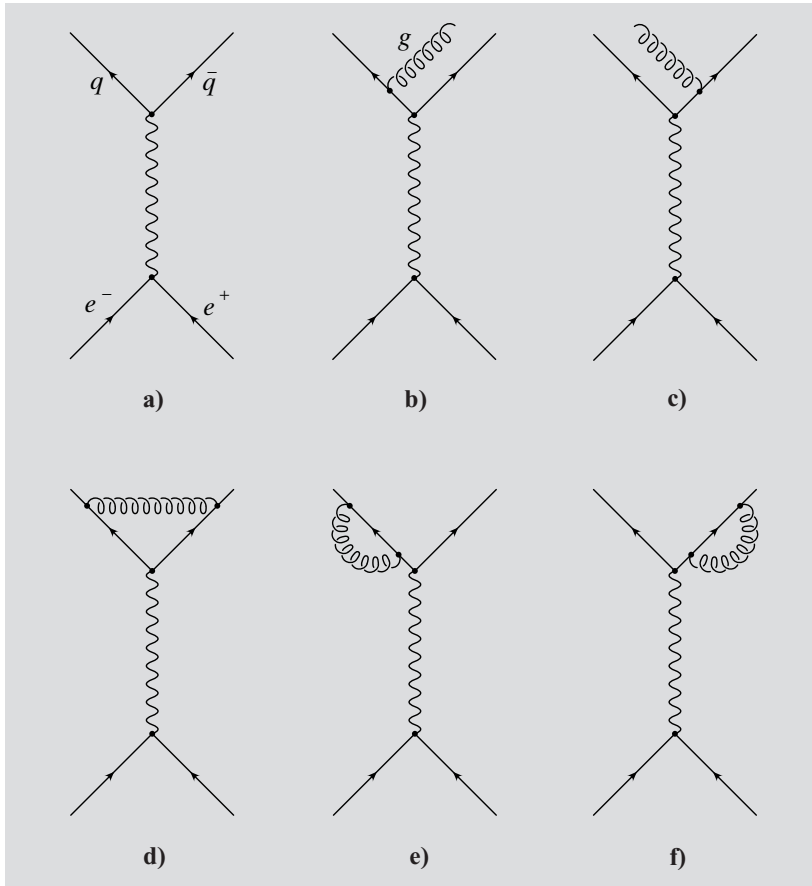
soll jetzt besprochen werden. Ein wichtiges Problem, das die Autoren der ersten Rechnung [Ruj78] lösen mußten, war die Bestimmung des Phasenraumintegrals für den Drei-Körper-Endzustand dieser Reaktion, das im allgemeinsten Fall noch von fünf Variablen abhängt (Abschn. 2.1.2). Wir werden dies hier nicht nachvollziehen, sondern den teilweise integrierten Wirkungsquerschnitt auf eine einfachere Art finden.

Dazu interpretieren wir die Annihilationsreaktion  $e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}g$  als Erzeugung und Zerfall eines virtuellen Photons der Masse  $\sqrt{s}$ . Der Wirkungsquerschnitt läßt sich in der Gestalt der Breit-Wigner-Formel (2.261) anschreiben, wobei im kinematischen Vorfaktor  $M_R^2 = s$  gesetzt wird. Die relativistische Breit-Wigner-Funktion  $f_{\text{BW}}^r$  kann als das Betragsquadrat des Propagators eines instabilen Teilchens aufgefaßt werden. Wir ersetzen sie daher durch das Betragsquadrat  $1/s^2$  des Photonpropagators und bekommen

$$\sigma = \frac{12\pi\Gamma_{ee}\Gamma_f}{s^2}. \quad (5.7)$$

In diesem Formalismus wird die Annihilation  $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$  durch  $\sigma = 12\pi\Gamma_{ee}^2/s^2$  beschrieben, da Myonen und Elektronen mit der gleichen Stärke an Photonen koppeln. Der Vergleich mit (5.2) liefert dann das Resultat

$$\Gamma_{ee} = \frac{\alpha\sqrt{s}}{3}. \quad (5.8)$$



**Abb. 5.2a–f**  
Feynman-Diagramme der Elektron-Positron-Annihilation bis zur Ordnung  $\alpha_S$  der QCD. (a) Bornsche Näherung, (b), (c) reelle QCD-Korrekturen, (d)–(f) virtuelle QCD-Korrekturen

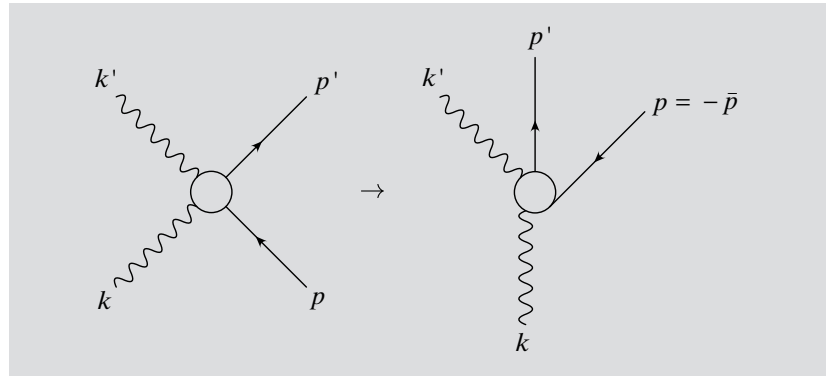
Die Behandlung des Drei-Körper-Zerfalls eines Teilchens in Abschn. 2.1.2 lehrt uns, daß die Energien und relativen Winkel der drei Teilchen im Endzustand vollständig durch die Angabe von zwei Energien definiert sind. Es ist praktisch, dimensionslose Variablen zu wählen, z.B.  $x_1 = E_q/E$  und  $x_2 = E_{\bar{q}}/E$ . Um den differentiellen Querschnitt

$$\frac{d^2\sigma}{dx_1 dx_2}(e^- e^+ \rightarrow q\bar{q}g) = \frac{4\pi\alpha}{s\sqrt{s}} \frac{d^2\Gamma_f}{dx_1 dx_2} \quad (5.9)$$

zu erhalten, müssen wir die differentielle Zerfallsbreite  $d\Gamma_f/dx_1 dx_2$  eines virtuellen Photons in ein Quark-Antiquark-Paar und ein Gluon berechnen. Dieser Zerfall ist mit dem virtuellen Compton-Effekt (siehe Kasten auf S. 214f.) durch eine *crossing*-Relation verwandt, die in Abb. 5.3 erläutert wird. Die Summe der Amplitudenquadrate für den Zerfall des virtuellen Photons kann also sehr schnell aus (3.234) gewonnen werden. Die Mandelstam-Variablen  $s, t, u$  werden zunächst mit einem Dachsymbol versehen, da es sich um die Berechnung eines Subprozesses handelt. Wie bei der Comptonstreuung gilt  $\hat{u} = (k - p')^2$  und  $\hat{t} = (k - k')^2$ . Entsprechend der Vorschrift der Abb. 5.3 wird aber  $\hat{s}$  durch  $\hat{s}_2 = (k - \bar{p})^2$  ersetzt. Außerdem muß beachtet werden, daß die Überkreuzung

**Abb. 5.3**

Der Zusammenhang zwischen dem virtuellen Compton-Effekt und dem Zerfall eines virtuellen Photons durch Kreuzen einer Fermionlinie. Die Symbole bezeichnen die Viererimpulse der Teilchen



einer Fermionlinie ein globales Minuszeichen beisteuert. Die Ersetzung der Elektronen und Photonen im Endzustand durch Quarks der Sorte  $f$  und Gluonen läßt sich durch die Substitution  $e^4 \rightarrow e^2 Q_f^2 g^2 c_F$  bewerkstelligen. Zusammengefaßt erhalten wir also

$$\sum |T_{fi}|^2 = 8e^2 Q_f^2 g^2 c_F \left( \frac{\hat{u}}{\hat{s}_2} + \frac{\hat{s}_2}{\hat{u}} + \frac{2k^2 \hat{t}}{\hat{s}_2 \hat{u}} \right) . \quad (5.10)$$

Den Ausdruck in der Klammer werten wir im  $e^-e^+$ -Schwerpunktsystem aus. Dort gilt  $k^\mu = (2E, 0, 0, 0)$  und daher  $\hat{u} = k^2(1-x_1)$  bzw.  $\hat{s}_2 = k^2(1-x_2)$ . Mit  $\hat{t} = k^2 - \hat{u} - \hat{s}_2$  und  $k^2 = 4E^2$  kann der Klammersausdruck als eine Funktion von  $x_1$  und  $x_2$  angegeben werden, welche die übersichtliche Form

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-x_1)(1-x_2)} \quad (5.11)$$

annimmt.

Mit den Methoden der Berechnung des Farbfaktors haben wir uns schon in Abschn. 4.2.1 befaßt. Ihre Anwendung ergibt im Fall der Abstrahlung eines Gluons von einem Quark einer bestimmten Farbe einen Faktor  $4/3$ , der Beweis wird als Übungsaufgabe gestellt. Nach Summation über die drei Farben folgt demnach  $c_F = 4$ .

Zur Mittelung über die Spins des zerfallenden virtuellen Photons wird die Summe der quadrierten Amplituden durch drei geteilt. Die Anwendung von (2.49) führt dann zum Resultat

$$\frac{d^2 \Gamma_f}{dx_1 dx_2} = \frac{2}{3\pi} \sqrt{s} \alpha \alpha_S Q_f^2 f(x_1, x_2) , \quad (5.12)$$

das in (5.9) eingesetzt werden muß. Wenn wir jetzt über alle Quarksorten summieren und die Abkürzung

$$\sigma_0 = \sum_f Q_f^2 \frac{4\pi\alpha^2}{s} \quad (5.13)$$

benutzen, erhalten wir das Endergebnis

$$\frac{d^2 \sigma}{dx_1 dx_2} = \sigma_0 \frac{2\alpha_S}{3\pi} f(x_1, x_2) . \quad (5.14)$$



Diese berühmte Formel [Ruj78] beschreibt demnach die Abstrahlung von Gluonen als Produkt des Querschnitts (5.2) der Elektron-Positron-Paarvernichtung in  $q\bar{q}$ -Paare mit einem Faktor, der die Kopplung  $\alpha_S$  und die Verteilungsfunktion der Energien enthält. Die gleiche Struktur haben wir schon bei der Behandlung der Bremsstrahlung (3.275) vorgefunden und es überrascht nicht, daß auch hier die Energie- und Winkelverteilung der Gluonen sehr ähnlich zu den Verteilungen der Photonen bei der Bremsstrahlung sind. Die meisten Gluonen haben eine kleine Energie und einen kleinen Winkel relativ zum Quark, von dem sie abgestrahlt werden. Sie machen sich daher nur in einer Modifikation des totalen Querschnitts (5.2) bemerkbar. Um diese Modifikation in der Ordnung  $\alpha_S$  zu bekommen, müssen wir (5.14) über  $x_1, x_2$  in den Grenzen von 0 bis 1 integrieren und sind wieder mit dem Divergenzproblem konfrontiert.

Die Struktur der Divergenz ist hier noch komplizierter als bei der Bremsstrahlung. Auch hier finden wir die Infrarot-Divergenz, da mit der Definition  $x_3 = E_g/E$  der Energiesatz die Form

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2 \quad (5.15)$$

annimmt und daher ein verschwindender Wert von  $x_3$  gleichzeitig  $x_1 \rightarrow 1$  und  $x_2 \rightarrow 1$  erzwingt. Zusätzlich haben wir aber noch die separaten kollinearen Divergenzen  $x_1 \rightarrow 1$  bzw.  $x_2 \rightarrow 1$ , die auftreten, wenn das Gluon parallel zum Quark oder Antiquark abgestrahlt wird. In der Bremsstrahlung tauchen diese Divergenzen bei Berücksichtigung der Masse der Elektronen nicht auf.

Auch jetzt lassen sich die Divergenzen durch Hinzunahme der virtuellen Korrekturen der Abb. 5.2 beheben. Genau wie bei der Behandlung der Bremsstrahlung muß man die Werte aus Abb. 5.2b,c quadrieren und die Interferenz von a) mit d) bis f) der Abb. 5.2 berechnen. In einer durchsichtigen Schreibweise läßt sich diese Vorgehensweise in die Form

$$\sigma \sim |A|^2 + |B + C|^2 + 2 \operatorname{Re}[A^*(D + E + F)] \quad (5.16)$$

bringen. Das Ergebnis dieser Rechnung lautet

$$\sigma(e^- e^+ \rightarrow \text{Hadronen}) = \sigma_0 \left[ 1 + \frac{\alpha_S(s)}{\pi} \right], \quad (5.17)$$

wobei im Sinne der verbesserten Bornschen Näherung die laufende Kopplungskonstante  $\alpha_S(q^2)$  mit  $q^2 = s$  eingesetzt wurde. Bei  $s = 1000 \text{ GeV}^2$  gilt aber  $\alpha_S \approx 0,16$ , die Korrektur aufgrund der starken Wechselwirkung beträgt daher etwa fünf Prozent. Die Genauigkeit moderner Annihilationsexperimente reicht aus, den Einfluß dieser Korrektur zu sehen. Dies ist in Abb. 5.1 angedeutet, in der die zu hohen Energien abnehmende Kurve mit Hilfe der Formel (5.17) gewonnen wurde. Die inklusive Hadronerzeugung in der Elektron-Positron-Paarvernichtung gilt trotz des numerisch kleinen Effektes als attraktiver Weg zur Bestimmung der Kopplungskonstanten  $\alpha_S$ , da es hier keine theoretischen Unsicherheiten infolge von Hadronisierungskorrekturen gibt. Nicht zuletzt aus diesem Grunde wurden die störungstheoretischen Rechnungen zu höheren Ordnungen hin erweitert. Heute ist die Reihe bis zur

Ordnung  $\alpha_S^3$  bekannt. Bei Berücksichtigung von fünf Quarksorten lautet das Ergebnis

$$\sigma(e^-e^+ \rightarrow \text{Hadronen}) = \sigma_0 \left[ 1 + \frac{\alpha_S}{\pi} + 1,409 \left( \frac{\alpha_S}{\pi} \right)^2 - 12,805 \left( \frac{\alpha_S}{\pi} \right)^3 \right], \quad (5.18)$$

eine wirklich bewundernswerte Leistung [Sur91] der theoretischen Physiker, wenn man die große Zahl der beitragenden Diagramme bedenkt.

### 5.1.3 Der Endzustand

Den Übergang von Quarks (und Gluonen) zu Hadronen im Kontinuumsbereich bezeichnen wir häufig als Fragmentierung. Diese Fragmentierung ist störungstheoretisch nicht berechenbar, da sie bei großen Abständen stattfindet. Der Endzustand der Reaktion (5.1) besteht aber trotzdem nicht in einer statistischen Gleichverteilung von Hadronen über den Raumwinkel, sondern zeigt ganz handgreiflich die  $q\bar{q}$ -Natur der Ereignisse. Die Hadronen sind nämlich in sog. *Jets* gebündelt, deren Gesamtenergie durch die Energie  $E_q$  des Quarks, aus dem sie hervorgehen, festgelegt wird. Jets zeichnen sich dadurch aus, daß in ihnen alle Hadronen bezüglich der Jetachse einen relativ kleinen Transversalimpuls von  $p_T \approx 300$  MeV haben. Die Longitudinalimpulse  $p_L$  skalieren bis auf logarithmische Korrekturen mit der Energie  $E_q$  der Jets, werden also durch eine Verteilungsfunktion  $D^h(z)$  beschrieben, die nur von der dimensionslosen Variablen

$$z = \frac{p_L}{E_q} \quad (5.19)$$

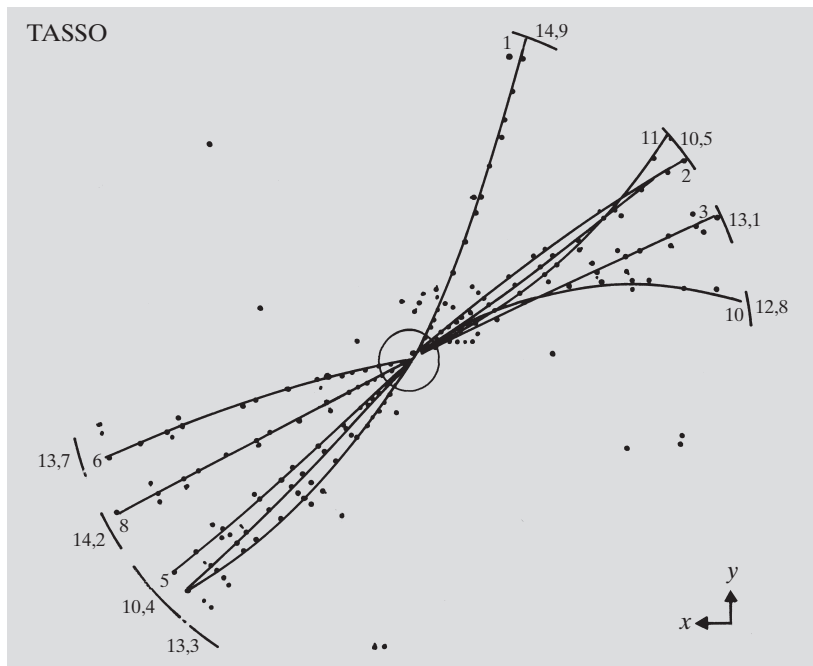
abhängt. Die logarithmischen Korrekturen am Skalenverhalten der Longitudinalimpulse sind so zu verstehen, daß ein kleiner Teil der zur Verfügung stehenden Energie zur Produktion neuer Teilchen verbraucht wird, die Teilchenmultiplizität steigt logarithmisch mit der Energie an. Eine unmittelbare Konsequenz des Skalenverhaltens besteht darin, daß die Öffnungswinkel der Jets, die natürlich proportional zu  $p_T/p_L$  sind, bei höheren Energien wie  $1/E$  schrumpfen.

Die Reaktion (5.1) sollte infolge dieser qualitativen Überlegungen zu sog. Zwei-Jet-Ereignissen führen, bei denen  $E_q$  mit der Strahlenergie  $E$  identisch wird und die Jetachse der Richtung der Quarks entspricht. Ein Beispiel eines solchen Zwei-Jet-Ereignisses in der  $e^-e^+$ -Annihilation zeigt Abb. 5.4. Aufgetragen sind die Spuren der Teilchen in einer Ansicht senkrecht zur Achse der einfallenden Elektronen bzw. Positronen.

Experimentell läßt sich die Jetachse für Ereignisse der Reaktion (5.1) mit Hilfe der *thrust*-Variablen  $T$  finden,

$$T = \max_{\mathbf{n}} \frac{\sum_i |\mathbf{p}_i \mathbf{n}|}{\sum_i |\mathbf{p}_i|}. \quad (5.20)$$

Summiert wird über alle Hadronen eines Ereignisses. Man sucht hiermit also eine Richtung  $\mathbf{n}$ , bezüglich der die Summe der Longitudinalimpulse der Hadronen maximal wird. Wenn die Gleichsetzung der Jets mit den Quarks richtig ist, muß die Winkelverteilung der  $T$ -Achse in der Annihilation dem Gesetz



**Abb. 5.4** Ein Zwei-Jet-Ereignis der  $e^-e^+$ -Vernichtung im TASSO-Detektor am Speicherring PETRA des DESY. Gezeigt ist die Projektion der Spuren auf eine Ebene, die senkrecht zu den einfallenden Strahlen durch den Wechselwirkungspunkt geht

(3.147) folgen. Dies wurde in der Tat gefunden und bedeutete eine wesentliche Unterstützung für die Beschreibung der Elektron-Positron-Annihilation in Hadronen durch das Quarkmodell.

Die *thrust*-Variable  $T$  ist auch sehr gut zur Charakterisierung der Ereignistopologie geeignet. Ihr Wert beträgt naturgemäß 1 für Ereignisse mit zwei unendlich gut kollimierten Jets und 0,5, falls die auslaufenden Hadronen eine isotrope Winkelverteilung haben. Es ist nun besonders reizvoll, die Mittelwerte  $\langle T \rangle$  aus vielen vermessenen hadronischen Reaktionen im Detektor mit den theoretischen Vorhersagen auf dem sog. *Parton*-Niveau zu vergleichen, wobei nun die Summation in (5.20) über die Quarks und Gluonen des Endzustandes läuft.<sup>2</sup> Bei der Betrachtung der Partonen gilt  $\langle T \rangle = 1$  im Grenzfall reiner  $q\bar{q}$  Ereignisse, während durch die Abstrahlung von Gluonen  $\langle T \rangle < 1$  wird.

Die Observable  $T$  hängt im Zähler und im Nenner nur linear von den Impulsen der betrachteten Teilchen ab. Sie gehört zu den theoretisch besonders interessanten Variablen, die als „infrarot und kollinear“ stabil gelten, da sich ihr Wert bei Abstrahlung eines weichen oder kollinearen Gluons von einem Quark nicht ändert. Sie ist daher unempfindlich gegen die unvermeidlich auftretenden Divergenzen in den störungstheoretischen Rechnungen.

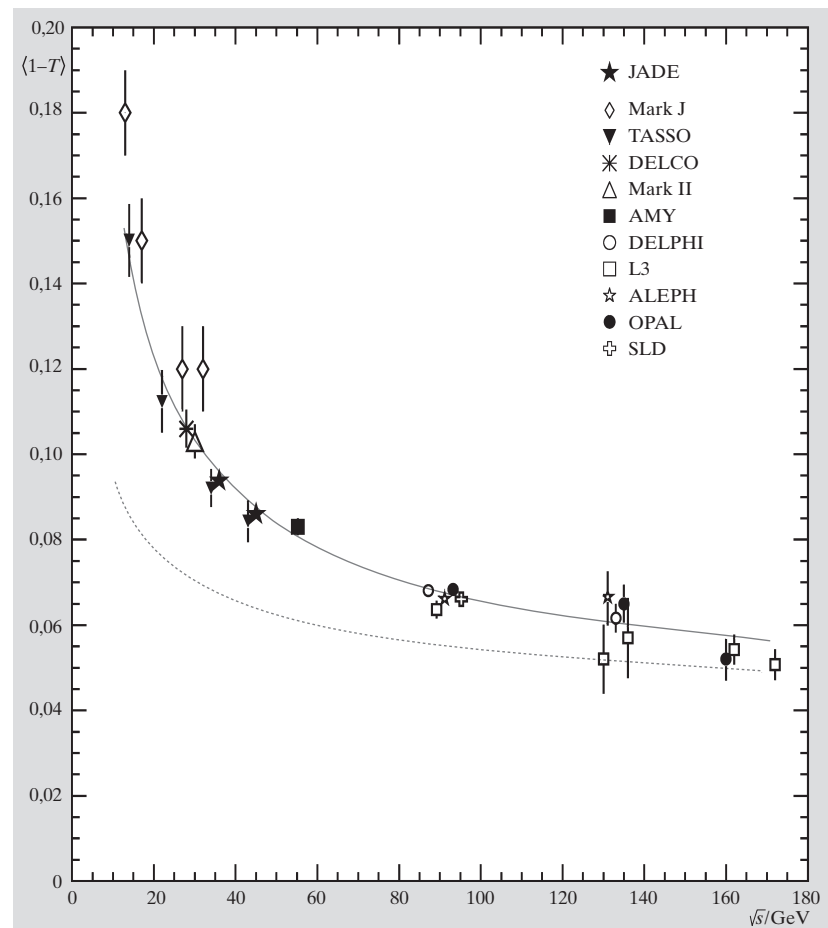
In führender Ordnung der QCD kann  $\langle T \rangle$  mit Hilfe von (5.14) berechnet werden [Ruj78], das Ergebnis lautet

$$\langle 1 - T \rangle = 0,335\alpha_S \quad (5.21)$$

<sup>2</sup>Das Wort *Parton* wird oft als Sammelbegriff für Quarks und Gluonen verwendet.

Wenn für  $\alpha_s$  jetzt wieder die laufende Kopplungskonstante eingesetzt wird, stellt (5.21) eine relativ einfach zu überprüfende Vorhersage der QCD dar, mit der v.a. das Konzept der asymptotischen Freiheit getestet werden kann:  $\langle 1 - T \rangle$  muß in einer wohldefinierten Weise für hohe Werte von  $s$  gegen Null streben.

Natürlich darf (5.21) nicht direkt mit dem hadronischen Wert verglichen werden. Aufgrund der Fragmentierungseffekte wird auch ein Zwei-Jet-Ereignis  $T < 1$  haben. Auf die numerischen Verfahren zur Berechnung der Hadronisierung gehen wir am Schluß dieses Abschnitts nochmal ein. Da die einzelnen Hadronen in den Jets bevorzugt die Richtung des ursprünglichen Quarks beibehalten und häufig nur kleine Bruchteile des Quarkimpulses übernehmen, erwarten wir, daß  $T$  ebenfalls relativ unempfindlich gegen Details des Fragmentierungsprozesses ist. Aufgrund sehr allgemeiner Überlegungen [Sti96] wurde gezeigt, daß die Korrekturen vom Hadron-Niveau auf das Parton-Niveau umgekehrt proportional zur Schwerpunktsenergie



**Abb. 5.5**

Der Mittelwert von  $1 - T$  in der  $e^-e^+$ -Vernichtung in Hadronen. Es sind Daten verschiedener Experimente zusammengefaßt. Die gestrichelte Kurve gibt eine perturbative QCD-Rechnung höherer Ordnung wieder, die durchgezogene Kurve berücksichtigt zusätzlich die Hadronisierungskorrekturen nach [Sti96]

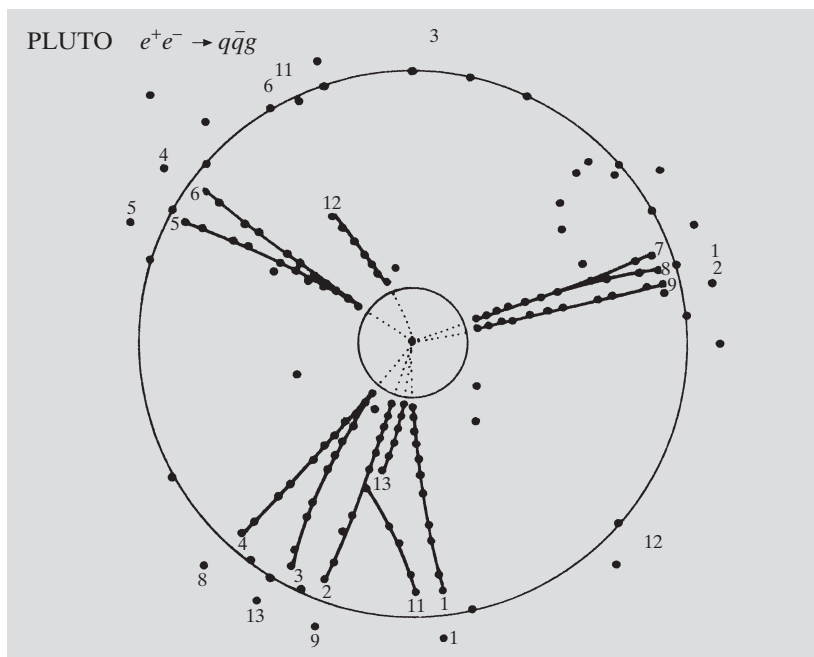
abnehmen, so daß

$$\langle 1 - T \rangle_{\text{Hadronen}} = 0,335\alpha_S + \frac{\lambda}{\sqrt{s}} \quad (5.22)$$

mit  $\lambda \approx 1 \text{ GeV}$  angesetzt werden kann.

Das Verhalten der *thrust*-Observablen und anderer sog. *event shape*-Variablen wurde ausführlich an den  $e^-e^+$ -Speicherringen untersucht. Von diesen Experimenten stammen grundlegende Tests der asymptotischen Freiheit und präzise Messungen der starken Kopplungskonstanten. Für genaue Analysen reicht (5.21) zum Vergleich mit der Theorie nicht aus, sondern es werden auch zu dieser Formel die Beiträge höherer Ordnung benötigt. Ebenso ist die Behandlung der Fragmentierungskorrekturen in keiner Weise einfach. In Abb. 5.5 ist ein neueres Ergebnis einer zusammenfassenden Studie wiedergegeben, in der der Leser die erreichte Präzision und die gute Übereinstimmung von Theorie und Experiment bewundern kann.

In einem kleinen Bruchteil aller Fälle führt die Abstrahlung von Gluonen zu spektakulären Drei-Jet-Ereignissen (Abb. 5.6). Diese wurden am Elektron-Positron-Speicherring PETRA des DESY entdeckt. Die kinematischen Eigenschaften der Drei-Jet-Ereignisse entsprechen den theoretischen Vorhersagen. Die Energien der beiden energiereichsten Jets werden mit  $E_q$  und  $E_{\bar{q}}$  identifiziert, und ihre Verteilung wird mit (5.14) verglichen. Die hierbei gefundene quantitative Übereinstimmung manifestiert eine Art objektiver Evidenz für Gluonen, die natürlich als farbige Feldquanten ebenfalls dem



**Abb. 5.6**  
Ein typisches Drei-Jet-Ereignis im PLUTO-Detektor, wie es kurz nach Beginn der Experimente am Speicherring PETRA gefunden wurde

Einschluß (*confinement*) unterliegen und daher nicht als freie Teilchen im Detektor auftreten.

Da ein Ereignis mit einem zusätzlichen weichen oder kollinearen Gluon sich nicht von einem  $q\bar{q}$ -Ereignis unterscheiden läßt, muß (wie bei der Behandlung der Bremsstrahlung auf S. 224) ein Auflösungskriterium eingeführt werden. Dieses Argument gilt auch für die Hadronen des Detektors. Die Analyse von Ereignissen mit mehr als zwei Jets macht also die Entwicklung allgemeiner Algorithmen zur Rekonstruktion der Jets aus den Impulsen der Reaktionsprodukte nötig.

Weit verbreitet ist ein Verfahren [Bar86b], welches zunächst die invarianten Massen aller Paare von Teilchen (oder Partonen) eines Ereignisses nach der Vorschrift

$$M_{kl}^2 = 2E_k E_l (1 - \cos \Theta_{kl}) \quad (5.23)$$

berechnet, in der  $\Theta_{kl}$  den Winkel zwischen den beiden Teilchen mit den Energien  $E_k$  und  $E_l$  kennzeichnet. Die Teilchen  $i$  und  $j$  mit der kleinsten Paarmasse werden durch ein Pseudoteilchen mit dem Viererimpuls  $(p_i^\mu + p_j^\mu)$  ersetzt, falls das skalierte Massenquadrat

$$y_{ij} = \frac{M_{ij}^2}{s} \quad (5.24)$$

unterhalb eines Schrittwertes  $y_{\text{cut}}$  liegt, der das Auflösungskriterium darstellt. Der Algorithmus wird nun solange wiederholt, bis alle möglichen Paare eine invariante Masse  $\geq y_{\text{cut}} s$  haben. Diese Kombinationen von Teilchen und Pseudoteilchen sind die gesuchten Jets. Mit Hilfe solcher Methoden ist die Erzeugung von drei und mehr Jets in der Elektron-Positron-Annihilation ausführlich untersucht worden.

Der Übergang von den Quarks und Gluonen zu den Hadronen (die sog. Fragmentierung) findet bei Abständen der Partonen von 1–3 fm, also bei einer Zeitskala von  $10^{-23}$  s statt. Bei diesen Abständen kann die Störungstheorie nicht mehr angewendet werden. Ein quantitatives Verständnis dieser Prozesse ist jedoch unabdingbar, da alle Untersuchungen eines bestimmten Endzustandes beim Vergleich mit der Theorie versuchen müssen, von den hadronisch ermittelten Observablen auf die partonischen Observablen zu schließen. Zum Abschluß der Diskussion des hadronischen Endzustandes in der Elektron-Positron-Paarvernichtung soll daher jetzt noch die numerische Behandlung der Fragmentierung mit Hilfe von QCD-Modellen diskutiert werden.

In Abschn. 4.2.1 haben wir den Einschluß der Quarks im Saitenmodell behandelt. Die Fragmentierung entspricht dem Zerreißen des Bündels der Farbfeldlinien zwischen den Quarks. Die in der Gluonfeld-Saite gespeicherte Energie ist im betrachteten Fall so groß, daß sie die Bildung vieler  $q\bar{q}$ -Paare erlaubt. Diesen Vorgang kann man mittels einer „Monte-Carlo“-Rechnung rekonstruieren.<sup>3</sup> Das *string*-Modell der Hadronisierung wurde v.a. an der Universität Lund entwickelt und steht heute in Form des Programmpakets JETSET [Sjo82] an allen Forschungszentren zur Verfügung. Für einen  $q\bar{q}$ -Zustand liefert es sehr ähnliche Resultate wie das zuvor von Field

<sup>3</sup>Als „Monte-Carlo“-Methode wird das Nachbilden zufälliger Prozesse auf einem Computer bezeichnet. Der Name erinnert daran, daß die Zahlenfolge im Roulette ebenfalls zufällig ist.

und Feynman [Fie78] entwickelte Modell der unabhängigen Fragmentierung (*independent fragmentation*). Letzteres hat für uns den Vorteil, daß seine Grundzüge sich leichter beschreiben lassen.

Dazu nehmen wir an (siehe Abb. 4.8), daß in dem von den auseinanderlaufenden Quarks produzierten Farbfeld zunächst ein Paar  $q_1\bar{q}_1$  produziert wird. Das nach rechts laufende ursprüngliche Quark  $q$  mit dem Impuls  $|\mathbf{p}_q|$  formt mit dem Quark  $\bar{q}_1$  ein Meson ( $q\bar{q}_1$ ). Der Longitudinalimpuls dieses Mesons, also die Impulskomponente in Richtung  $\mathbf{p}_q$ , sei  $z_1|\mathbf{p}_q|$ , das übrigbleibende Quark  $q_1$  hat dann den Longitudinalimpuls  $p_{1,L} = (1 - z_1)|\mathbf{p}_q|$ . Nun wird ein Paar  $q_2\bar{q}_2$  erzeugt,  $\bar{q}_2$  bildet mit  $q_1$  ein Meson mit dem Longitudinalimpuls  $z_2|\mathbf{p}_1|$ , und so geht es immer weiter, bis der gesamte Impuls aufgebraucht ist. Für die Monte-Carlo-Rechnung muß man also nur eine universale Verteilungsfunktion  $f(z_i)$  bestimmen, die die Aufteilung der Longitudinalimpulse in den oben besprochenen Prozessen festlegt. Die Verteilung der Zufallszahlen  $z_1, z_2, \dots$  wird entsprechend dieser Funktion erzeugt. Es ist klar, daß ein solches Verfahren eine Verteilungsfunktion  $D^h$  der Longitudinalimpulse der Hadronen erzeugt, die nur von der in Formel (5.19) definierten Variablen  $z$  abhängt und damit die weiter oben geforderte Qualität erfüllt. Die Hadronen bilden also *Jets*. Zusätzlich simuliert man im Rechenprogramm auch noch den Transversalimpuls der Mesonen (bezüglich der Richtung  $\mathbf{p}_q$ ) mit einem Mittelwert von etwa 300 MeV, die *flavor*-Quantenzahlen der Quarks, die Spins der Mesonen usw.

Es läßt sich denken, daß moderne Hadronisierungsprogramme technisch sehr kompliziert sind, obwohl sie auf relativ einfachen Prinzipien beruhen. Die Entwicklung dieser Verfahren ging Hand in Hand mit der Entstehung eines neuen Zweiges der Physik, der sog. *computational physics*, bei der nur noch die Grundannahmen analytisch formuliert werden, während die quantitative Lösung einer bestimmten Fragestellung ausschließlich numerisch bestimmt wird.

### Übungen

- 5.1 Berechnen Sie den Farbfaktor, der für Quarks einer bestimmten Farbe im Prozeß  $q \rightarrow q + g$  anzuwenden ist.
- 5.2 Zeigen Sie, daß für einen Endzustand  $q\bar{q}g$  aus drei masselosen Partonen der *thrust* durch  $T = \max(x_1, x_2, x_3)$  gegeben ist.
- 5.3 Berechnen Sie den Mittelwert von  $T$  für eine isotrope Verteilung der auslaufenden Teilchen.

## 5.2 Die elastische Elektron-Nukleon-Streuung

Bei der Behandlung der QED haben wir die enge Verwandtschaft der Elektron-Positron-Paarvernichtung in Myonen und der Elektron-Myon-Streuung studiert. Ein Übergang von der  $e^-e^+$ -Annihilation in Quark-Antiquark-Paare zur Elektron-Quark-Streuung ist aber zunächst nur auf dem Papier möglich,

da es offensichtlich keine freien Quarks gibt. Um besser zu verstehen, welche Revolution des physikalischen Denkens die Interpretation der inelastischen Elektron-Proton-Streuung im Sinne des Quarkmodells bedeutete, betrachten wir erst einmal die elastische Streuung

$$e + p \rightarrow e + p , \quad (5.25)$$

auf die sich auch über viele Jahre hinweg die Anstrengungen der Experimentalphysiker konzentrierten.

### 5.2.1 Der Wirkungsquerschnitt

Für die nun folgende Diskussion der elastischen Elektron-Nukleon-Streuung ist es nützlich, die Formeln in einem System anzugeben, in dem das Zielteilchen (*target*) ruht. Alle Experimente wurden in einer solchen Anordnung durchgeführt.

Wir gehen zurück zur elastischen  $e\mu$ -Streuung, d.h. zur Streuung an einem punktförmigen Teilchen der Masse  $M$ . In einem System mit ruhendem *target* bekommt die in Abschn. 3.2.2 eingeführte Variable  $y$  eine anschauliche Bedeutung. Mit

$$y = \frac{E - E'}{E} \quad (5.26)$$

wird sie zum *relativen* Energieverlust des gestreuten Elektrons, wie schon bei der Behandlung der Ionisation und Anregung auf S. 204f. ausgeführt wurde. Die Variable  $t = q^2$  hat in diesem System bei Vernachlässigung der Elektronenmasse  $m$  eine ähnlich einfache Form wie im Schwerpunktsystem

$$t = -2EE'(1 - \cos \Theta) = -4EE' \sin^2(\Theta/2) , \quad (5.27)$$

man muß aber beachten, daß die Energie  $E'$  des auslaufenden Elektrons eine Funktion des Streuwinkels  $\Theta$  im Laborsystem ist. Die Formel (2.188) vereinfacht sich hier zu

$$E' = \frac{E}{1 + (2E/M) \sin^2(\Theta/2)} . \quad (5.28)$$

Mit  $m = 0$  nimmt (3.189) die Gestalt

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4} \left( 1 - y \frac{s}{s_0} + \frac{y^2}{2} \right) \quad (5.29)$$

an. Hierin ist  $s = 2EM + M^2$  und  $s_0 = 2EM$ . Wie schon bei der Herleitung der QED-Formel in Abschn. 3.2.2 betont wurde, ist  $y$  in der elastischen Streuung keine unabhängige Variable. Die Darstellung (5.29) eignet sich aber besonders gut zur Vorbereitung der Behandlung der inelastischen Streuung. Zunächst bringen wir jedoch unter Beachtung von

$$\frac{dt}{d\Omega} = \frac{E'^2}{\pi} \quad (5.30)$$

(5.29) in eine Form, die von der Invarianten  $q^2$  und den Variablen des Laborsystems abhängt. Dazu klammern wir – der Tradition folgend – einen Faktor



( $1 - y$ ) aus und gewinnen nach einigen weiteren Umformungen

$$\frac{d\sigma^{eP}}{d\Omega} = \frac{4\alpha^2 E'^2}{q^4} \frac{1}{1 + (2E/M) \sin^2(\Theta/2)} \left[ \cos^2(\Theta/2) - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2(\Theta/2) \right]. \quad (5.31)$$

Hierin haben wir  $M$  mit der Masse des Protons gleichgesetzt und somit eine Formel für die Streuung relativistischer Elektronen an einem „Dirac-Proton“, d.h. einem Spin 1/2-Teilchen mit der Masse eines Protons und dem magnetischen Moment von genau *einem* Kernmagneton, abgeleitet. Die Darstellung ist sicherlich nicht ganz konsequent, da auf der rechten Seite neben den unabhängigen Variablen  $E$  und  $\Theta$  auch die noch von  $E'$  abhängende Invariante  $q^2$  auftaucht. Es kommt uns aber auch darauf an, dem Leser zu helfen, vielbenutzte Gleichungen der Lehrbücher (z.B. Formel (7.46) des Buches von Bjorken und Drell [Bjo66]) wiederzuerkennen.

In der Literatur kann man noch manch andere Darstellung des Wirkungsquerschnitts der elastischen Elektronenstreuung finden. Es sind Variationen des gleichen Themas. Eine sinnvolle Umformung von (5.31) besteht z.B. darin, den Faktor  $\cos^2(\Theta/2)$  auszuklammern,

$$\frac{d\sigma^{eP}}{d\Omega} = \frac{4\alpha^2 E'^2 \cos^2(\Theta/2)}{q^4} \frac{1}{1 + (2E/M) \sin^2(\Theta/2)} \left[ 1 - \frac{q^2}{2M^2} \tan^2(\Theta/2) \right], \quad (5.32)$$

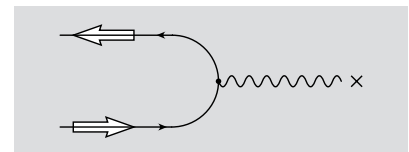
weil dann der erste Faktor dem Wirkungsquerschnitt für die Streuung eines relativistischen Elektrons im Coulomb-Potential entspricht, wie man durch den Grenzübergang  $M \rightarrow \infty$  sieht. Die sog. Mottsche Streuformel

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4p^2 \beta^2 \sin^4(\Theta/2)} [1 - \beta^2 \sin^2(\Theta/2)] \quad (5.33)$$

behandelt dieses Problem für *beliebige* Elektronengeschwindigkeiten  $\beta$ , also ohne Vernachlässigung der Elektronenmasse.<sup>4</sup> Für  $\beta \rightarrow 1$  entspricht sie dem ersten Faktor in (5.32), wenn berücksichtigt wird, daß bei der Potentialstreuung  $E = E'$  gilt. Der Term  $\cos^2(\Theta/2)$  bringt wieder die Drehimpulserhaltung zum Ausdruck. Bei einem Streuwinkel von  $180^\circ$  führt die Helizitätserhaltung am Vertex (Abb. 5.7) zu  $|\Delta J_z| = 1$ , daher muß der Wirkungsquerschnitt für diesen Streuwinkel verschwinden. Es ist auch anschaulich klar, daß dieser Spinterm nur bei hohen Geschwindigkeiten relevant wird. Im Ruhesystem des Elektrons erscheint das Streuzentrum nämlich als sich bewegende Ladung. Neben dem elektrischen Feld tritt daher auch ein Magnetfeldanteil proportional zu  $\beta$  auf. Dieses Magnetfeld koppelt an den Spin des Elektrons. Im Umkehrschluß wird damit auch einsichtig, daß Spineffekte für  $\beta \rightarrow 0$  verschwinden. Die Mottsche Streuformel geht in

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 m^2}{4p^4 \sin^4(\Theta/2)}, \quad (5.34)$$

über, dem Rutherford'schen Wirkungsquerschnitt für die Streuung eines spinlosen nichtrelativistischen Teilchens der Masse  $m$  im Coulomb-Potential.



**Abb. 5.7**  
Erläuterung der Helizitätserhaltung bei der Rückwärtsstreuung von Elektronen im Coulomb-Potential

<sup>4</sup>Diese Streuformel wird in dem Buch von Mott und Massey [Mot65] ausführlich diskutiert.

Die berühmte Winkelabhängigkeit wurde von Rutherford durch Betrachtung der Bahnen geladener Teilchen im Coulomb-Feld ohne Verwendung der Quantenmechanik gefunden.<sup>5</sup> In unserer Interpretation kommt sie durch den Photonpropagator  $1/q^2$  zustande, der als Faktor  $(1/q^2)^2$  im Wirkungsquerschnitt aller elektromagnetischen Streuprozesse von den niedrigsten bis zu den höchsten Energien auftritt.

### 5.2.2 Experimente zur elastischen Elektronenstreuung

Zunächst werfen wir einen Blick auf die Streuung im Coulomb-Potential. Sie läßt sich experimentell durch Streuung niederenergetischer ( $E \approx 2$  MeV) Elektronen an schweren Kernen studieren. Hierzu gibt es ausgedehnte Untersuchungen der Elektronenstreuung an dünnen Metallfolien. Die genauesten Messungen zeigten, daß alle Abweichungen von der Mott-Formel auf Beiträge höherer Ordnung, wie die in Abschn.3.3.2 diskutierten Strahlungskorrekturen, zurückgeführt werden können [Ber70].

Bei der Diskussion der Experimente zur Elektron-Positron-Annihilation im letzten Abschnitt haben wir gesehen, daß Elektronen und Myonen sich wie punktförmige Teilchen verhalten. Eine Überprüfung der QED-Resultate im raumartigen Bereich, also durch Elektron-Myon-Streuung, ist leider nicht möglich, da sich Myonen noch nicht in genügender Anzahl herstellen lassen. Das einzige geladene Spin  $1/2$ -Teilchen, das man als Target für Streuversuche benutzen kann, ist das Proton. Da es aber ein anomales magnetisches Moment von  $2,79$  Kernmagnetonen hat, erwarten wir von vornherein, daß (5.32) modifiziert werden muß. Man könnte nun versuchen, eine zu (5.32) analoge Formel für die Streuung an einem punktförmigen Teilchen mit anomalem magnetischen Moment abzuleiten. Weil das Proton aber einen Radius von etwa  $1$  fm hat, erwarten wir zusätzliche Abweichungen von (5.32) schon bei  $|q^2| \approx 0,04$  GeV<sup>2</sup>, typisch also bei Streuwinkeln von  $10^\circ$  für Elektronenstrahlen der Energie  $1$  GeV.

Den Einfluß der endlichen Ausdehnung des Protons parametrisiert man durch Einführung zweier Formfaktoren,  $G_E$  und  $G_M$ , dem elektrischen und magnetischen Formfaktor des Protons. Beide hängen von  $|q^2|$  ab. Solange man den Energieübertrag auf das Proton vernachlässigen kann, gilt aber auch  $|q^2| = \mathbf{q}^2$ , und der elektrische Formfaktor  $G_E$  läßt sich als Fourier-Transformierte der Ladungsverteilung  $\rho(r)$

$$G_E(q^2) = \int \rho(r) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} d^3 r \quad (5.35)$$

interpretieren. Ebenso beschreibt  $G_M$  die Verteilung des magnetischen Momentes. Eine genauere Diskussion dieser Zusammenhänge führt uns zu weit von unserem eigentlichen Thema, der Wechselwirkung von Leptonen und Quarks, weg.<sup>6</sup> Im Buch von Bjorken und Drell [Bjo66] findet man eine ausführliche Herleitung der Rosenbluth-Formel

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\alpha^2 E'^2 \cos^2(\Theta/2)}{q^4 [1 + (2E/M) \sin^2(\Theta/2)]} \left[ \frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} + 2\tau G_M^2 \tan^2(\Theta/2) \right], \quad (5.36)$$

<sup>5</sup>E. Rutherford (1871–1937) entdeckte auf diese Weise den Atomkern.

<sup>6</sup>Die Radien der Kerne wurden durch die Messung des elektrischen Formfaktors bestimmt. Das Verfahren wird daher ausführlich in den Lehrbüchern der Kernphysik behandelt [Bet01, May94].

die für die Elektronenstreuung an ruhenden Protonen *und* Neutronen gültig ist. Das Symbol  $\tau$  ist eine Abkürzung für  $|q^2|/4M^2$ , wobei  $M$  die Nukleonenmasse bedeutet.

Für Protonen lauten die Randbedingungen

$$G_E^p(0) = 1 \quad G_M^p(0) = 2,79 \quad (5.37)$$

und für Neutronen

$$G_E^n(0) = 0 \quad G_M^n(0) = -1,91, \quad (5.38)$$

d.h.  $G_M^{p,n}(0)$  sind die magnetischen Momente der Nukleonen in Einheiten eines Kernmagnetons. Mit  $G_E = G_M = 1$  für alle Werte von  $|q^2|$  erhält man (5.32) zurück, wie es auch sein muß.

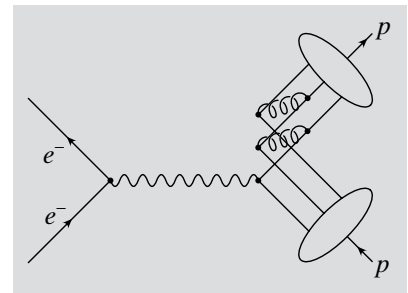
Die Rosenbluth-Formel enthält die Aussage, daß man bei festem  $|q^2|$  durch Variation des Streuwinkels die beiden Formfaktoren  $G_E$  und  $G_M$  gemeinsam bestimmen kann. Eine Änderung des Winkels bei festem  $|q^2|$  bedeutet natürlich, daß die Einfallenergie  $E$  der Elektronen an die geänderten kinematischen Bedingungen angepaßt werden muß. Die so gemessenen Wirkungsquerschnitte teilt man durch den ersten Faktor von (5.36) und trägt dann das Ergebnis gegen  $\tan^2(\Theta/2)$  auf. Die damit erhaltenen Werte sollten auf der „Rosenbluth-Geraden“ liegen, deren Achsenabschnitt durch  $(G_E^2 + \tau G_M^2)/(1 + \tau)$  und deren Steigung durch  $2\tau G_M^2$  gegeben ist. Messungen der Formfaktoren der Nukleonen wurden über einen großen Wertebereich von  $|q^2|$  durchgeführt. Aus der Normierung der Formfaktoren und aus den in der Rosenbluth-Formel auftretenden Vorfaktoren ist zu entnehmen, daß schon für relativ kleine  $|q^2|$ -Werte von etwa  $2 \text{ GeV}^2$  der Wirkungsquerschnitt durch  $G_M$  dominiert ist. Die Meßwerte des elektrischen Formfaktors sind daher i.a. mit einem größeren Fehler behaftet.

Das experimentelle Resultat kann sehr einfach zusammengefaßt werden. Sowohl der Verlauf von  $G_E^p$  als auch von  $G_M^p/\mu_p$  läßt sich durch die sog. Dipolformel

$$G_E^p = \frac{G_M^p}{\mu_p} = \frac{1}{(1 + |q^2|/a)^2} \quad (5.39)$$

beschreiben, worin der Parameter  $a$  empirisch zu  $a = 0,71 \text{ GeV}^2$  bestimmt wurde. Das Merkwürdige dabei ist, daß dieses Resultat schon von Hofstadter [Hof56] bei der Untersuchung der Ladungsverteilung des Protons bei sehr kleinen Impulsüberträgen gefunden wurde. Auch der magnetische Formfaktor des *Neutrons* folgt diesem universellen Verlauf, während  $G_E^n(|q^2|)$  auch für große  $|q^2|$  nur wenig von 0 abweicht.

Für hohe Impulsüberträge bedeutet (5.39) auf jeden Fall einen starken Abfall des Wirkungsquerschnitts,  $\sigma \sim 1/q^{12}$  verglichen mit  $1/q^4$  für ein punktförmiges Teilchen. Dies ist ein wirklich dramatischer Effekt, und mit diesem Hintergrund muß man die in Abschn. 5.3 zu besprechenden Ergebnisse der inelastischen Elektron-Nukleon-Streuung sehen. Das Potenzgesetz  $1/q^4$  des Formfaktors läßt sich wenigstens qualitativ im Rahmen der QCD deuten (Abb. 5.8). Wenn die Streuung des Elektrons an einem



**Abb. 5.8**  
Die elastische Elektron-Nukleon-Streuung ( $ep$ ) in der QCD. Hier müssen sich die Quarks nach der Streuung wieder zu einem Nukleon arrangieren

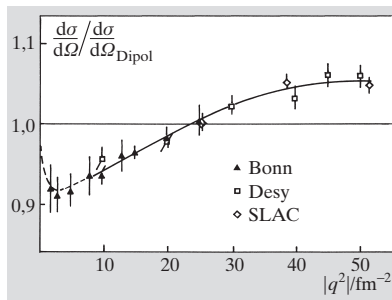


Abb. 5.9

Das Verhältnis des Wirkungsquerschnitts der elastischen Elektron-Proton-Streuung zu einer Vorhersage, die aus der Dipolformel für die Formfaktoren gewonnen wurde

einzelnen Quark stattfindet, müssen die beiden anderen Quarks wieder in die ursprüngliche Konfiguration gedrängt werden, damit das Proton zusammenhält. Dies geschieht durch Austausch von Gluonen. Die dabei auftretenden Gluon-Propagatoren  $1/q_1^2$  und  $1/q_2^2$  skalieren mit  $|q^2|$ , und daher wird die Streuamplitude mit einem Faktor  $1/q^4$  multipliziert.

Das in (5.39) beschriebene Gesetz gibt die experimentellen Resultate mit einer Genauigkeit von etwa 10 % wieder. In sehr sorgfältigen Untersuchungen wurden Abweichungen von der Dipolformel im Verlauf des elektrischen und magnetischen Formfaktors festgestellt (Abb. 5.9). Diese Details und der in (5.39) auftretende Wert der Konstanten  $a$  sind bis heute unverstanden. Gemessen an dem großen experimentellen Aufwand erscheint das Ergebnis etwas dürrig. Der Vergleich mit den völlig neuartigen Phänomenen, die beim Übergang zur inelastischen Elektronenstreuung gefunden wurden, zeigt uns, wie wichtig es in der Teilchenphysik ist, zunächst einmal die groben Effekte zu entdecken und zu verstehen.

### Vertiefung

Das Resultat (5.39) kann für kleine  $q^2$ -Werte anschaulich interpretiert werden. Dazu wird zunächst (5.35) weiter ausgewertet. Die  $z$ -Achse des Koordinatensystems der Integration legen wir in die Richtung des  $\mathbf{q}$ -Vektors. Die Integration über  $\theta$  und  $\phi$  ergibt

$$G_E(q^2) = 4\pi \int \rho(r) \frac{\sin |q|r}{|q|r} r^2 dr . \quad (5.40)$$

Für kleine Werte von  $q^2$  wird nun die Sinusfunktion in eine Reihe entwickelt. Unter Beachtung der Normierung der Ladungsverteilung und der Definition des Mittelwertes  $\langle r^2 \rangle$  erhalten wir

$$G_E(q^2) \approx 1 - \frac{|q^2| \langle r^2 \rangle}{6} . \quad (5.41)$$

Bei den kleinen Impulsüberträgen, wie sie in den Experimenten von Hofstadter vorlagen, gilt  $|q^2| = \mathbf{q}^2$  und das Ergebnis (5.39) wird durch  $G_E(q^2) \approx 1 - 2|q^2|/0,71$  angenähert. In einem Modell des Protons als einer homogen geladenen Kugel mit dem Radius  $R$  berechnet man  $\langle r^2 \rangle = 3R^2/5$ , woraus  $R = 1,05$  fm folgt.

### 5.2.3 Das $e\pi$ -System

Die Feynman-Regeln des Abschn. 3.1.3 behandeln nur die Kopplung von Fermionen an Photonen. Dies ist u.a. dadurch gerechtfertigt, daß die elementaren Bausteine der Materie eben Fermionen sind. Es ist trotzdem reizvoll, die elektromagnetische Wechselwirkung von skalaren Teilchen zu untersuchen. Als Beispiel diskutieren wir das Elektron-Pion-System, obwohl es sich bei den Pionen natürlich nicht um elementare punktförmige Konstituenten der Materie handelt.

Ein- und auslaufende Spin 0-Teilchen werden in den Feynman-Graphen einfach durch einen Faktor 1 beschrieben, während jedem Vertex ein Faktor

$$-ieQ(p^\mu + p'^\mu) \tag{5.42}$$

zugeordnet wird (Abb. 5.10). Die Amplitude für die Paarerzeugung

$$e^- + e^+ \rightarrow \pi^- + \pi^+ \tag{5.43}$$

lautet demnach (mit den in Abb. 5.11a angegebenen Bezeichnungen der Impulse)

$$T_{fi} = -e^2 \bar{v}(k) \gamma^\mu u(p) \frac{1}{q^2} (p'_\mu - k'_\mu) . \tag{5.44}$$

Die Auswertung im *Schwerpunktsystem* der Reaktion ergibt z.B. für linkshändige Elektronen und rechtshändige Positronen unter Benutzung der Resultate des Abschn. 3.1.3

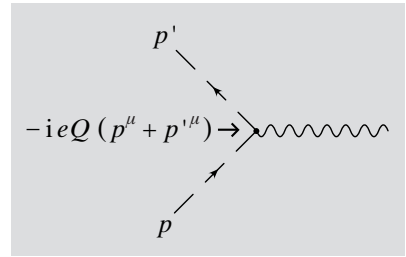
$$T_{fi} = -e^2 \sin \Theta , \tag{5.45}$$

wobei  $\Theta$  der Winkel zwischen dem einlaufenden Elektron und dem auslaufenden  $\pi^+$  ist. Die Winkelverteilung ist also proportional zu  $d_{1,0}^1$ , wie es durch die Bilanz der Spins und Helizitäten gefordert wird. Ausgedrückt durch die Mandelstam-Variablen lautet die Streuamplitude

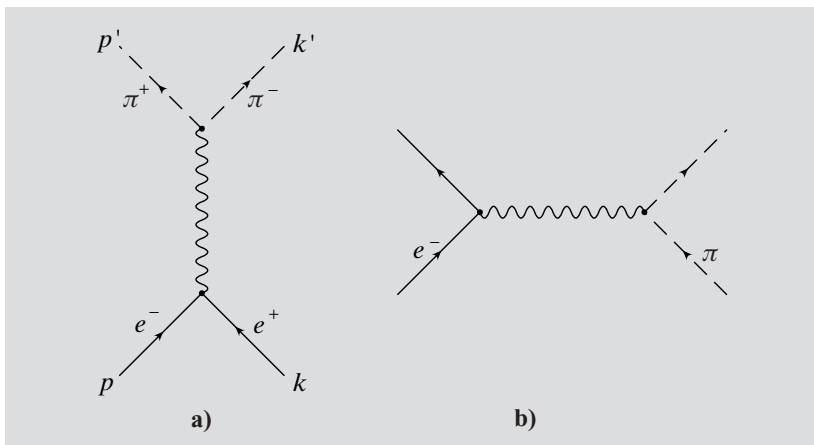
$$T_{fi} = -2e^2 \sqrt{\frac{tu}{s^2}} . \tag{5.46}$$

Das (im Betrag) gleiche Ergebnis wird für die Annihilation rechtshändiger Elektronen und linkshändiger Positronen erhalten, und es ist eine sehr einfache Aufgabe, aus diesen Amplituden nach den üblichen Verfahren

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(e^- e^+ \rightarrow \pi^- \pi^+) = \frac{\alpha^2}{8s} \sin^2 \Theta \tag{5.47}$$



**Abb. 5.10**  
Die elektromagnetische Kopplung an skalare Teilchen



**Abb. 5.11a,b**  
(a) Die  $e^- e^+$ -Annihilation in Pionen, (b) die Elektron-Pion-Streuung in niedrigster Ordnung der QED

als den spingemittelten Wirkungsquerschnitt im Schwerpunktsystem abzuleiten.

Der Wirkungsquerschnitt der Streureaktion  $e\pi \rightarrow e\pi$  kann wieder durch die Substitution  $s \leftrightarrow t$  im Quadrat der Amplitude (5.46) berechnet werden und lautet in invarianter Form

$$\frac{d\sigma}{dq^2}(e\pi \rightarrow e\pi) = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4}(1-y) . \quad (5.48)$$

Experimentell sind die Abweichungen von diesen Vorhersagen aufgrund der hadronischen Natur der Pionen am interessantesten. Auch diese werden durch Formfaktoren beschrieben, mit denen die Streuamplitude multipliziert wird. Da die  $\pi$ -Mesonen Spin 0-Teilchen sind, gibt es nur *einen* Formfaktor, der für den zeitartigen Prozeß mit  $F_\pi(s)$  und für den raumartigen Prozeß mit  $F_\pi(q^2)$  bezeichnet wird.

Qualitativ ist klar, daß im Bereich von  $s \approx m_\rho^2$  die Größe  $|F_\pi(s)|^2$  die Gestalt einer Breit-Wigner-Resonanzkurve annimmt. Wenn andererseits die Elektron-Pion-Streuung durch ein QCD-Bild analog zur Abb. 5.8 beschrieben wird, erwartet man

$$F_\pi(q^2) \sim \frac{1}{|q^2|} , \quad (5.49)$$

da nur *eine* Quarklinie umgebogen werden muß. Beide Überlegungen werden im Experiment bestätigt; für die vielen wichtigen Details muß ich jedoch den Leser auf die Literatur [Wij79] verweisen.

### Übungen

- 5.4 Stellen Sie sich vor, Sie erhalten die Aufgabe, die Formfaktoren des Protons für  $|q^2| = 1 \text{ GeV}^2$  durch Messen der Winkelverteilung der Elektronen zwischen  $5^\circ$  und  $90^\circ$  zu bestimmen. Welche Energien haben dann die ein- und auslaufenden Elektronen beim größten und kleinsten Streuwinkel?
- 5.5 Welcher Ladungsverteilung entspricht das Dipolgesetz des elektrischen Formfaktors?

## 5.3 Inelastische Elektron-Nukleon-Streuung

### 5.3.1 Der Wirkungsquerschnitt im Quarkmodell

Die Streuung von Elektronen an Quarks ist einer direkten experimentellen Überprüfung anscheinend nicht zugänglich, da es keine freien Quarks gibt, wie wir mehrfach betont haben. Von Feynman stammt aber eine scharfsinnige Überlegung, in der er zeigte, daß ein Proton (oder Neutron) mit sehr hoher Energie als ein Strahl kollinear freier Quarks angesehen werden kann. Der Energieunterschied zwischen einem Proton und einer Anzahl von Quarks, deren Impulssumme durch den Impuls des Protons gegeben ist, beträgt

$$\Delta E = \sqrt{\mathbf{P}^2 + M^2} - \sum_i \sqrt{k_{L,i}^2 + k_{T,i}^2 + m_i^2} . \quad (5.50)$$

Der erste Term auf der rechten Seite ist die Energie eines Protons mit dem Impuls  $\mathbf{P}$ . Im zweiten Term wird über die beitragenden Quarks summiert, und die Impulse der Quarks werden in Komponenten  $k_L$  parallel und  $k_T$  senkrecht zum Impuls des Protons aufgespalten. Im Grenzfall sehr hoher Werte von  $|\mathbf{P}|$  werden auch die einzelnen  $k_{L,i}$  sehr groß. Dann kann die Wurzel in eine Reihe entwickelt werden, und es folgt

$$\Delta E = \frac{M^2}{2|\mathbf{P}|} - \sum_i \frac{k_{T,i}^2 + m_i^2}{2k_{L,i}} \quad (5.51)$$

Dies bedeutet aber, daß  $\Delta E$  in einem Bezugssystem sehr hoher Impulse des Protons, dem sog. *infinite momentum frame*, unmeßbar klein wird. Eine verschwindende Verletzung des Energieerhaltungssatzes bedingt aber nach der Heisenbergschen Unschärferelation eine große Lebensdauer des Zwischenzustandes kollinearer Quarks. Es ist also sehr wahrscheinlich, daß das Proton in einen solchen Zustand übergeht. Die Elektron-Proton-Streuung wird daher durch das Diagramm der Abb. 5.12 beschrieben. Das in der Abbildung rechts unten einlaufende Proton geht im *infinite momentum frame* in einen Zustand kollinearer Quarks über (im Bild werden nur die drei Linien der Konstituentenquarks gezeigt). Das Elektron streut an einem dieser Quarks. Es handelt sich hier um eine typische Weizsäcker-Williams-Näherung, wie wir sie bei der Behandlung der Bremsstrahlung ausführlich diskutiert haben (Abschn. 3.3.1). Nach der Streuung hat eines der Quarks einen großen Transversalimpuls bekommen, die Quarks laufen auseinander, der Fragmentierungsprozeß beginnt. Genau wie bei der Annihilation erfolgen also ein Streuprozess zwischen punktförmigen Teilchen bei einem Abstand  $d \ll 1$  fm und die Hadronisierung bei einem Abstand  $d \gg 1$  fm nacheinander. Auch jetzt wird nicht versucht, die Übergangswahrscheinlichkeiten in einzelne Endzustände zu berechnen, sondern es werden alle Endzustände  $X$  zugelassen. Zusammengefaßt sehen wir also, daß gerade in der inklusiven Streureaktion

$$e + p \rightarrow e + X \quad (5.52)$$

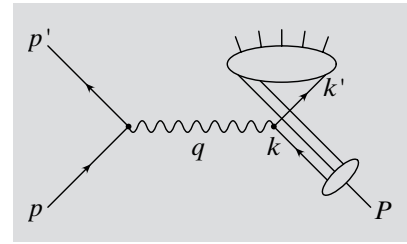
die zugrunde liegende Elektron-Quark-Streuung sichtbar wird.

Wir führen die quantitative Berechnung – wie bereits erwähnt – im *infinite momentum frame* durch. Bei hohen Werten von  $s$  ist das z.B. das Schwerpunktsystem. Bei einem Elektron-Proton-collider wie HERA, in dem Protonen von 920 GeV auf Elektronen von 28 GeV treffen, kann sogar das Laborsystem ganz anschaulich als ein solches Bezugssystem gelten. Da das einlaufende Nukleon als Strahl kollinearer Quarks aufgefaßt wird, bekommt jedes Quark mit dem Viererimpuls  $k^\mu$  einen bestimmten Bruchteil  $x$  des Nukleon-Impulses  $P^\mu$

$$k^\mu = x P^\mu \quad (5.53)$$

mit  $0 \leq x \leq 1$ . Da wir weiter in der Hochenergienäherung verschwindender Quarkmassen bleiben, folgt aus  $k^2 = x^2 P^2$ , daß im Ansatz (5.53) auch die Masse des Nukleons im Viererimpuls  $P^\mu$  vernachlässigt wird.

Es soll nun  $q_f(x)$  die Verteilungsfunktion der Impulse eines Quarks der Sorte  $f$  im Nukleon sein, d.h.  $q_f(x) dx$  ist die Anzahl von Quarks der Sorte  $f$



**Abb. 5.12** Die inelastische Elektron-Nukleon-Streuung  $e + p \rightarrow e + X$  im Quarkmodell. Der Graph enthält die im Text benötigte Definition der Viererimpulse der beteiligten Teilchen. Die Blase im oberen Teil der Abbildung symbolisiert die störungstheoretisch nicht erfassbare Verwandlung der Quarks in die Hadronen des Endzustandes



mit relativen Impulsen zwischen  $x$  und  $x + dx$ , ( $f = u, d, \dots$ ). Entsprechend beschreibt  $\bar{q}_f$  die Verteilung der Antiquarks. Der Wirkungsquerschnitt der Elektronenstreuung an den Quarks und Antiquarks im Nukleon folgt nun unmittelbar mit Hilfe von (3.172)

$$\frac{d\sigma^{eq}}{dq^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4} \left(1 - y + \frac{y^2}{2}\right) \sum_f Q_f^2 [q_f(x) + \bar{q}_f(x)] dx \quad (5.54)$$

Wenn wir jetzt, wie gerade besprochen, über alle Übergangswahrscheinlichkeiten in bestimmte Endzustände summieren, gibt (5.54) den zweifach differentiellen Wirkungsquerschnitt für die Elektron-Nukleon-Streuung

$$\frac{d^2\sigma^{eN}}{dq^2 dx} = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4} \left(1 - y + \frac{y^2}{2}\right) \frac{F_2(x)}{x} \quad (5.55)$$

wieder. Hierin wurde gleichzeitig die sog. Strukturfunktion  $F_2$  als Abkürzung für

$$F_2(x) = x \sum_f Q_f^2 [q_f(x) + \bar{q}_f(x)] \quad (5.56)$$

eingeführt. Zunächst erscheint diese Formel aber noch wenig hilfreich, da die Variable  $y$  gemäß (3.168) im Elektron-Quark-System definiert ist. Außerdem wird der Wirkungsquerschnitt als Funktion des Quarkimpulses in einem bestimmten Bezugssystem angegeben, während man experimentell gewohnt ist, ihn in Abhängigkeit von  $q^2$  und  $W$ , der invarianten Masse der erzeugten Hadronen zu messen.

Die beiden dimensionslosen Variablen  $x$  und  $y$  lassen sich aber problemlos durch Invarianten des Elektron-Nukleon-Streuprozesses ausdrücken. Aufgrund der Relation  $k^\mu = xP^\mu$  folgt aus (3.168) unmittelbar

$$y = \frac{q \cdot P}{p \cdot P}, \quad (5.57)$$

und damit bleibt insbesondere die Beziehung (5.26) für ein ruhendes *target* weiterhin richtig. Aus der Viererimpulserhaltung  $q + k = k'$  am Photon-Quark-Vertex berechnet man sofort

$$q^2 + 2q \cdot k = 0 \quad (5.58)$$

und daher

$$x = \frac{|q^2|}{2q \cdot P}. \quad (5.59)$$

Da die invariante Masse der erzeugten Hadronen aber durch

$$W^2 = (q + P)^2 \quad (5.60)$$

definiert ist, wird die Variable  $x$  sehr einfach aus  $q^2$  und  $W^2$ ,

$$x = \frac{|q^2|}{W^2 + |q^2| - M^2}, \quad (5.61)$$



berechnet. Hieraus ergibt sich, daß der Wertebereich von  $x$  auf

$$0 \leq x \leq 1 \tag{5.62}$$

eingeschränkt ist, wie es sein muß, da  $x$  ja anschaulich dem Impulsbruchteil der Quarks im *infinite momentum frame* entspricht. Der Grenzfall  $x \rightarrow 1$  wird für die elastische Streuung,  $W = M$ , erreicht.

Aus (5.57) und (5.59) können wir noch einen nützlichen Zusammenhang zwischen  $x$  und  $y$  ableiten,

$$|q^2| = 2xyP \cdot P = xys_0, \tag{5.63}$$

wobei  $s_0 = s - M^2$  in  $s$  übergeht, wenn  $M^2$  vernachlässigt wird. Insbesondere gilt  $s_0 = 2EM$  für Experimente mit ruhendem Target und  $s_0 = 4EE_p$  an einem Elektron-Proton-Speicherring wie HERA.

Die Beziehung (5.55) enthält einige sehr wichtige physikalische Aussagen:

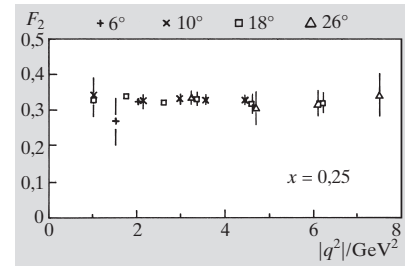
- Da  $1 - y + y^2/2$  auf Werte zwischen 0,5 und 1 beschränkt ist, fällt der inelastische Wirkungsquerschnitt bei festem  $x$  nur wie etwa  $1/q^4$  ab. Vergleichen Sie dies mit dem  $1/q^{12}$  Gesetz der elastischen Streuung!
- Die durch den „punktförmigen“ Querschnitt (3.172) geteilten Meßwerte hängen nur noch von  $x$  also dem Verhältnis von  $|q^2|$  zu  $(|q^2| + W^2)$  und nicht separat von  $q^2$  und  $W^2$  ab. Man nennt dies „Skalenverhalten“. Ein besonders schönes Beispiel aus der Frühzeit der Experimente zur Elektron-Proton-Streuung zeigt das Skalenverhalten der Strukturfunktion  $F_2$  in eindrucksvoller Weise (Abb. 5.13).
- Durch Messungen der inelastischen Elektron-Nukleon-Streuung kann man experimentell die Impulsverteilung der Quarks im Nukleon bestimmen. Die Bewegung der Quarks im Nukleon läßt sich fast wie in einem Mikroskop beobachten.

Das Skalenverhalten der Strukturfunktion  $F_2$  wurde 1968 am SLAC durch Messungen der Elektronenstreuung an Wasserstoff entdeckt.<sup>7</sup> Die Größe des Wirkungsquerschnitts und der schwache Abfall mit dem Impulsübertrag waren ungeheuer überraschend. Sehr allgemeine theoretische Überlegungen von Bjorken ließen skalierende Strukturfunktionen für große  $|q^2|$  und  $W^2$  erwarten [Bjo79]. Die Variable  $x$  ist deshalb auch als Bjorkensche Skalenvariable bekannt. Die Elektronenstreuung bei großen  $|q^2|$  und großen  $W^2$ , aber nicht zu kleinen  $x$ -Werten, wird häufig als „tief inelastisch“ bezeichnet.<sup>8</sup> Ähnlich wie bei der Elektron-Positron-Annihilation zeigen sich aber die wesentlichen Züge der durch die Quarks bestimmten Physik schon bei relativ geringen Werten von  $|q^2|$  und  $W^2$ .

### 5.3.2 Allgemeine Form des Wirkungsquerschnitts

Bevor wir die Messungen von  $F_2$  diskutieren, müssen wir uns noch weiter mit der wichtigen Kinematik der Elektron-Nukleon-Streuung beschäftigen.

Bei der Diskussion der elastischen Streuung haben wir gesehen, daß es zwei Formfaktoren gibt. Ebenso ist i.allg. die inelastische Elektron-Nukleon-Streuung durch zwei Strukturfunktionen  $F_1$  und  $F_2$  bestimmt. Ihre Definition erfolgte historisch durch Berechnung der allgemeinsten Form des Produkts



**Abb. 5.13** Das Skalenverhalten der Strukturfunktion  $F_2$  bei  $x = 0,25$  und  $1 \leq |q^2| < 8 \text{ GeV}^2$ , wie es in den Experimenten am SLAC gefunden wurde

<sup>7</sup>Die Amerikaner Jerome F. Friedman (geb. 1930) und Henry W. Kendall (1926–1999) sowie der Kanadier Richard E. Taylor (geb. 1929) erhielten für diese Entdeckung 1990 den Nobelpreis für Physik.

<sup>8</sup>Wahrscheinlich eine unpassende Übersetzung des englischen *deeply inelastic scattering*.

von zwei elektromagnetischen Hadronströmen [Bar97]. In der hier verwendeten modellmäßigen Ableitung bekommt man eine zweite Strukturfunktion, wenn man neben den Quarks als weitere elementare Konstituenten (*Partonen*) des Protons noch geladene Spin 0-Teilchen zuläßt. Denn es ist a priori nicht sicher, daß es im Nukleon nur Fermionen als Konstituenten gibt. Mit Hilfe der Beziehung (5.48) berechnet man – entsprechend dem Vorgehen bei der Ableitung von (5.55) – den Beitrag der skalaren Partonen zu

$$\frac{d^2\sigma^{eN}}{dq^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4} (1-y) \sum_g Q_g^2 p_g(x) dx, \quad (5.64)$$

wobei  $p_g(x)$  die Verteilungsfunktion der skalaren Partonen im Nukleon ist. Die Flavorsorte  $g$  dieser hypothetischen Partonen hat natürlich nichts mit den schon bekannten Quarks zu tun, und die Summe erstreckt sich über Teilchen und Antiteilchen. Mit den Definitionen

$$F_2 = \sum_f Q_f^2 x [q_f(x) + \bar{q}_f(x)] + \sum_g Q_g^2 x p_g(x) \quad (5.65)$$

und

$$F_1 = \sum_f \frac{1}{2} Q_f^2 [q_f(x) + \bar{q}_f(x)] \quad (5.66)$$

folgt bei gleichzeitigem Übergang zu den Differentialen  $dq^2$  und  $dx$  die Basisformel der inelastischen Elektron-Nukleon-Streuung

$$\frac{d^2\sigma^{eN}}{dq^2 dx} = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4 x} \left[ (1-y) F_2(x, q^2) + xy^2 F_1(x, q^2) \right]. \quad (5.67)$$

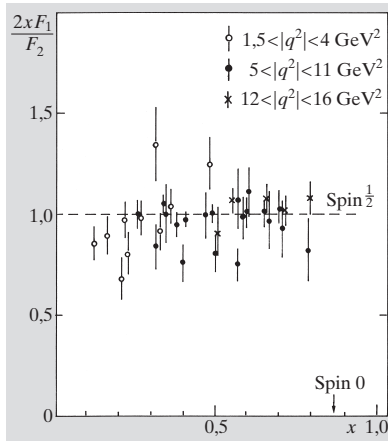
Hierin haben wir noch eine Abhängigkeit der Strukturfunktionen von  $q^2$  zugelassen, die im Quarkmodell nicht auftritt. Dieses entspricht offenbar dem Spezialfall

$$p_g(x) = 0 \quad (5.68)$$

für alle  $g$ , also

$$F_2(x) = 2x F_1(x). \quad (5.69)$$

Die letzte Beziehung ist als Callan-Gross-Relation bekannt. Die Abb. 5.14 demonstriert in wohl überzeugender Weise, daß die geladenen Partonen im Nukleon den Spin 1/2 tragen! Genauere Messungen zeigen geringfügige, aber systematische Abweichungen von der Callan-Gross-Relation auf. Im Rahmen der QCD ist es jedoch nicht mehr nötig, auf Spin 0-Partonen zurückzugreifen. Die Abstrahlung von Gluonen, also eine typische QCD-Korrektur, wie sie schon bei der Elektron-Positron-Vernichtung besprochen wurde, führt zu einer kleinen, berechenbaren Modifikation der Beziehung (5.69). Eine weitere Möglichkeit, die Callan-Gross-Relation zu ändern, besteht darin, die strikte Kollinearität der einlaufenden Quarks aufzugeben. Diese bekommen also den typischen mittleren Transversalimpuls von 300 MeV, der dem Einschluß der Quarks in einem Nukleon mit dem Radius 1 fm entspricht.



**Abb. 5.14**  
Experimenteller Test der Callan-Gross-Relation

Die inelastische Elektron-Nukleon-Streuung läßt sich auch als Absorption virtueller Photonen interpretieren. In dieser Interpretation nimmt z.B. der Querschnitt für die Streuung von Elektronen an einem Proton oder Neutron die intuitiv ansprechende Form

$$\frac{d^2\sigma^{eN}}{dq^2 dy} = \Gamma_t \sigma_t(q^2, W^2) + \Gamma_\ell \sigma_\ell(q^2, W^2) \quad (5.70)$$

an. Hierin ist  $\Gamma_t dq^2 dy$  die Anzahl transversal polarisierter Photonen, die von einem Elektron abgestrahlt werden, das im Intervall  $dq^2 dy$  beobachtet wird. Entsprechend ist der Flußfaktor  $\Gamma_\ell$  für die longitudinalen Photonen definiert.  $\sigma_t$  und  $\sigma_\ell$  sind die zugehörigen totalen Photoabsorptionsquerschnitte der Reaktion  $\gamma^* + N \rightarrow X$ , worin  $\gamma^*$  ein virtuelles Photon bedeutet.

Unter Ausnutzung der Definitionen

$$2xF_1 = \frac{|q|^2}{4\pi^2\alpha} \sigma_t \quad (5.71)$$

und

$$F_2 = \frac{|q|^2}{4\pi^2\alpha} (\sigma_t + \sigma_\ell) \quad (5.72)$$

finden wir durch Vergleich von (5.67) mit (5.70) unter Zuhilfenahme von  $\Gamma_\ell = \epsilon \Gamma_t$

$$\Gamma_t = \frac{\alpha}{2\pi|q^2|y} [1 + (1-y)^2] \quad (5.73)$$

bzw.

$$\epsilon = \frac{2(1-y)}{1+(1-y)^2} . \quad (5.74)$$

Diese Gleichungen sind in der Form identisch zum Flußfaktor (3.248) und zum Polarisationsparameter (3.250) der QED, in denen  $z$  der Impulsbruchteil des von einem schnellen Elektron abgestrahlten Photons war. Mit  $q^\mu = zp^\mu$  folgt aus (5.57) in der Tat  $y = z$ .

Viele Anwender bevorzugen die Darstellung des Querschnitts (5.70) in Abhängigkeit von den Differentialen  $d\Omega'$  und  $dE'$ . Die Umrechnung ist mit Hilfe der Beziehung

$$\frac{dq^2 dx}{d\Omega' dE'} = \frac{E' x}{\pi y} \quad (5.75)$$

leicht möglich. Diese ist sowohl im Ruhesystem des Protons als auch in einem Bezugssystem hoher Nukleon-Impulse (also z.B. im HERA-System oder im Schwerpunktsystem) gültig.

#### Vertiefung

Der in (5.71) und (5.72) definierte Zusammenhang zwischen Strukturfunktionen und Wirkungsquerschnitten ist nicht zwingend. Die von L. Hand ursprünglich für die Elektronenstreuung an ruhenden Protonen abgeleiteten Flußfaktoren [Han63] lauten

$$\Gamma'_t = \frac{\alpha K E'}{2\pi^2 |q^2| E} \frac{1}{1 - \epsilon'}$$

$$\frac{1}{\epsilon'} = 1 + 2 \frac{|q^2| + \nu^2}{|q^2|} \tan^2(\Theta/2) . \quad (5.76)$$

Sie beschreiben das Spektrum der Photonen, die von einem im Phasenraumelement  $d\Omega dE'$  nachgewiesenen Elektron stammen. In diesen Formeln sind die Größen  $\nu$  und  $K$  durch

$$\nu = E - E' , \quad (5.77)$$

bzw.

$$K = \nu - \frac{|q^2|}{2M} \quad (5.78)$$

definiert. Evident ist  $K$  die Energie eines virtuellen Photons, die für ruhende Nukleonen zum selben Wert von  $W$  führt wie die Absorption eines reellen Photons der Energie  $\nu$ . Sie wird daher äquivalente Photonenergie genannt. Die Handschen Formeln führen zum Zusammenhang

$$2xF_1 = \frac{|q|^2}{4\pi^2\alpha} \sigma_t(1-x) \quad (5.79)$$

und

$$F_2 = \frac{|q|^2}{4\pi^2\alpha} (\sigma_t + \sigma_\ell)(1-x) \quad (5.80)$$

zwischen Wirkungsquerschnitten und Strukturfunktionen, falls Terme mit  $M \ll \sqrt{s}$  vernachlässigt werden.

Die totalen Querschnitte  $\sigma_t$  und  $\sigma_\ell$  (und damit auch  $F_1$  und  $F_2$ ) hängen neben der Schwerpunktsenergie  $W$  natürlich im allgemeinen Fall noch von der Masse  $\sqrt{q^2}$  der virtuellen Photonen ab. Wir haben hingegen schon weiter oben abgeleitet, daß im Quarkmodell die Wirkungsquerschnitte nur noch Funktionen der Skalenvariablen  $x$  sind. Beim Übergang vom einfachen Quarkmodell zur QCD wird jedoch das Skalenverhalten durch die Abstrahlung von Gluonen in einer wohldefinierten Weise gebrochen. Eine ausführlichere Behandlung der QCD-Korrekturen muß jedoch noch bis zum übernächsten Abschnitt warten.

In (5.70) ist auch der Übergang zur sog. Photoproduktion enthalten, d.h. zur Erzeugung von Hadronen durch Reaktionen der Art

$$\gamma + N \rightarrow X , \quad (5.81)$$

wie sie an Beschleunigern, die Strahlen hochenergetischer Photonen erzeugen, gemessen werden. Im Grenzfall  $|q^2| \rightarrow 0$  verschwindet  $\sigma_\ell$ , da reelle Photonen keine longitudinale Feldkomponente haben. Der transversale Querschnitt  $\sigma_t(W^2, q^2)$  geht in den Wirkungsquerschnitt  $\sigma_{\gamma N}(W^2)$  der Photoproduktion über. In dieser Näherung gilt  $W^2 = ys$  bei Vernachlässigung der Nukleonenmasse, und es kann über  $|q^2|$  in (5.70) integriert werden. So wird die für

Experimente mit Elektronenstrahlen wichtige Beziehung

$$\frac{d\sigma}{dy} = f_{\gamma/e} \sigma_{\gamma N}(y) \tag{5.82}$$

gewonnen. Der hier auftauchende Flußfaktor  $f_{\gamma/e}$ , also die Verteilungsfunktion der Photonen im Elektron, ist identisch zur QED-Formel (3.243) mit den Ersetzungen  $z \rightarrow y$  und  $k^2 \rightarrow q^2$ .<sup>9</sup> Der Maximalwert von  $|q^2|$  in der Integration muß den jeweils aktuellen experimentellen Bedingungen entnommen werden, die festlegen, bis zu welchen Winkeln die gestreuten Elektronen berücksichtigt werden.

### 5.3.3 Modelle und Ergebnisse für $F_2^{eN}$

Da das Proton die Wellenfunktion  $|uud\rangle$  hat, könnte man ganz naiv erwarten, daß jedes der drei Quarks ein Drittel des Impulses trägt. Dieser Vorstellung entspricht die  $\delta$ -funktionsartige Strukturfunktion der Abb. 5.15a. Ganz ähnlich wie in der Kernphysik bewirkt die Bindung im Potential jedoch eine Verschmierung dieser Linie durch die Fermi-Bewegung, so daß  $F_2^{eP}$  vielleicht eher wie in Abb. 5.15b aussehen wird. Die Verteilung ist stark asymmetrisch, was zum Teil darauf zurückzuführen ist, daß  $F_2$  proportional zum Produkt  $xq_f(x)$  ist.

Die Bindung wird durch Gluonaustausch zwischen den Quarks bewirkt. Neben den Prozessen der Abb. 5.16a werden im Nukleon dann aber auch Reaktionen der Art der Abb. 5.16b ablaufen. Dies bedeutet, daß die Wellenfunktion  $|uud\rangle$  zu einfach ist und durch

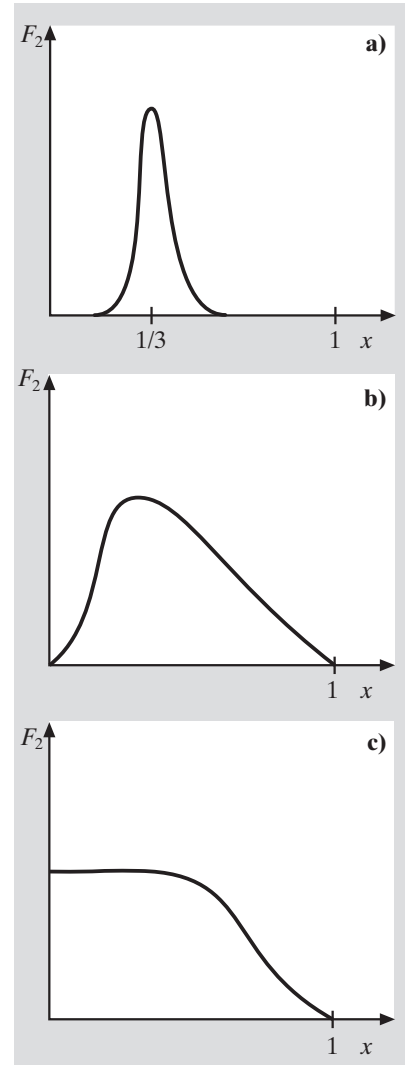
$$|p\rangle = |uud + \bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s + \dots\rangle \tag{5.83}$$

ersetzt werden muß. Die ursprünglichen  $u$ - und  $d$ -Quarks (die Konstituentenquarks) nennen wir in Anlehnung an den chemischen Sprachgebrauch Valenzquarks, die durch Gluonabstrahlung erzeugten hingegen „Seequarks“. Natürlich erwarten wir, daß diese ein relativ weiches Impulsspektrum haben werden, da sie durch Strahlungsprozesse erzeugt werden. Eine Verteilungsfunktion  $q_s(x) \sim 1/x$  der Seequarks, wie sie dem Spektrum (3.259) der Bremsstrahlung entspricht, führt zu einem konstanten Beitrag zu  $F_2$  und daher zu einer Gestalt der Strukturfunktion (Abb. 5.15c), die ungefähr den Messungen bei kleinen  $|q^2|$  und  $x$ -Werten  $\geq 10^{-2}$  entspricht.

Der Zusammenhang (5.56) zwischen  $F_2$  und den Verteilungsfunktionen der Quarks erlaubt uns, aus den Messungen wichtige Schlüsse über diese Funktionen zu ziehen. Unter Vernachlässigung der Beiträge schwerer Quarks können wir für die Protonstrukturfunktion zunächst

$$F_2^{eP} = x \left\{ 4/9[u(x) + \bar{u}(x)] + 1/9[d(x) + \bar{d}(x)] + 1/9[s(x) + \bar{s}(x)] \right\} \tag{5.84}$$

ansetzen. Die Normierungsbedingung der Quarkverteilungsfunktionen wird durch die Wellenfunktion des Protons zu

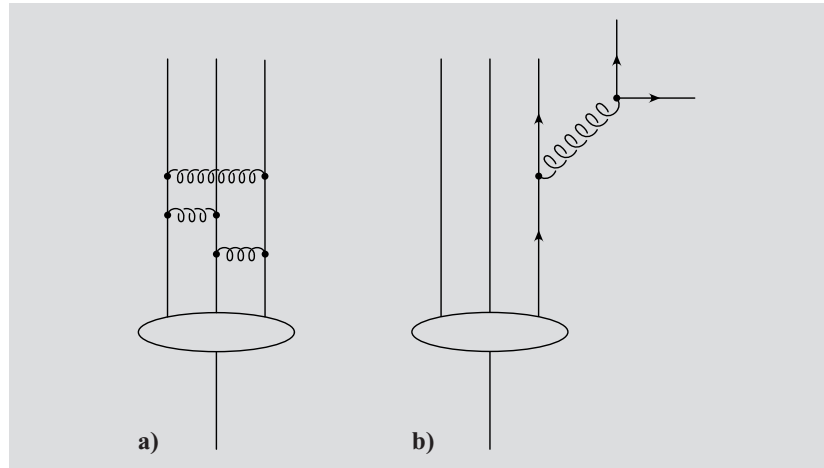


**Abb. 5.15a–c** Der qualitative Verlauf der Strukturfunktion  $F_2$  als Funktion von  $x$ . Die einzelnen Figuren werden im Text erläutert

<sup>9</sup>Natürlich gilt wegen der Universalität der Photon-Lepton-Wechselwirkung auch  $f_{\gamma/e} = f_{\gamma/\mu}$ .

Abb. 5.16a,b

(a) Gluonaustausch und (b) Gluonabstrahlung im Nukleon



$$\begin{aligned} \int (u - \bar{u}) dx &= 2 \\ \int (d - \bar{d}) dx &= 1 \\ \int (s - \bar{s}) dx &= 0 \end{aligned} \quad (5.85)$$

festgelegt. Damit wird garantiert, daß im Proton im Mittel zwei  $u$ - und ein  $d$ -Quark vorhanden sind.

Wir bezeichnen nun mit  $\langle u|p \rangle$  die Amplitude, ein  $u$ -Quark im Proton zu finden. Die Verteilungsfunktion  $u(x)$  ist proportional zum Quadrat dieser Amplitude. Entsprechende Relationen gelten auch für die anderen Funktionen  $d(x)$ ,  $s(x)$  usw. Die  $SU_2$ -Transformation  $U = U_2(\pi)$  verwandelt ein Proton in ein Neutron und ein  $u$ -Quark in ein  $d$ -Quark. Mit

$$\begin{aligned} \langle u|p \rangle &= \langle u|U^{-1}U|p \rangle \\ &= \langle d|n \rangle \end{aligned} \quad (5.86)$$

gilt also  $u^p = d^n$ , oder, da die nichtindizierten Verteilungsfunktionen für das Proton gelten sollen,

$$d^n(x) = u(x) \quad (5.87)$$

Die Strukturfunktion des Neutrons wird aufgrund dieser Rotationen in die Form

$$F_2^{en} = x \left\{ 1/9[u(x) + \bar{u}(x)] + 4/9[d(x) + \bar{d}(x)] + 1/9[s(x) + \bar{s}(x)] \right\} \quad (5.88)$$

gebracht.

Aus den Parametrisierungen (5.84) und (5.88) wird klar, daß durch Messung der Elektron-Nukleon-Streuung *allein* die einzelnen Anteile  $u$ ,  $\bar{u}$ , ... nicht ohne weitere Annahmen voneinander getrennt werden können. Aus der Differenz  $F_2^{ep} - F_2^{en}$  läßt sich aber mit Hilfe solcher Annahmen der Beitrag

der Valenzquarks bestimmen. Dazu teilen wir die  $u$ - und  $d$ -Funktionen in einen Valenz- und einen Seeanteil auf,

$$\begin{aligned} u &= u_v + u_s \\ d &= d_v + d_s \end{aligned} \quad (5.89)$$

Die *strange*-Quarks und alle Antiquarks finden wir nur im See. Mit der zusätzlichen Annahme, daß die Verteilung der Seequarks für alle Quarksorten gleich ist, folgt jetzt sofort

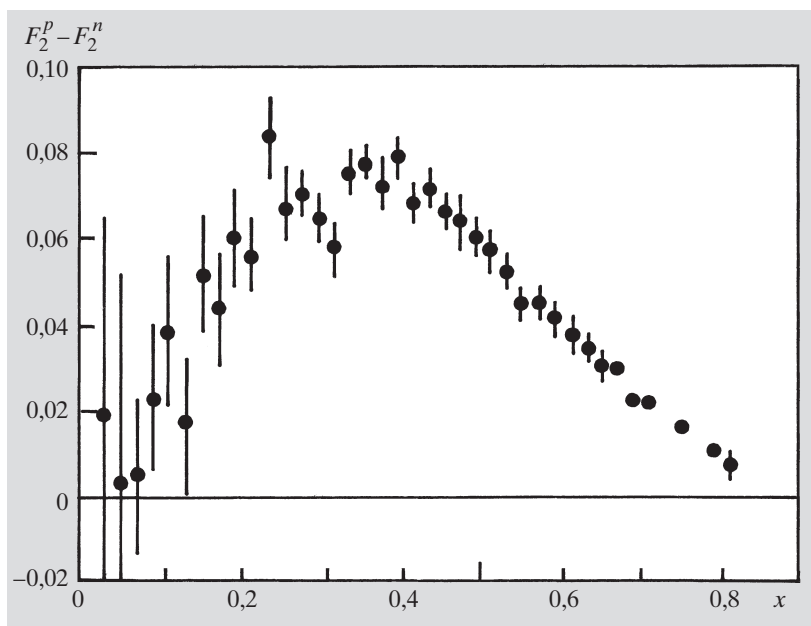
$$F_2^{ep} - F_2^{en} = \frac{x}{3}(u_v - d_v) \quad (5.90)$$

und wenn wir weiter vereinfachend ansetzen, daß der Unterschied zwischen  $u_v$  und  $d_v$  nur in der Normierung liegt, ist die rechte Seite dieser Gleichung durch  $xu_v/6$  gegeben. Die experimentellen Ergebnisse der Abb. 5.17 folgen sehr schön den qualitativen Überlegungen, die wir schon weiter oben angestellt haben (Abb. 5.15).

Besonders interessant ist das Integral der Strukturfunktionen. Da die Summe der Partonen-Impulse gleich dem Nukleon-Impuls sein muß, gilt

$$\int_0^1 x(u + \bar{u} + d + \bar{d} + s + \bar{s}) dx = 1 - \varepsilon \quad (5.91)$$

wobei  $\varepsilon$  der Bruchteil des Impulses ist, der von neutralen Partonen, also z.B. den Gluonen, getragen wird. Weil die *strange*-Quarks nur im See vorkommen, sollten sie sehr wenig zur Impulssumme beitragen. Messungen der



**Abb. 5.17**  
Der aus den Proton- und Neutrondaten gewonnene Beitrag der Valenzquarks zu  $F_2$

inelastischen Neutrino-Nukleon-Streuung (Abschn. 6.2.6) zeigen, daß der Anteil der *strange*-Quarks zur Impulssumme (5.91) nur etwa 6% beträgt. Aus der Summe von (5.84) und (5.88) erhalten wir daher bei Vernachlässigung der *strange* Quarks

$$\frac{9}{5} \int (F_2^{ep} + F_2^{en}) dx = 1 - \varepsilon . \quad (5.92)$$

Die experimentellen Untersuchungen dieser Summenregel geben einen Wert von etwa  $0,54 \pm 0,04$  für die linke Seite der Gleichung. Fast die Hälfte des Nukleon-Impulses steckt also in den Gluonen. Dieses überraschende Ergebnis zeigt beispielhaft, wie sich aus den Experimenten der inelastischen Lepton-Nukleon-Streuung fundamentale Aussagen über Quarks und Gluonen im Inneren der Nukleonen gewinnen lassen.

Auch aus der Differenz von  $F_2^{ep}$  und  $F_2^{en}$  kann eine interessante Summenregel gewonnen werden, die auf Gottfried zurückgeht. Dazu wird das Integral

$$I_G = \int_0^1 (F_2^{ep} - F_2^{en}) \frac{dx}{x} \quad (5.93)$$

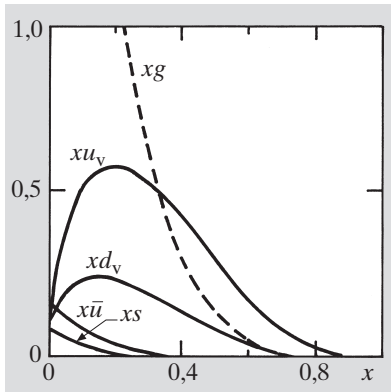
betrachtet. Nach Einsetzen von (5.84) und (5.88) wird daraus mit Hilfe von (5.85) die Beziehung

$$I_G = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \int_0^1 (\bar{u} - \bar{d}) dx \quad (5.94)$$

abgeleitet. Falls wieder  $\bar{u}(x) = \bar{d}(x)$  angenommen wird, gilt demnach  $I_G = 1/3$ . Da der gemessene Wert des Integrals auf der rechten Seite von (5.93) aber deutlich unter  $1/3$  liegt, wird in neueren Analysen nicht mehr von einer Gleichheit der  $\bar{u}$ - und  $\bar{d}$ -Verteilungen ausgegangen.

Messungen der Strukturfunktionen können auch mit Neutrinostrahlen gemacht werden. Der Beitrag einzelner Quarksorten läßt sich mit dieser Methode sogar besser isolieren. Darauf werden wir in Abschn. 6.2.6 noch zurückkommen. Die meisten Experimente wurden bei  $|q^2| < 10 \text{ GeV}^2$  und  $x$ -Werten  $> 0,05$  durchgeführt. In diesem kinematischen Bereich ist das Skalenverhalten der Strukturfunktionen experimentell gut erfüllt, und es macht Sinn, aus solchen Messungen die Dichteverteilungen  $q(x)$  zu bestimmen. Eine beliebte Parametrisierung [Eic86] benutzt den in (5.89) und den darauf folgenden Zeilen beschriebenen Ansatz. Das Ergebnis ist in Abb. 5.18 zusammen mit der Gluondichte, auf deren Bestimmung wir im nächsten Abschnitt eingehen, wiedergegeben. In Formeln lautet es:

$$\begin{aligned} xu_v &= 1,78 x^{0,5} (1 - x^{1,51})^{3,5} \\ xd_v &= 0,67 x^{0,4} (1 - x^{1,51})^{4,5} \\ xu_s &= 0,182 (1 - x)^{8,54} \\ xd_s &= xu_s \\ xs_s &= 0,081 (1 - x)^{8,54} \\ xg &= (2,62 + 9,17x)(1 - x)^{5,9} . \end{aligned} \quad (5.95)$$



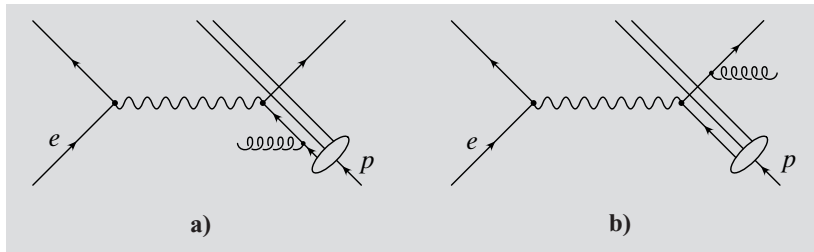
**Abb. 5.18** Die Dichteverteilungen von Quarks und Gluonen nach Eichten et al. [Eic86]. Aufgetragen wurde  $xq(x)$  bzw.  $xg(x)$  als Funktion von  $x$



Diese empirischen Darstellungen dienen u.a. zur Abschätzung der Zählraten von Reaktionen, an denen Quarks und Gluonen beteiligt sind.

**5.3.4 QCD-Korrekturen**

Die Korrekturen niedrigster Ordnung der QCD zur Elektronenstreuung im Quarkmodell berücksichtigen die Abstrahlung von Gluonen von dem am harten Streuprozeß teilnehmenden Quark. Die zugehörigen Diagramme sind in Abb. 5.19 zu sehen. Der harte Subprozeß ist jetzt die inelastische Streuung



**Abb. 5.19a,b**  
QCD-Korrekturen zur inelastischen Elektronenstreuung im Quarkmodell. Die Diagramme beschreiben die Abstrahlung eines Gluons vom (a) ein- bzw. (b) auslaufenden Quark

$e + q \rightarrow e + q + g$  (Gluonbremsstrahlung) eines Elektrons an einem Quark der Sorte  $f$  mit dem Impulsbruchteil  $\xi$ . Der Beitrag dieser Diagramme zum Gesamtwirkungsquerschnitt kann analog zu (5.70) formuliert werden,

$$\frac{d^2\sigma^{eN}}{dq^2 dy} = \Gamma_1 \int_{\hat{t}}^1 \int_{\xi=x}^1 q_f(\xi) \frac{d\sigma_t}{d\hat{t}} d\hat{t} d\xi + \Gamma_\ell \int_{\hat{t}}^1 \int_x^1 q_f(\xi) \frac{d\sigma_\ell}{d\hat{t}} d\hat{t} d\xi . \quad (5.96)$$

Hierin sind  $d\sigma_t/d\hat{t}$  bzw.  $d\sigma_\ell/d\hat{t}$  die differentiellen Wirkungsquerschnitte für den virtuellen QCD-Compton-Effekt

$$\gamma^* + q \rightarrow g + q \quad (5.97)$$

im  $\gamma^*q$  Subsystem. Im entsprechenden Ausdruck für die Antiquarks werden die Dichten  $q_f(\xi)$  durch die Antiquarkdichten  $\bar{q}_f(\xi)$  ersetzt. Um die Formeln aber einigermaßen übersichtlich zu halten, beschränken wir uns in der Herleitung der QCD-Formeln auf die Quarks.

Zunächst beschäftigen wir uns noch etwas mit der Kinematik dieser Reaktion und betrachten dazu das allgemeine Diagramm der Abb. 5.20. Aus der Erhaltung des Viererimpulses folgt sofort

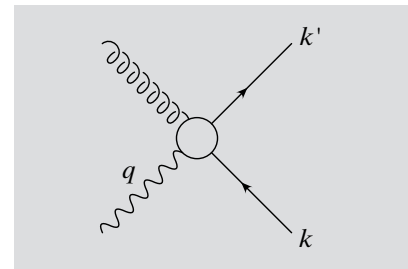
$$(q + k)^2 = \hat{s} , \quad (5.98)$$

wobei wie immer mit masselosen Quarks gerechnet wurde.<sup>10</sup> Wir definieren nun die dimensionslose Variable

$$x_p = \frac{|q^2|}{2q \cdot k} \quad (5.99)$$

und erhalten mit (5.98)

$$x_p = \frac{|q^2|}{\hat{s} + |q^2|} . \quad (5.100)$$



**Abb. 5.20**  
Die QCD-Compton-Streuung  $\gamma^*q \rightarrow gq$

<sup>10</sup>Das Symbol  $q$  bezeichnet hier wie immer den Viererimpuls des ausgetauschten Photons, in der Reaktionsgleichung (5.97) steht es als Abkürzung für „Quark“. Das zeigt nochmal den Konflikt der Wahl zwischen gängigen Bezeichnungen und Eindeutigkeit der verwendeten Symbole.

Aus dem Vergleich mit (5.61) für  $M = 0$  ergibt sich der Wertebereich von  $x_p$ ,

$$x \leq x_p \leq 1, \quad (5.101)$$

da  $\hat{s}$  Werte zwischen 0 und  $W^2$  annehmen kann.

Wir haben mit  $\xi$  den Bruchteil des Nukleonen-Impulses bezeichnet, den das einlaufende Quark übernimmt. Einsetzen in (5.59) und Vergleich mit (5.99) ergibt

$$\xi = \frac{x}{x_p} \quad (5.102)$$

mit  $x \leq \xi \leq 1$ . Bitte beachten Sie, daß die Bjorken-Variable  $x$  nur im Fall der elastischen Elektron-Quark-Streuung als Impulsbruchteil des einlaufenden Quarks identifiziert werden kann, dieser Grenzfall ist in (5.102) für  $\hat{s} = 0$  enthalten. Die abgeleiteten kinematischen Relationen werden besonders anschaulich im Falle der Strahlung im Anfangszustand (*initial state radiation*), wie sie in Abb. 5.19a zu sehen ist. Das Quark mit dem Impulsbruchteil  $\xi > x$  strahlt ein Gluon ab. Danach hat das mit dem Elektron *wechselwirkende* Quark einen Impulsbruchteil  $x_p$  vom einlaufenden Quark oder  $x$  vom Proton übernommen.

Der Wirkungsquerschnitt  $d\sigma_t/d\hat{t}$  kann nicht unmittelbar aus (3.234) entnommen werden, da in dieser Summe auch die Anteile von longitudinal polarisierten Photonen enthalten sind. Dieser Anteil beträgt

$$T_\ell^2 = \frac{4|q^2|\hat{t}}{(\hat{s} + |q^2|)^2} \quad (5.103)$$

und muß daher abgezogen werden. Mit  $q^2 = -|q^2|$  lautet das Resultat

$$\frac{d\sigma_t}{d\hat{t}} = \frac{8\pi Q_f^2 \alpha \alpha_s}{3} \frac{1}{(\hat{s} + |q^2|)^2} \left( \frac{\hat{u}}{\hat{s}} + \frac{\hat{s}}{\hat{u}} + \frac{2q^2\hat{t}}{\hat{s}\hat{u}} + \frac{4q^2\hat{t}}{\hat{s} + |q^2|} \right). \quad (5.104)$$

Beim Nachrechnen beachten Sie bitte, daß die Summe der Amplitudenquadrate zur Mittelung über die Polarisation der transversalen Photonen durch vier geteilt wurde und außerdem  $e^4$  wieder durch  $e^2 Q_f^2 g^2 c_F$  zu ersetzen ist. Im Gegensatz zur Annihilation müssen wir jetzt über die Farben der einlaufenden Quarks mitteln. Der Farbfaktor  $c_F$  beträgt daher  $4/3$  und nicht 4.

Die folgende Diskussion der Integrale in (5.96) wird durchsichtiger, wenn  $\hat{s}$  durch  $x_p$  und  $\hat{t}$  durch

$$z = \frac{k \cdot k'}{q \cdot k} = \frac{\hat{t}}{\hat{s} + |q^2|} \quad (5.105)$$

ersetzt wird. Man überzeugt sich leicht davon, daß  $z$  gemäß

$$z = \frac{1 - \cos \Theta^*}{2} \quad (5.106)$$

durch den Streuwinkel zwischen dem Gluon und dem Photon im  $\gamma q$ -Schwerpunktsystem ausgedrückt werden kann. Damit sind auch die Grenzen  $0 \leq z \leq 1$  unmittelbar einsichtig.

Mit Hilfe dieser Variablen nimmt (5.104) die Gestalt

$$\frac{d\sigma_t}{dz} = \frac{8\pi Q_f^2 \alpha \alpha_S}{3} \frac{x_p}{|q^2|} \left[ \frac{1 + x_p^2 z^2}{(1 - x_p)(1 - z)} + (1 - x_p)(1 - z) \right] \quad (5.107)$$

an. Die zur Berechnung von (5.96) nötigen Integrale lassen sich nun nicht ohne weiteres ermitteln, da in (5.107) wiederum die uns inzwischen vertrauten Divergenzen auftauchen. Die Divergenz für  $z \rightarrow 1$  entspricht dem  $u$ -Pol der Compton-Streuung mit reellen Photonen, das bedeutet hier  $\Theta^* = \pi$  oder im  $eq$ -System die Abstrahlung eines Gluons kollinear mit dem einlaufenden Quark. Der Pol bei  $x_p \rightarrow 1$  entspricht  $\hat{s} \rightarrow 0$  und bedeutet, daß das Gluon entweder sehr niederenergetisch (Infrarot-Divergenz) oder (im  $eq$ -System) kollinear mit dem auslaufenden Quark wird.

In der *leading log* Näherung (LL) werden nur die Terme berücksichtigt, die für  $x_p \rightarrow 1$  und  $z \rightarrow 1$  groß werden, (5.107) wird also durch

$$\frac{d\sigma_t}{dz} = \frac{8\pi Q_f^2 \alpha \alpha_S}{3} \frac{x_p}{|q^2|} \left( \frac{1 + x_p^2}{(1 - x_p)(1 - z)} \right) \quad (5.108)$$

ersetzt. Die Divergenz bei  $z \rightarrow 1$  ist nicht vorhanden, wenn die Masse  $\mu$  der Quarks berücksichtigt wird, da dann die obere Grenze von  $z$  durch  $1 - 2\mu^2 x_p / |q^2|$  definiert ist. Die Masse eingeschlossener Quarks ist insbesondere für die  $u$ - und  $d$ -Quarks keine wohldefinierte Größe, und wir fassen daher  $\mu$  als eine relativ frei wählbare Energieskala auf, die zur Regularisierung des divergenten Integrals über  $z$  dient. Die Durchführung der Integration hat nun

$$\sigma_t = 2\pi Q_f^2 \alpha \alpha_S \frac{x_p}{|q^2|} P^{qq} \ln \left( \frac{|q^2|}{\mu^2} \right) \quad (5.109)$$

mit

$$P^{qq} = \frac{4}{3} \frac{1 + x_p^2}{1 - x_p} \quad (5.110)$$

zum Ergebnis. Die Splitting-Funktion  $P^{qq}$  der Quarks ist auch schon altbekannt. Sie wird hier als Funktion des Impulsbruchteils  $x_p$  angegeben und ist – bis auf den Farbfaktor  $4/3$  – mit der Splitting-Funktion  $P^{ee}$  der QED aus (3.286) identisch. Genau genommen sollte das Argument des Logarithmus noch einen Faktor  $2x_p$  enthalten, der aber ebenfalls vernachlässigt wird, da  $P^{qq}$  nur für  $x_p \rightarrow 1$  große Beiträge liefert und  $\mu$  frei wählbar ist.

Der longitudinale Querschnitt  $\sigma_\ell$  enthält keine Divergenzen und kann in der LL-Näherung vernachlässigt werden. Den Zusammenhang (5.72) zwischen Wirkungsquerschnitt und Strukturfunktion bedenkend, liefert (5.109) für jede Quarksorte den Beitrag

$$\Delta F_2 = \frac{\alpha_S}{2\pi} Q_f^2 \ln \frac{|q^2|}{\mu^2} \int_x^1 x_p P^{qq}(x_p) q_f(\xi) d\xi \quad (5.111)$$

der Diagramme in Abb. 5.19 zu  $F_2$ . Die verbleibende kollineare und infrarote Divergenz bei  $x_p = 1$  wird wieder durch Hinzunahme der virtuellen Korrekturen behoben. Die Diskussion ist ziemlich kompliziert, aber wie in der QED

läuft die Berücksichtigung dieser Korrekturen auf die Substitution von  $P^{qq}$  durch die regularisierte Splitting-Funktion  $P_+^{qq}$  hinaus. Diese ist im Kasten auf S. 225f. erläutert. Unter dem Integral von (5.111) ersetzen wir noch  $\xi$  durch  $x_p$  und wechseln von der Strukturfunktion direkt zu den Quarkdichten, die demnach jetzt durch

$$q_f(x, q^2) = q_f(x) + \frac{\alpha_S}{2\pi} \ln \frac{|q^2|}{\mu^2} \int_x^1 q_f\left(\frac{x}{x_p}\right) P_+^{qq}(x_p) \frac{dx_p}{x_p} \quad (5.112)$$

gegeben sind.

Intuitiv scheint es nun vielversprechend zu sein, die Dichten  $q_f(x)$  auf der rechten Seite mit den bei kleinen  $|q^2|$  gemessenen Verteilungen zu identifizieren, da diese ja empirisch gut das Skalenverhalten erfüllen und sich relativ einfach parametrisieren lassen (5.95). Dies ist aber nicht konsequent, da wir nicht wissen, bei welcher Skala die Gluonabstrahlung beginnt. Es ist im Gegenteil sogar so, daß  $q_f(x)$  in (5.112) eine prinzipiell nichtmeßbare „nackte“ Partondichte ist, ganz ähnlich wie die nackte Ladung der QED aus Abschn. 3.1.4. Wir identifizieren daher jetzt die Ausgangsverteilungen mit den *renormierten* Quarkdichten  $q_f(x, \mu_F^2)$ , die mit den nackten Verteilungen gemäß (5.112)

$$q_f(x, \mu_F^2) = q_f(x) + \frac{\alpha_S}{2\pi} \ln \frac{\mu_F^2}{\mu^2} \int_x^1 q_f\left(\frac{x}{x_p}\right) P_+^{qq}(x_p) \frac{dx_p}{x_p} \quad (5.113)$$

verknüpft sind. Diese Renormierung wird so interpretiert, daß die Divergenzen der Integrale bei der sog. Faktorisierungsskala  $\mu_F$  in die Definition der Partondichten absorbiert werden. Der Vergleich mit (5.112) zeigt nun, daß bis auf Terme der Ordnung  $\alpha_S^2$  die Partondichte  $q_f(x, q^2)$  aus der Dichte  $q_f(x, \mu_F^2)$  mit Hilfe von

$$q_f(x, q^2) = q_f(x, \mu_F^2) + \frac{\alpha_S}{2\pi} \ln \frac{|q^2|}{\mu_F^2} \int_x^1 q_f\left(\frac{x}{x_p}, \mu_F^2\right) P_+^{qq}(x_p) \frac{dx_p}{x_p} \quad (5.114)$$

berechnet werden kann.

Die letzte Gleichung stellt eine fundamentale Vorhersage der QCD dar. Ausgehend von gemessenen Verteilungen bei einem beliebigen Wert  $|q^2| = \mu_F^2$  sind die Quarkdichten bei jedem anderen  $|q^2|$  berechenbar! Man sagt, die Evolution der Quarkdichten ist durch die QCD festgelegt. Formal entspricht (5.114) vollständig der Formel (3.131) für die renormierten Ladungen. Diese Analogie läßt sich noch weiter treiben. Die laufenden Kopplungen genügen einer Differentialgleichung (Übung auf S. 192). Für  $q_f(x, q^2)$  kann ebenfalls eine Differentialgleichung gewonnen werden, wenn zunächst die führenden Logarithmen der Beiträge höherer Ordnung zu (5.114) berechnet werden. Die gesuchte Integro-Differentialgleichung lautet dann

$$\frac{q^2 dq_f(x, q^2)}{dq^2} = \frac{\alpha_S(q^2)}{2\pi} \int_x^1 q_f\left(\frac{x}{x_p}, q^2\right) P_+^{qq}(x_p) \frac{dx_p}{x_p} . \quad (5.115)$$

Sie ist in der Struktur identisch zu der Gleichung, die durch Differenzieren von (5.114) erhalten werden kann, aber auf der rechten Seite finden wir jetzt die laufende Kopplungskonstante  $\alpha_S(q^2)$  und die Partondichte  $q_f$  bei der Skala  $q^2$ . Die Gleichung enthält daher die bemerkenswerte Feststellung, daß die starke Kopplungskonstante durch Messung der Steigung der Partondichten, also auch der Steigung von  $F_2(x, q^2)$ , bestimmt werden kann.

Für eine quantitative Analyse der Verletzung des Skalenverhaltens reicht (5.115) noch nicht aus. Es muß nämlich bedacht werden, daß die Gluonen im Nukleon und das virtuelle Photon über die Paarerzeugung  $\gamma^* g \rightarrow q\bar{q}$  zusätzliche Quarks und Antiquarks produzieren, an denen die Elektronen streuen können. Die Berücksichtigung dieser Photon-Gluon-Fusion ergibt einen weiteren Term in (5.114), dessen Struktur aber sehr ähnlich zum quark-induzierten Term ist. Die Quarkdichte wird durch die Gluondichte  $g$  ersetzt, und an die Stelle der Splittingfunktion  $P_+^{qq}$  tritt die Splittingfunktion  $P_+^{gq}$ , die die Aufspaltung eines Gluons in ein Quark-Antiquark-Paar beschreibt. Der zusätzliche Term läßt sich vermeiden, wenn Differenzen von Quarkdichten, wie z.B.  $u - d$ , betrachtet werden. Diese sog. *non singlet*-Verteilungen  $q^{\text{NS}}$  bekommen keine Beiträge von der Photon-Gluon-Fusion, da  $P^{gq}$  unabhängig von der Quarksorte ist.<sup>11</sup>

Experimentell kann die Entwicklung einer Quarkdichte  $q^{\text{NS}}$  durch die Betrachtung der *non singlet*-Strukturfunktion

$$F_2^{\text{NS}} = F_2^p - F_2^n \quad (5.116)$$

studiert werden, da die zugehörige Partondichte gemäß (5.90) mit

$$q^{\text{NS}} = u_v - d_v \quad (5.117)$$

angesetzt werden kann.

Die Evolution von  $q^{\text{NS}}$  ist durch (5.115) bestimmt. Dies ist eine der berühmten Altarelli-Parisi-Gleichungen [Bar97, Qui83], die häufig auch als DGLAP-Gleichungen (für Dokshitzer, Gribov, Lipatov, Altarelli und Parisi) bezeichnet werden.<sup>12</sup> Sie stehen ganz im Zentrum quantitativer Analysen der Nukleonstruktur. Wenn die Beschränkung auf  $q^{\text{NS}}$  aufgegeben wird, erhält man ein System gekoppelter Integro-Differentialgleichungen für die Quarkdichten  $q, \bar{q}$  und die Gluondichte  $g$  oder für die Linearkombinationen  $q^{\text{NS}}, q^{\text{S}}$  und  $g$ , wobei  $q^{\text{S}}$  als Singulett-Dichte bezeichnet wird. Dieses Gleichungssystem wird in vielen Lehrbüchern, z.B. [Bar97] ausführlich diskutiert.

Infolge der Vernachlässigung aller kleinen Terme ist in der LL-Näherung automatisch die Callan-Gross-Relation (5.69) erfüllt. In dieser Näherung gilt also  $F_\ell = 0$  und

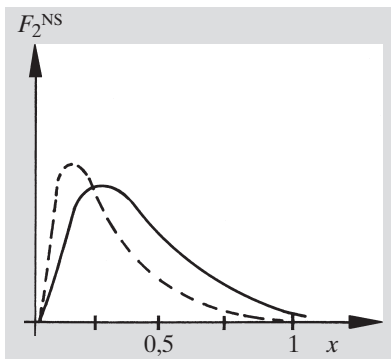
$$F_2 = x \sum_f Q_f^2 [q_f(x, q^2) + \bar{q}_f(x, q^2)] . \quad (5.118)$$

Es ist aber auch klar, daß ohne diese Vernachlässigung der kleinen Terme eine QCD-Vorhersage für die longitudinale Strukturfunktion

$$F_\ell = F_2 - 2xF_1 \quad (5.119)$$

<sup>11</sup>Der Name *non singlet* bezieht sich auf das Verhalten einer solchen Kombination von Quarkdichten unter Transformationen der *flavor*-Symmetriegruppe.

<sup>12</sup>Die bahnbrechende Arbeit [Alt77] von G. Altarelli und G. Parisi gehört mit über 2000 Zitaten zu den am häufigsten genannten wissenschaftlichen Veröffentlichungen. Durch den Namen „DGLAP-Gleichung“ werden auch die Beiträge der russischen Theoretiker Y.N. Dokshitzer, V.N. Gribov und L.N. Lipatov gewürdigt.



**Abb. 5.21**

Qualitative Änderung der Strukturfunktion  $F_2^{\text{NS}}$  mit  $|q^2|$ . Die durchgezogene Kurve zeigt den Verlauf bei kleinen Impulsüberträgen, während die gestrichelte Kurve für hohe Werte von  $|q^2|$  gilt

erhalten werden kann. Der longitudinale Anteil der QCD-Compton-Streuung kann z.B. mit Hilfe von (5.103) berechnet werden. Hinzu kommt noch der Anteil der Photon-Gluon-Fusionsprozesse. Mit einer quantitativen Behandlung wollen wir aber jetzt ein ohnehin mit Theorie überladenes Kapitel nicht weiter befrachten, sondern uns noch der anschaulichen Interpretation der Strukturfunktion und den Meßergebnissen zuwenden.

Die  $|q^2|$ -Abhängigkeit der Strukturfunktion ist intuitiv einsichtig, da mit wachsenden Werten von  $|q^2|$  ein immer größerer Phasenraum für Strahlungsprozesse zur Verfügung steht. Die Abstrahlung bewirkt, daß es weniger Quarks mit hohen Impulsen gibt und die Quarks bei kleinen  $x$  angereichert werden. Das Integral der Quarkdichten bleibt dabei konstant, da die Normierungsbedingungen (5.85) auch für die laufenden Quarkdichten gültig bleiben. Formal kann dies in unserer Näherung mit Hilfe von  $\int_0^1 P_+^{qq}(x_p) dx_p = 0$  bewiesen werden. Man erwartet also qualitativ ein Verhalten, wie es in Abb. 5.21 skizziert ist. Dies wird durch die Messungen glänzend bestätigt. Die Abb. 5.22 zeigt die Zusammenfassung der früheren Messungen an Beschleunigern mit einem externen Elektronen- oder Myonenstrahl und der am  $ep$ -collider HERA gewonnenen Resultate, diesmal aufgetragen als Funktion von  $|q^2|$  mit  $x$  als Parameter zur Unterscheidung der Kurven. Die Präzision der Daten und der riesige überdeckte Bereich in der  $|q^2|$ ,  $x$ -Ebene ist beeindruckend. Die eingezeichneten Kurven sind das Resultat einer QCD-Evolutionsanalyse in *next to leading order* (NLO), die nicht nur die Beiträge der führenden Logarithmen berücksichtigt. Bei den höchsten  $x$ -Werten sieht man eine schwache Verletzung des Skalenverhaltens, also ein langsames Abfallen der Strukturfunktion  $F_2$  für  $|q^2|$ -Werte zwischen 5 und 20 000 GeV<sup>2</sup>. Bei  $x = 0,25$ , das ist in der Nähe der Überkreuzung der beiden Kurven in Abb. 5.21, ist  $F_2$  praktisch konstant. Interessanterweise wurde das Skalenverhalten der Strukturfunktion gerade bei diesen  $x$ -Werten entdeckt (Abb. 5.13). Schließlich wird für  $x \leq 5 \cdot 10^{-3}$  eine deutliche Zunahme der Strukturfunktion bei wachsendem  $|q^2|$  gefunden. Auch diese relativ starke Verletzung des Skalenverhaltens wird hervorragend von der perturbativen QCD beschrieben.

Weil die Brechung des Skalenverhaltens der Strukturfunktionen eine unmittelbare Folge der Gluonstrahlung und der  $\gamma g$ -Reaktionen ist, lassen sich die Gluondichten  $g(x, q^2)$  durch Analyse der  $q^2$ -Evolution von  $F_2$  berechnen. Eine direktere und vielleicht anschaulichere Methode besteht in der Messung der inklusiven Photoproduktion von  $\psi$ -Mesonen,

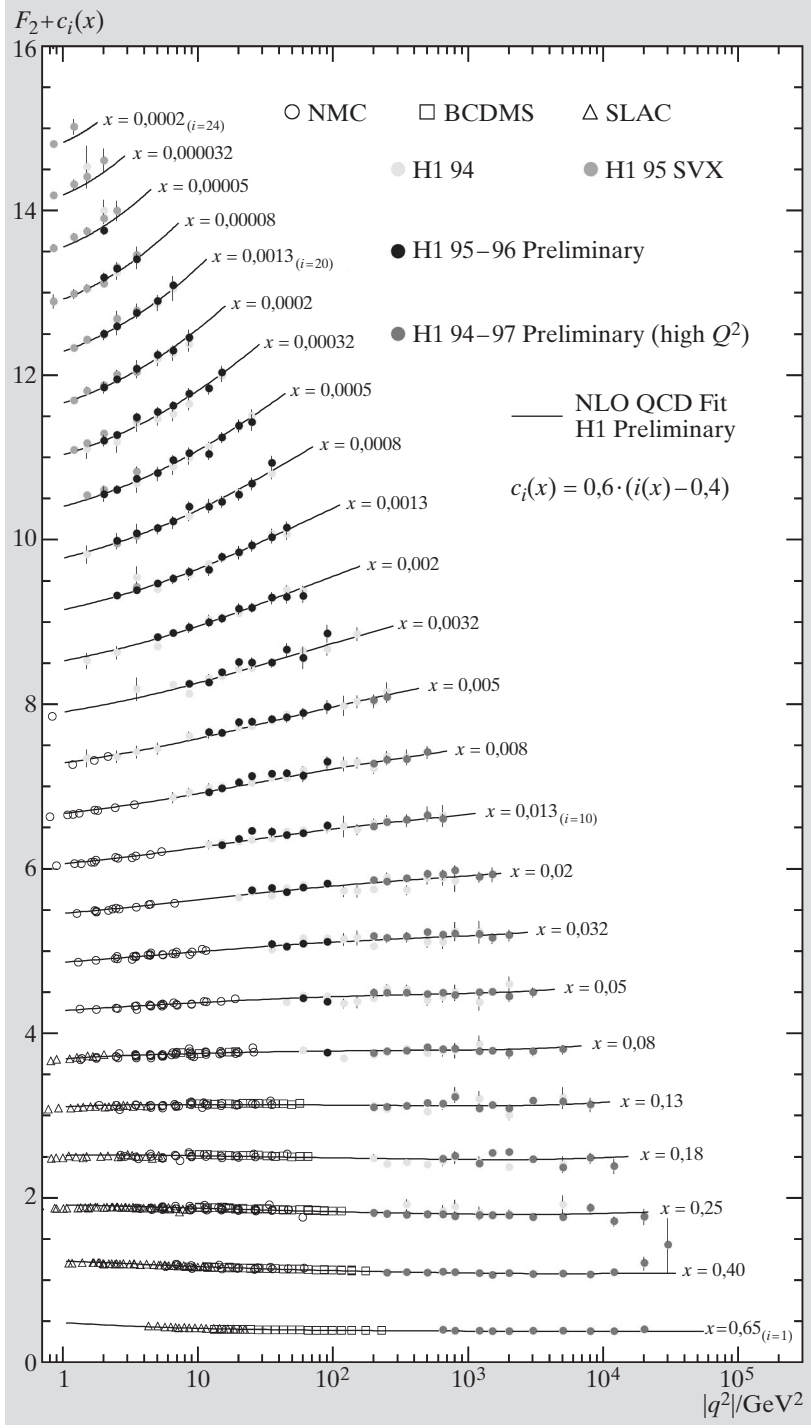
$$\gamma + p \rightarrow \psi + X \quad (5.120)$$

in Strahlen reeller Photonen. Die experimentelle Signatur der Reaktion ist ziemlich klar, da man die  $\psi$ -Resonanzen durch ihren  $\mu^- \mu^+$ -Zerfall rekonstruieren kann. Die Gluonen im Nukleon erzeugen  $c\bar{c}$ -Quarks in der Reaktion der Paarerzeugung (Abb. 5.23a)

$$\gamma + g \rightarrow c + \bar{c} \quad (5.121)$$

die man häufig auch „Gamma-Gluon-Fusion“ nennt. Da das  $\psi$  ein Farbsingulett ist, muß zusätzlich ein (weiches) Gluon abgestrahlt werden (Abb. 5.23b).<sup>13</sup>

<sup>13</sup>Außerdem wird auf diese Weise ein Konflikt mit Yangs Theorem, Abschn. 2.4.7, vermieden, das den Übergang von zwei Photonen in ein Vektormeson verbietet.

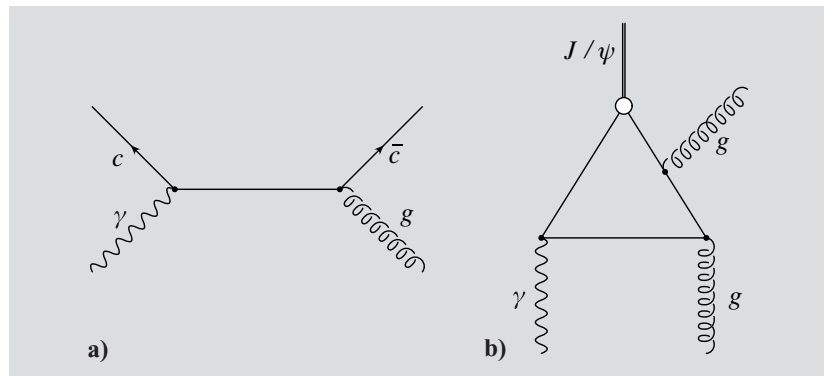


**Abb. 5.22**

Resultate des H1-Experiments am *ep*-collider HERA für die Strukturfunktion  $F_2$  zusammen mit Ergebnissen früherer Experimente am ruhenden Proton. Man beachte, daß die Skala der Abszisse sich ändert

**Abb. 5.23a,b**

Die Erzeugung von (a) *charm*-Quarks und (b)  $J/\psi$ -Mesonen in der Gamma-Gluon-Fusion



In der Diskussion des letzten Abschnitts haben wir uns vom engen Zusammenhang der Photoproduktion und der Elektronenstreuung bei kleinen Impulsüberträgen überzeugt. Die Photoerzeugung von  $c\bar{c}$  oder  $b\bar{b}$  in der Gamma-Gluon-Fusion studiert man daher praktischerweise in der inelastischen Elektronenstreuung bei sehr kleinen Werten von  $|q^2|$ . Solche Untersuchungen werden z.B. am Elektron-Proton-Speicherring HERA in Hamburg durchgeführt.

### 5.3.5 Der Endzustand

Wie in der Elektron-Positron-Vernichtung formieren sich auch im Endzustand der tief inelastischen Lepton-Nukleon-Streuung die Hadronen zu *Jets*. Entsprechend der Abb. 5.12 besteht der Endzustand in der niedrigsten Ordnung aus einem Quark-Jet mit dem Transversalimpuls des gestreuten Elektrons und einem aus dem Protonrest gebildeten Jet, der im  $ep$ -Schwerpunktsystem entlang der Richtung des einfallenden Protons läuft. Um zwischen dem Jet vom Protonrest und dem Jet aus der harten Streuung zu unterscheiden, werden solche Topologien als  $(1+1)$ -Ereignisse bezeichnet. Ein bestimmter Bruchteil der Strahlungsprozesse der Abb. 5.19 und der  $\gamma^*g \rightarrow q\bar{q}$  Prozesse führt dann zu  $(2+1)$ -Jet Ereignissen. Die genaue Zahl dieser Ereignisse hängt natürlich wieder vom Auflösungskriterium des Klassifizierungsalgorithmus ab.

Die in der Lepton-Nukleon-Streuung erzeugten Jets aus der harten Streureaktion sollten sich nach dem zugrundeliegenden Modell nicht von den Jets der  $e^-e^+$ -Annihilation unterscheiden. Ein wichtiger Test darauf besteht in der Untersuchung der in Abschn. 5.1.3 eingeführten Fragmentierungsfunktionen  $D^h(z)$ . Der Bruchteil  $z$  des Longitudinalimpulses, den ein Hadron ( $h$ ) vom fragmentierenden Quark ( $q$ ) übernimmt, kann durch

$$z = \frac{E_h}{E_q} \quad (5.122)$$

angenähert werden. Damit gilt im  $e^-e^+$ -Schwerpunktsystem

$$z = E_h/E \quad (5.123)$$



für die Paarvernichtung  $e^-e^+ \rightarrow q\bar{q}$ . Im Fall der Lepton-Nukleon-Streuung gewinnen wir aus dem Ansatz  $p_h^\mu = zk^\mu$  die invariante Definition

$$z = \frac{p_h \cdot P}{k \cdot P}, \tag{5.124}$$

die im Ruhesystem des Nukleons bei Vernachlässigung der Nukleon-Masse den Wert

$$z = E_h/yE \tag{5.125}$$

annimmt.

Insbesondere bei kleinen  $z$ -Werten kann es sein, daß ein Hadron aus dem Proton-Rest mit einem Hadron aus den Quark- (oder Gluon-) Jets verwechselt wird. In neueren Analysen wird daher die Elektronenstreuung im sog. Breit-System analysiert. In diesem Bezugssystem erleidet das Elektron keinen Energieverlust, sondern nur eine Richtungsänderung. Es gilt also  $q^2 = -q_B^2$  bzw.

$$q_B^\mu = (0, 0, 0, \sqrt{|q^2|}) . \tag{5.126}$$

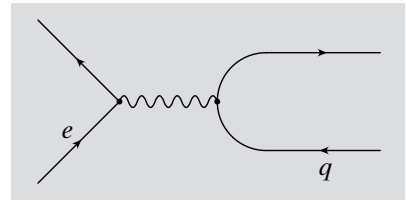
Aus der Energie-Impuls-Erhaltung folgt, daß das einlaufende Quark in sich selbst reflektiert wird (Abb. 5.24),  $k' = -k$  und

$$k'^\mu = (\sqrt{|q^2|}/2, 0, 0, \sqrt{|q^2|}/2) . \tag{5.127}$$

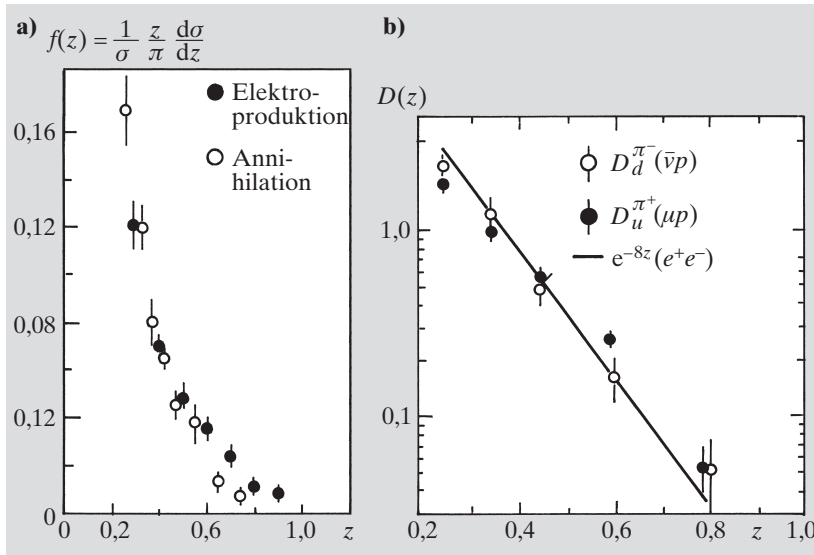
Hierdurch wird eine maximale Trennung des Protonrests vom gestreuten Quark bewirkt. Dieses befindet sich in der sog. Strom-Hemisphäre des Koordinatensystems, während die Bruchstücke des Protons in die Rest-Hemisphäre fliegen. Aus (5.127) folgt unmittelbar

$$z = \frac{2E_h}{\sqrt{|q^2|}} , \tag{5.128}$$

wobei  $E_h$  jetzt die Energie des Hadrons im Breit-System ist.



**Abb. 5.24**  
Die Elektron-Quark-Streuung im Breit-System



**Abb. 5.25a,b**  
(a) Verteilung der Longitudinalimpulse von Pionen in der Elektron-Proton-Streuung und der  $e^-e^+$ -Annihilation. (b) Verteilung der Longitudinalimpulse in der Lepton-Nukleon-Streuung bei höheren Werten von  $|q^2|$ . Die durchgezogene Linie repräsentiert die Daten der Annihilation

Schon die Daten eines frühen Experiments [Ber77] (Abb. 5.25a) zeigten eine überraschend gute Übereinstimmung der Verteilungsfunktionen  $D^h(z)$  bei noch sehr geringen Werten von  $|q^2|$ . Wir bemerken also auch hier wieder, wie schnell hadronische Korrekturen bei inklusiven Prozessen mit  $|q^2|$  abklingen. Genaue Untersuchungen der Jeteigenschaften aus ganz unterschiedlichen Streuprozessen wurden in großer Zahl durchgeführt. Sie beweisen, daß die Hadronisierung der Quarks und Gluonen in der Tat universell ist (Abb. 5.25b).

### Übungen

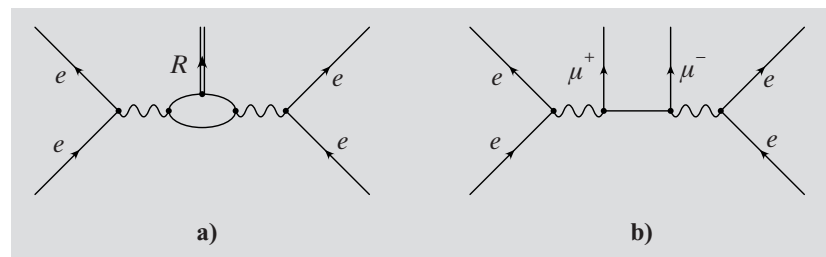
- 5.6 Drücken Sie  $x$  und  $y$  in Abhängigkeit von Energie und Winkel des gestreuten Elektrons in einem Elektron-Proton-Speicherringexperiment aus.
- 5.7 Leiten Sie (5.75) ab.

## 5.4 Zwei-Photonen-Physik

Die Elektron-Positron-Paarvernichtung und die Elektron-Myon-Streuung sind Prozesse mit zwei einlaufenden und zwei auslaufenden Teilchen. In der Störungstheorie niedrigster Ordnung werden die Querschnitte proportional zu  $\alpha^2$ . Mit der Bremsstrahlung haben wir einen Prozeß proportional zu  $\alpha^3$  kennengelernt, und nun diskutieren wir die Reaktion

$$e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+ + X, \quad (5.129)$$

deren Wirkungsquerschnitt für Baumgraphen proportional zu  $\alpha^4$  ist. In dieser Gleichung steht  $X$  für einen beliebigen Endzustand, z.B. ein Meson oder ein Myon-Paar (Abb. 5.26a bzw. 5.26b). Die Abbildungen zeigen, daß der Endzustand  $X$  im Gegensatz zur  $e^-e^+$ -Annihilation aus *zwei* virtuellen Photonen erzeugt wird, daher hat dieser Teil der Elektron-Positron-Reaktionen den Namen Zwei-Photonen-Physik erhalten. Naiverweise würde man vielleicht vermuten, daß die Wirkungsquerschnitte der Zwei-Photonen-Reaktionen um einen Faktor  $\alpha^2$  (d.h. etwa 20 000) gegenüber der  $e^-e^+$ -Annihilation unterdrückt sind und daher völlig vernachlässigt werden können. Eine so pauschale Argumentation ist aber nicht ohne weiteres zulässig, da man zeigen kann, daß der Wirkungsquerschnitt in bestimmten kinematischen Situationen



**Abb. 5.26a,b**

Beispiele für Prozesse der Zwei-Photonen-Physik: (a) Produktion einer Mesonresonanz, (b) Produktion von  $\mu^- \mu^+$ -Paaren

große Logarithmen enthält, die bei hohen Elektron- und Positron-Energien  $E$  den Faktor  $\alpha^2$  teilweise kompensieren.

### 5.4.1 Resonanzzeugung

Als erstes Beispiel betrachten wir die Erzeugung von Mesonen oder Mesonresonanzen ( $R$ ) in Zwei-Photonen-Reaktionen, also den Prozeß

$$e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+ + R \quad (5.130)$$

Dieser wird experimentell an Elektron-Positron-Speicherringen untersucht, und explizite Angaben von Energien und Winkeln in den folgenden Formeln beziehen sich daher immer auf das Schwerpunktsystem der einlaufenden Elektronen und Positronen. Die Amplitude der Reaktion (5.130) ist wegen des Beitrages der beiden Photonpropagatoren proportional zu  $1/(q_1^2 q_2^2)$ . Sie wird also groß, wenn die beiden Photonen fast reell sind, daher berechnen wir den Querschnitt in der Weizsäcker-Williams-Näherung.

Der Wirkungsquerschnitt für die Resonanzproduktion in Zwei-Photonen-Reaktionen läßt sich demnach in der Form

$$d^2\sigma(e^-e^+ \rightarrow e^-e^+R) = \sigma_{\gamma\gamma}^R(\hat{s}) f_{\gamma/e}(z_1, |q_1^2|_{\max}) dz_1 f_{\gamma/e}(z_2, |q_2^2|_{\max}) dz_2 \quad (5.131)$$

anschreiben, wobei  $\sigma_{\gamma\gamma}^R$  der totale Querschnitt für die Erzeugung einer Resonanz in Abhängigkeit von der Schwerpunktsenergie  $\sqrt{\hat{s}}$  im System der beiden quasireellen Photonen ist. Im Sinne der Weizsäcker-Williams-Näherung sind in diesem Querschnitt keine Korrekturen enthalten, die die Virtualität der Photonen berücksichtigen.

Die Verteilungsfunktionen  $f_{\gamma/e}$  der Photonen entnehmen wir (3.244)

$$f_{\gamma/e} = \frac{\alpha}{2\pi} P^{e\gamma} L \quad (5.132)$$

worin der Logarithmus

$$L = \ln \frac{|q_i^2|_{\max}(1-z_i)}{m^2 z_i^2} \quad (5.133)$$

sich in der sogenannten *antitag*-Konfiguration besonders einfach darstellen läßt. In dieser Anordnung wird sichergestellt, daß nur solche Ereignisse berücksichtigt werden, bei denen die auslaufenden Elektronen und Positronen in der Strahlröhre verbleiben. Die zugehörigen maximalen Streuwinkel sind klein (z.B.  $\leq 3^\circ$ ), so daß mit  $|q_i^2|_{\max} \approx E^2(1-z_i)\Theta_{i,\max}^2$  der Logarithmus durch

$$L = 2 \ln \frac{E(1-z_i)\Theta_{i,\max}}{m z_i} \quad (5.134)$$

gegeben ist. Für grobe Abschätzungen wird häufig die schon in Abschn. 3.3.2 diskutierte Näherung

$$L = 2 \ln \frac{E}{m} \quad (5.135)$$

benutzt.

Um den totalen Wirkungsquerschnitt der Reaktion (5.130) zu erhalten, muß man (5.131) integrieren. Dazu nimmt man zweckmäßigerweise eine Variablentransformation vor. Mit der Definition  $z = \hat{s}/s$  und den Beziehungen

$$\begin{aligned} z &= z_1 z_2 \\ r &= \frac{z_1}{z_2} \end{aligned} \quad (5.136)$$

wird (5.131) zu

$$\frac{d\sigma}{dz}(e^-e^+ \rightarrow e^-e^+R) = \sigma_{\gamma\gamma}^R(zs) \int_z^{1/z} f_{\gamma/e}(\sqrt{zr}) f_{\gamma/e}(\sqrt{z/r}) \frac{1}{2r} dr \quad (5.137)$$

umgeformt. Die Argumente  $|q_i^2|$  der Photondichten  $f_{\gamma/e}$  wurden hier der Einfachheit halber nicht explizit angegeben. Das Integral

$$L_{\gamma\gamma}(z) = \int_z^{1/z} f_{\gamma/e}(\sqrt{zr}) f_{\gamma/e}(\sqrt{z/r}) \frac{1}{2r} dr \quad (5.138)$$

wird als Luminositätsfunktion bezeichnet. Sie wurde zuerst von Low [Low60] in der Näherung (5.135) für den Logarithmus berechnet. Das Standardresultat lautet

$$L_{\gamma\gamma} = \left( \frac{\alpha}{\pi} \ln \frac{E}{m} \right)^2 g(z) \quad (5.139)$$

worin die Funktion  $g(z)$  durch

$$g(z) = \frac{1}{z} \left[ (2+z)^2 \ln(1/z) - 2(1-z)(3+z) \right] \quad (5.140)$$

definiert ist. Für kleine  $z$ -Werte wird  $g(z)$  sehr groß. In dieser Region können wir die Luminositätsfunktion durch

$$L_{\gamma\gamma} = \left( \frac{\alpha}{\pi} \ln \frac{E}{m} \right)^2 \frac{4}{z} \ln \frac{1}{z} \quad (5.141)$$

approximieren. Wichtig ist die Kompensation des Faktors  $(\alpha/\pi)^2$  für große  $E$  und kleine  $z$  in diesem Ausdruck. Auch hier begegnet man wieder der schon in Abschn. 3.3.2 behandelten effektiven Kopplung  $\alpha L$ , die nur schwach von der Strahlenergie  $E$  abhängt. Die Luminositätsfunktion ist in Abb. 5.27 für eine Strahlenergie von 20 GeV als Funktion von  $z$  aufgetragen. Man erkennt  $L_{\gamma\gamma} = 1$  bei  $z \approx 0,008$ , d.h.  $\sqrt{\hat{s}} = 3,6$  GeV. Bei dieser Schwerpunktsenergie wird also die Photon-Photon-Luminosität gleich groß wie die Luminosität des Speicherrings.

Mit diesen Kenntnissen wollen wir jetzt die Formel für den totalen Wirkungsquerschnitt weiter auswerten. Die verbleibende Integration über  $z$  wird für relativ schmale Resonanzen vereinfacht, da dann  $L_{\gamma\gamma}$  praktisch nur an der Stelle  $z_R = M_R^2/s$  beiträgt,

$$\sigma(e^-e^+ \rightarrow e^-e^+R) = L_{\gamma\gamma}(z_R) \int \sigma_{\gamma\gamma}^R(zs) dz \quad (5.142)$$

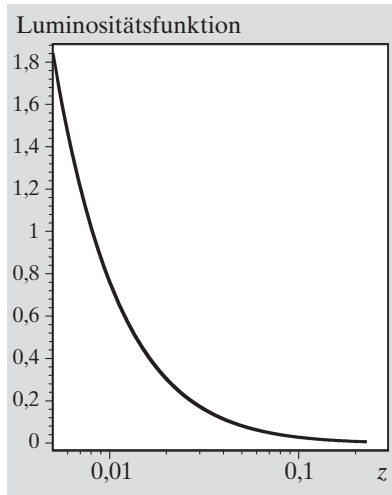
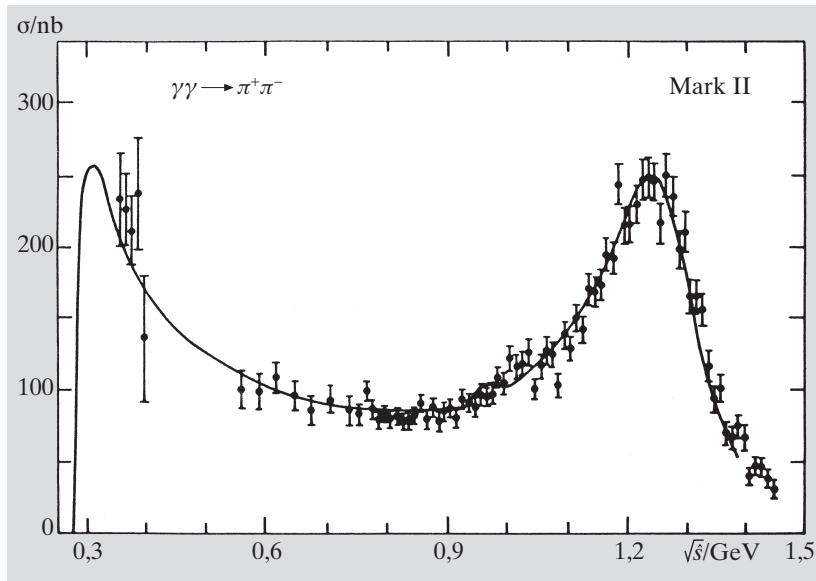


Abb. 5.27

Die  $\gamma\gamma$ -Luminosität eines  $e^-e^+$ -Speicherringes als Funktion von  $z = \hat{s}/s$  bei einer Strahlenergie von  $E = 20$  GeV



**Abb. 5.28**  
Produktion von  $f_2(1270)$ -Mesonen in der Photon-Photon-Streuung

Mit Hilfe von (2.261) und (2.263) und der Tatsache, daß das statistische Gewicht für zwei einlaufende Photonen  $1/2$  beträgt,<sup>14</sup> lautet das über alle Endzustände summierte Ergebnis für die Produktion eines Mesons mit dem Spin  $J$  und der Zwei-Photonen-Partialbreite  $\Gamma_{\gamma\gamma}$

$$\sigma(e^-e^+ \rightarrow e^-e^+R) = L_{\gamma\gamma}(z_R) \frac{8\pi^2(2J+1)\Gamma_{\gamma\gamma}}{4E^2M_R} . \quad (5.143)$$

Unter Benutzung der Näherung (5.141) erreichen wir schließlich

$$\sigma(e^-e^+ \rightarrow e^-e^+R) = 64\alpha^2 \frac{(2J+1)\Gamma_{\gamma\gamma}}{M_R^3} \ln^2 \frac{E}{m} \ln \frac{2E}{M_R} , \quad (5.144)$$

eine v.a. für Zählratenabschätzungen gut brauchbare Formel.

Die  $\gamma\gamma$ -Zerfallsbreite von Mesonen ist selbst wieder proportional zu  $\alpha^2$ , und damit wird der totale Wirkungsquerschnitt proportional zu  $\alpha^4$ . In Abschn. 4.5.3 hatten wir gesehen, daß diese Zerfallsbreite für viele Mesonen Werte von einigen eV bis zu einigen keV hat. Eine experimentelle Bestimmung durch Analyse der Zwei-Photonen-Reaktionen an Elektron-Positron-Speicherringen ist wegen des Faktors  $1/M_R^3$  in (5.144) daher nur für nicht zu große Massen der Resonanzen sinnvoll. In den letzten Jahren wurde hier eine Reihe von schönen Ergebnissen erzielt und ein neuer Zweig der Meson-Spektroskopie begründet. Natürlich darf die Berechnung des Photonenflusses nicht die vielen Näherungen der Beziehung (5.144) benutzen. Eine Integration von (5.131) ist aber mit numerischen Methoden gut möglich. Die Abb. 5.28 zeigt die Rekonstruktion von in Zwei-Photonen-Reaktionen erzeugten  $f_2$ -Mesonen in ihrem dominanten Zwei-Pionen-Zerfallskanal über einem nicht resonanten Untergrund. Die Experimente ergeben einen Wert von  $\Gamma_{\gamma\gamma} = 2,45 \pm 0,31$  keV, der gut mit Quarkmodell-Rechnungen übereinstimmt [Ber87a].

<sup>14</sup> Der Gewichtungsfaktor  $1/4$  der Spins muß mit 2 multipliziert werden, da  $\Gamma_{\gamma\gamma}$  für zwei *auslaufende* Photonen berechnet wird und daher einen Faktor  $1/2$  als Gewicht für zwei identische Teilchen im Endzustand enthält.

### 5.4.2 Die Strukturfunktion des Photons

Die Berechnung des Wirkungsquerschnitts für die Paarzeugung von Myonen (Abb. 5.26b) in der Reaktion

$$e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+ + \mu^- + \mu^+ \quad (5.145)$$

birgt in der Näherung, daß beide Photonen beinahe auf der Massenschale sind, ( $q_1^2, q_2^2 \approx 0$ ) keine große Schwierigkeiten. Man muß offenbar entsprechend zum Vorgehen im letzten Abschnitt zwei Flußfaktoren  $f_1$  und  $f_2$  mit dem in Abschn. 3.2.5 angegebenen Querschnitt für die Myon-Paarzeugung durch reelle Photonen falten. Dies wollen wir hier nicht weiter verfolgen, sondern uns einer interessanteren kinematischen Situation zuwenden.

Wir betrachten eine Versuchsanordnung, in der nur eines der beiden Photonen, sagen wir das vom Positron abgestrahlte, quasireell ist, während das andere beliebige virtuelle Massen annehmen kann. Experimentell wird dies erreicht, indem die Streuwinkel für das Positron möglichst klein gehalten werden (typisch  $< 3^\circ$ ), das gestreute Elektron jedoch im gesamten Raumwinkelbereich untersucht wird. Der zugehörige Wirkungsquerschnitt läßt sich offenbar aus einer Multiplikation des Photonenspektrums  $f_{e/\gamma}$  mit dem inelastischen Elektron-Photon-Streuquerschnitt bestimmen,

$$d\sigma(e^- e^+ \rightarrow e^- e^+ X) = d\sigma(e^- \gamma \rightarrow e^- X) f_{e/\gamma}(z_2, \Theta_2) dz_2 . \quad (5.146)$$

Das Symbol  $X$  steht zunächst für ein Myonpaar. Wir ersetzen aber die Myonen sofort durch Quarks und nehmen wie früher an, daß die Quarks in einen beliebigen Endzustand  $X$  fragmentieren. Die Formel (5.146) beschreibt dann die Hadronproduktion in Zwei-Photonen-Reaktionen, wobei eines der Photonen eine große virtuelle Masse besitzt (Abb. 5.29).

Den Wirkungsquerschnitt für die inelastische Elektronen-Streuung,  $e\gamma \rightarrow eX$ , können wir direkt aus (5.67) übernehmen, wenn wir in Gedanken das einlaufende Proton durch ein einlaufendes Photon ersetzen. Das Resultat lautet

$$\frac{d^2\sigma^{e\gamma}}{dq^2 dx} = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4 x} \left[ (1-y)F_2^\gamma + xy^2 F_1^\gamma \right] . \quad (5.147)$$

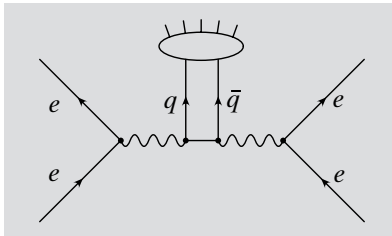
Die Variablen  $x$  und  $y$  lassen sich aus den Definitionen (5.59) und (5.57) unmittelbar für den Fall der Elektron-Photon-Streuung auswerten (wobei  $P$  jetzt den Viererimpuls des kollinear mit dem Positron abgestrahlten reellen Photons bezeichnet),

$$x = \frac{-q^2}{W^2 - q^2} \quad (5.148)$$

und

$$y = 1 - \frac{E'_1}{E} \cos^2(\Theta_1/2) . \quad (5.149)$$

In der letzten Gleichung sind  $E'_1$  und  $\Theta_1$  Energie und Winkel des auslaufenden Elektrons. Die Strukturfunktion ist wiederum durch die Zahl der Quarks mit dem Bruchteil  $x$  des Photon-Impulses definiert. Im Gegensatz zur Nukleon-Strukturfunktion werden bei der Summation die Antiquarks aber nicht als



**Abb. 5.29**  
Feynman-Diagramm der Hadron-Produktion in der Elektron-Photon-Streuung

eine eigene Sorte gezählt, und somit gilt für den Zusammenhang mit der Verteilungsfunktion  $f_{q/\gamma}$

$$F_2^\gamma(x, q^2) = 2x \sum_f 3Q_f^2 f_{q/\gamma}(x, q^2) . \quad (5.150)$$

Der Faktor 3 in der Summe kommt von den drei Farbfreiheitsgraden, damit wird  $f_{q/\gamma}(x, q^2) dx$  die Zahl der Quarks einer bestimmten Farbe und einer bestimmten Sorte mit Impulsbruchteilen zwischen  $x$  und  $x + dx$ .

Der Leser, der der Diskussion bis hierhin gefolgt ist, wird sich vielleicht fragen, wieso das Photon als elementares Feldteilchen jetzt eine Strukturfunktion bekommt, die bisher nur für zusammengesetzte Teilchen definiert war. Der Name ist nur durch die formale Ähnlichkeit der Streuformeln begründet. Die Funktion  $f_{q/\gamma}$  beschreibt nicht einen wirklichen Quarkinhalt, sondern die Wechselwirkung des Photons mit den elektrisch geladenen Quarks und ist ähnlich wie die mit ihr eng verwandte Funktion  $f_{\gamma/e}$  in der QED berechenbar.

#### Vertiefung

Eine Analyse der Berechnung von  $f_{\gamma/e}$  in der QED zeigt, daß die in Abschn. 3.3.1a eingeführte Splitting-Funktion  $P^{e\gamma}$  proportional zu  $|T_{fi}^2|$  für den Übergang  $e \rightarrow e\gamma$  wird, wobei  $|T_{fi}^2|$  einen Faktor

$$\frac{E^2 + E'^2}{\omega} \quad (5.151)$$

enthält.  $E$ ,  $E'$  und  $\omega$  sind die Energien des ein- und auslaufenden Elektrons bzw. des Photons in einem Bezugssystem hoher Impulse für das einlaufende Elektron. Mit  $z = \omega/E$  wird die angegebene Abhängigkeit der Splitting-Funktion  $P^{e\gamma}$  vom Impulsbruchteil  $z$  verständlich. Die Splitting-Funktion  $P^{\gamma e}$  ist mit  $P^{e\gamma}$  über eine *crossing*-Relation verwandt, da der Prozeß  $\gamma \rightarrow e^-e^+$  mit dem Prozeß  $e \rightarrow e\gamma$  durch Vertauschen des Photons mit dem Elektron verknüpft ist. Dies bedeutet die Ersetzung  $E \leftrightarrow \omega$  in (5.151) und daher erhält man

$$P^{\gamma e} = z^2 + (1-z)^2 . \quad (5.152)$$

Diese Splitting-Funktion ist ersichtlich symmetrisch in den Impulsbruchteilen der auslaufenden Elektronen und Positronen. Es fällt außerdem auf, daß sie keine Divergenz aufweist. Genau wie bei der Berechnung von  $f_{\gamma/e}$  in Abschn. 3.3.1a müssen wir noch den Logarithmus des Verhältnisses des maximalen und minimalen Impulsübertrages bestimmen. Diese Analyse führt dann zum Resultat

$$f_{e/\gamma} = \frac{\alpha}{2\pi} P^{\gamma e} \ln \frac{|k^2|_{\max}(1-z)}{m^2 z} \quad (5.153)$$

für die spektrale Verteilung der Elektronen und Positronen in einem Photon.

Das Ergebnis, dessen Herleitung im Kasten erläutert ist, lautet

$$f_{q/\gamma}(x, q^2) = Q_f^2 \frac{\alpha}{2\pi} \left[ x^2 + (1-x)^2 \right] \ln \frac{q^2(x-1)}{m_q^2 x}, \quad (5.154)$$

wobei die Bezeichnung der Variablen des Impulsbruchteils der betrachteten Situation angepaßt wurde. Außerdem wurde ein Faktor  $Q_f^2$  für die Ladung der Quarks eingefügt. Der maximale Impulsübertrag bei der Aufspaltung des reellen Photons in ein Quark-Antiquark-Paar ist durch  $|k^2|_{\max} = |q^2|$  festgelegt. In dieser Näherung gilt demnach für die Photonstrukturfunktion

$$F_2^\gamma(x, q^2) = 3 \sum_f Q_f^4 \frac{\alpha}{\pi} x \left[ x^2 + (1-x)^2 \right] \ln \frac{q^2(x-1)}{m_q^2 x}. \quad (5.155)$$

Wie in der Elektron-Proton-Streuung wird die  $e\gamma$ -Streuung durch zwei Strukturfunktionen  $F_1^\gamma$  und  $F_2^\gamma$  bestimmt. Auch  $F_1^\gamma$  läßt sich in der QED berechnen. Da die meisten Experimente jedoch bei kleinem  $y$  durchgeführt werden, kann man den Term mit  $F_1^\gamma$  in (5.147) i.allg. vernachlässigen. Das Resultat (5.155) hat einige sehr bemerkenswerte Eigenschaften. Zunächst einmal hängt die Strukturfunktion explizit von  $q^2$  ab, zeigt also auch ohne QCD-Korrekturen kein Skalenverhalten. Weiterhin steigt sie zu großen Werten von  $x$  an (Abb. 5.30), im Gegensatz zu hadronischen Strukturfunktionen. Beide Eigenschaften sind eine unmittelbare Folge der Tatsache, daß schon in niedrigster Ordnung der Störungstheorie die Strukturfunktion proportional zu  $f_{q/\gamma}$  wird, während  $f_{g/q}$  in den hadronischen Strukturfunktionen nur als Korrekturterm auftritt.

Das Quarkmodell-Resultat (5.155) hat den entscheidenden Nachteil, daß es explizit von den Quarkmassen abhängt, die aber für eingeschlossene Quarks nicht wohldefiniert sind. Von der Natur der Herleitung ausgehend, ist es naheliegend, die Konstituentenmassen, also etwa 300 MeV für die leichtesten Quarks, einzusetzen. In einer grundlegenden Analyse hat E. Witten gezeigt [Wit77], daß die QCD-Korrekturen (5.155) bei sehr großen Werten von  $|q^2|$  in

$$F_2^\gamma(x, q^2) = h(x) \ln \frac{|q^2|}{\Lambda^2} \quad (5.156)$$

abändern, wobei  $h(x)$  eine berechenbare Funktion ist, die – wie im Quarkmodell – mit  $x$  ansteigt. Der wesentliche Inhalt der Beziehung (5.155), nämlich die logarithmische Abhängigkeit von  $q^2$  und der Anstieg von  $F_2$  mit großen  $x$ , bleibt also auch in der QCD-Rechnung, d.h. unter Berücksichtigung einer zusätzlichen Gluonabstrahlung von den Quarks, erhalten. Die Quarkmassen werden durch den QCD-Parameter  $\Lambda$  ersetzt. Eine detaillierte Betrachtung dieser interessanten Fragen kann der Leser in der Literatur [Ber87a] finden.

In Abschn. 4.5.1 wurde ein hadronisches Modell der Photon-Hadron-Wechselwirkung, die Vektor-Meson-Dominanz, diskutiert. Da ein hochenergetisches reelles Photon z.B. in ein  $\rho$ -Meson fluktuieren kann, erwarten wir in den Meßergebnissen eine harte punktförmige Komponente gemäß (5.155) und eine weiche hadronische Komponente, die zu großen  $x$  hin abfällt und typisch



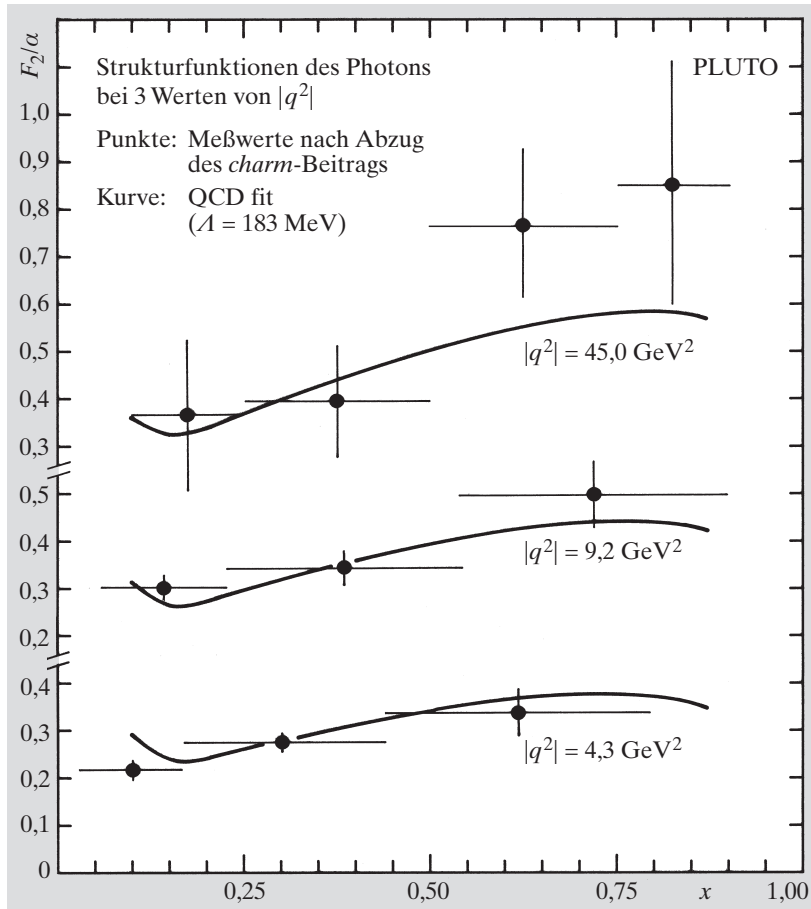


Abb. 5.30

Eine Messung von  $F_2^\gamma$  als Funktion von  $x$  und  $|q^2|$  [Ber87b]

für das Verhalten hadronischer Strukturfunktionen ist. Experimentell konnten in der Tat beide Komponenten isoliert werden. Für große Werte von  $|q^2|$  wird der punktförmige Anteil dominant. Die Abb. 5.30 zeigt das Ergebnis eines mit dem PLUTO-Detektor im DESY durchgeführten Experiments.<sup>15</sup> Die Kurven entsprechen den theoretischen Vorhersagen der QCD für  $F_2^\gamma$ .

### Übung

- 5.8 Schätzen sie die Erzeugungsraten von  $\pi^0$ -,  $\eta$ - und  $\eta'$ -Mesonen in Zwei-Photonen-Reaktionen am Speicherring PETRA (Strahlenergie 15 GeV) ab.

<sup>15</sup>Die großen experimentellen Arbeitsgruppen der Teilchenphysik sind meist nur noch durch den Namen des Detektors bekannt. Der Name PLUTO stammt aus einer Zeit, als bei DESY noch alle großen Magnete nach Gestalten der antiken Mythologie benannt wurden.

