Quantisierung von Feldern und ihre Interpretation

Einführung

Dieses Kapitel behandelt die Quantentheorie von Systemen mit unendlich vielen Freiheitsgraden und stellt somit die Grundlagen für die *Quantenfeldtheorie* bereit. Unterwirft man ein klassisches Feld wie beispielsweise das reelle Skalarfeld, die Maxwellschen Felder oder die dynamischen Variablen eines kontinuierlichen Systems der Mechanik den Regeln der Quantentheorie, so entstehen aus diesen Feldoperatoren, die Quanten dieses Feldes erzeugen oder vernichten können und die gleichzeitig die Kinematik und die Spineigenschaften dieser Quanten beschreiben. Damit wird es möglich, die Streutheorie auf solche Prozesse zu erweitern, bei denen Quanten oder Teilchen wirklich erzeugt oder vernichtet werden, die Teilchenzahl somit nicht mehr notwendig erhalten ist. Da die Quantisierung auf einer Formulierung mittels Lagrange- bzw. Hamiltondichten beruht, eine Formulierung, die man durch einen vergleichsweise kleinen Schritt der Verallgemeinerung aus der Punktmechanik gewinnt, ist es nicht schwer, alle Symmetrien und Invarianzen der Theorie einzubauen bzw. zu berücksichtigen. Die Erzeugung und Vernichtung von Teilchen oder Quanten durch Wechselwirkungsterme, die in Reaktionen oder Zerfallsprozessen auftreten, sind daher immer mit den Auswahlregeln der Theorie in Einklang.

Den einfachsten und begrifflich klarsten Zugang zur Theorie kräftefreier, quantisierter Felder bildet die *kanonische Quantisierung*, die von Born, Heisenberg und Jordan in enger Anlehnung an die Quantisierung der Hamiltonschen Mechanik von Systemen mit endlich vielen Freiheitsgraden entwickelt wurde. Alternativ dazu gibt es den intuitiven, physikalisch gut interpretierbaren Zugang über Weg- oder Pfadintegrale, der von Dirac und Feynman eingeführt wurde. Wir diskutieren den ersten dieser Zugänge, weil er für die Technik praktischer Rechnungen unverzichtbar ist. Der zweite, der das intuitive Verständnis fördert, würde den Rahmen dieses Kapitels sprengen.

Inhalt

2.1 Das Klein-Gordon-Feld 71
2.2 Das komplexe Klein-Gordon-Feld 96
2.3 Das quantisierte Maxwell-Feld 103
2.4 Wechselwirkung des quantisierten Maxwell-Feldes mit Materie . . 119
2.5 Kovariante Quantisierung des Maxwell-Feldes 132
2.6 *Der Zustandsraum der Quantenelektrodynamik . . 138

2.1 Das Klein-Gordon-Feld

Die Klein-Gordon-Gleichung ist in einem genauer zu beschreibenden Sinn ein Analogon der kräftefreien Schrödinger-Gleichung. Sie lautet

$$\Box\phi+\kappa^2\phi=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi-\Delta\phi+\kappa^2\phi=0\,,\quad \text{mit}\quad \kappa=\frac{mc}{\hbar} \tag{2.1}$$

Der Differentialoperator $\Box$, der hier auftritt, ist die Verallgemeinerung des Laplace-Operators auf die Minkowski-Raumzeit. Seine explizite Form in den Zeit- und Raumkoordinaten eines herausgegriffenen Bezugsssystems und das charakteristische Minuszeichen zwischen der zweiten Ableitung nach der Zeit einerseits und den zweiten Ableitungen nach den Raumkoordinaten andererseits folgen aus der Lorentz-invarianten Kontraktion der partiellen Ableitungen $\partial/\partial x^\mu$ und $\partial/\partial x_\mu$. Nach Zeit und Raum getrennt sind diese

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \boldsymbol{\nabla}\right) , \quad \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\boldsymbol{\nabla}\right) , \tag{2.2}$$

und somit ist

$$\Box = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2} - \Delta = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \, . \tag{2.3}$$

Die Konstante, die im zweiten Term von (2.1) auftritt, ist (bis auf einen Faktor 2π) das Inverse der Compton-Wellenlänge eines Teilchens mit Masse m,

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{\lambda^{(m)}}{2\pi} = \frac{\hbar}{mc} = \frac{\hbar c}{mc^2} \, .$$

Dies bedeutet, daß Prozesse, an denen ein solches Teilchen teilnimmt, durch die Länge $(\hbar c)/(mc^2) = (197{,}33\,\text{MeV}/mc^2)$ fm charakterisiert werden. Im Fall eines geladenen π-Mesons beispielsweise, das die Masse $m_{\pi^\pm} = 139{,}57$ MeV hat, ist diese Länge gleich $1{,}41$ fm.

Bis hierher habe ich schon zwei physikalische Aussagen gemacht, nämlich daß die Klein-Gordon-Gleichung das relativistische Analogon der kräftefreien Schrödinger-Gleichung und daß $\lambda^{(m)}$ eine für physikalische Prozesse relevante Länge sei. Bevor ich fortfahre, möchte ich diese beiden Aussagen etwas genauer beleuchten.

1. Versucht man die Klein-Gordon-Gleichung (2.1) mit dem folgenden Ansatz zu lösen

   $$f_p(x) = f_p(t, \boldsymbol{x}) = e^{-(\mathrm{i}/\hbar)p\cdot x} = e^{-\mathrm{i}/\hbar(cp^0 t - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})} \, ,$$

   wobei $p = (p^0, \boldsymbol{p})$ ein beliebiger Vierervektor mit der physikalischen Dimension eines Impulses ist, so folgt aus (2.1) die Bedingung

   $$p^2 = (p^0)^2 - \boldsymbol{p}^2 = (mc)^2 \, , \tag{2.4}$$

   die vierte Komponente p^0 wird dadurch als Funktion von $\boldsymbol{p}$ und der Masse m festgelegt. Anstelle der Komponente p^0, die ja die physikalische Dimension (Energie$/c$) trägt, kann man die Energie $E = c\,p^0$ verwenden, die dann der bekannten relativistischen Energie-Impulsbeziehung

   $$E = \sqrt{(c\boldsymbol{p})^2 + (mc^2)^2}$$

   genügt. Das ist ein einfaches, aber wichtiges Ergebnis: Entwickelt man eine beliebige Lösung $\phi(x)$ nach ebenen Wellen $f_p(x)$, dann treten dort nur solche Impulse auf, für die die Bedingung (2.4) erfüllt ist; jede Partiallösung muß auf der *Massenschale* des Teilchens mit Masse m liegen. Die Klein-Gordon-Gleichung erfüllt die Aufgabe zu garantieren, daß das freie Teilchen der relativistischen Energie-Impulsbeziehung genügt. In diesem Sinne ist sie tatsächlich das Analogon zur kräftefreien Schrödinger-Gleichung

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial \psi(t, \boldsymbol{x})}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(t, \boldsymbol{x}) ,$$

die mit demselben Ansatz $f_p(t, \boldsymbol{x})$ die nichtrelativistische Beziehung $E = \boldsymbol{p}^2/(2m)$ zwischen Energie und Impuls liefert. An diese einfache Feststellung schließen wir die folgende Bemerkung an:

Bemerkung

Ein kräftefreies Teilchen, das den Spin s trägt, wird durch einen Satz von Feldern beschrieben, der die Information über s und s_3 enthält. Nennen wir die Felder eines solchen Satzes einfach „Komponenten" eines einzigen Teilchenfeldes, so folgt:

Jede Komponente eines Feldes, das ein freies Teilchen mit Spin s beschreibt, muß der Klein-Gordon-Gleichung genügen.

Die Klein-Gordon-Gleichung garantiert die richtige Beziehung zwischen Energie und Impuls; für sich allein genommen genügt sie aber nicht, den Spininhalt eines Feldes zu beschreiben. Ein Beispiel aus der Elektrodynamik mag dies illustrieren. Sowohl das elektrische als auch das magnetische Feld erfüllen im Vakuum die Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x}) = 0 ,$$

die – um es in der Sprache der Teilchenphysik auszudrücken – aussagt, daß das Photon masselos ist. Die für die Maxwell-Theorie charakteristische, relative Orientierung des Magnetfeldes und des elektrischen Feldes z. B. in einer ebenen Welle folgt aus den eigentlichen Maxwellschen Gleichungen, die mehr Information als die Wellengleichung enthalten. Wiederum teilchenphysikalisch gesprochen: erst die vollen Maxwell-Gleichungen zeigen, daß das Photon die Helizität 1 trägt.

2. Die Klein-Gordon-Gleichung folgt aus der Lagrangedichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathrm{KG}}(\phi, \partial_\mu \phi) &= \hbar c \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - \kappa^2 \phi^2(x)] \\ &= \hbar c \frac{1}{2} [\partial_\mu \phi(x) g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi(x) - \kappa^2 \phi^2(x)] . \end{aligned} \tag{2.5}$$

Bildet man die partiellen Ableitungen nach ϕ und nach $\partial_\mu \phi$ und setzt diese in die Euler-Lagrange-Gleichung ein,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{KG}}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{KG}}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = -\hbar c \left(\kappa^2 \phi + \partial_\mu \partial^\mu \phi \right) = 0 ,$$

so entsteht in der Tat die Klein-Gordon-Gleichung.

Die Lagrangedichte (2.5) muß die physikalische Dimension Energie/Volumen haben. Dies ist mit dem angegebenen Vorfaktor dann richtig, wenn das Feld $\phi(x)$ die Dimension (Länge)$^{-1}$ hat – also anders als eine Lösung $\psi(t, \boldsymbol{x})$ der Schrödinger-Gleichung, deren physikalische Dimension (Länge)$^{-3/2}$ ist. Woran liegt dieser Unterschied? Darauf möchte ich hier drei Antworten geben:

(a) Zunächst überlegt man sich, daß die Lösungen $\phi(x)$ der Klein-Gordon-Gleichung nicht wie in der nichtrelativistischen Quantenmechanik als Wahrscheinlichkeitsamplituden interpretiert werden können und somit auch nicht dieselbe Dimension wie Lösungen der Schrödinger-Gleichung haben müssen. Im Gegensatz zu diesen können sie in der Tat keine Wahrscheinlichkeitsamplituden im Sinne der Bornschen Interpretation sein. Ein erster Grund, aus dem dies folgt, ist die Tatsache, daß die Klein-Gordon-Gleichung eine Differentialgleichung *zweiter* – und nicht erster – Ordnung in der Zeit ist. Abgesehen von der dann notwendigen zweiten Anfangsbedingung, die man für Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung stellen müßte, geht der Beweis der Erhaltung der Wahrscheinlichkeit, Band 2, Abschn. 1.4, nicht mehr durch. Ein zweiter, tieferer Grund ist, daß das Klein-Gordonfeld wie jedes andere Feld der relativistischen Quantentheorie sowohl Teilchen- als auch Antiteilchenfreiheitsgrade beschreibt und somit die Klein-Gordon-Gleichung keine Ein-Teilchentheorie ist.

(b) Wie wir im folgenden Abschnitt zeigen, ist ein sinnvolles, Lorentz-kovariantes Skalarprodukt für normierbare Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung durch

$$(\phi_1, \phi_2) = \mathrm{i} \int \mathrm{d}^3x \; \left\{\phi_1^*(x)\partial_0\phi_2(x) - \left(\partial_0\phi_1^*(x)\right)\phi_2(x)\right\} \quad (x^0 = \text{const})$$

gegeben. Da es sicher sinnvoll ist zu fordern, daß Skalarprodukte dimensionslos sind und da ∂_0 die Dimension (1/Länge) hat, müssen die Lösungen $\phi_i(x)$ die behauptete Dimension tragen.

(c) Andererseits wird sich herausstellen, wenn man auch komplexwertige Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung zuläßt, daß die elektromagnetische Vierer-Stromdichte durch

$$j^\mu(x) = Q\,e\,\mathrm{i}\,\phi^*(x) \overset{\leftrightarrow}{\partial^\mu} \phi(x)$$

gegeben ist, wo e die Elementarladung und Q eine dimensionslose, positive oder negative ganze Zahl ist. (Das Ableitungssymbol ist die schiefsymmetrische, rechts- und linkswirkende partielle Ableitung. Ihre Definition ist in (2.9) unten wiederholt.) Wenn dieser Ausdruck richtig ist, dann muß ϕ in der Tat die Dimension (Länge)$^{-1}$ haben.

Wir addieren zu $\mathcal{L}_{\mathrm{KG}}$ einen Wechselwirkungsterm $\mathcal{L}_{\mathrm{W}} = -\hbar c\phi(x)\varrho(x)$, wo $\varrho(x)$ eine äußere Quelle sei, deren physikalische Bedeutung gleich in einem Beispiel klar werden wird. Die Euler-Lagrange-Gleichung, die aus der neuen Lagrangedichte folgt, lautet

$$\Box\phi + \kappa^2\phi = -\varrho(x)\,, \tag{2.6}$$

die Funktion $\varrho(x)$ übernimmt die Rolle einer äußeren Quelle für das Feld $\phi(x)$. Als Beispiel betrachten wir eine statische, punktförmige Quelle der Stärke g, $\varrho(x) = g\,\delta(\boldsymbol{x})$. Suchen wir statische Lösungen von (2.6), $\phi(x) = \phi(\boldsymbol{x})$, so geht diese Gleichung mit $\Box\,\psi(\boldsymbol{x}) = -\Delta\psi(\boldsymbol{x})$ in

$$\left(\Delta - \kappa^2\right)\phi(\boldsymbol{x}) = g\,\delta(\boldsymbol{x}) \tag{2.7}$$

über. Diese Gleichung löst man am besten, indem man zunächst ihre Fourier-Transformierte bestimmt: Mit

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int \mathrm{d}^3k\; e^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\widetilde{\phi}(\boldsymbol{k})$$

wird aus der Differentialgleichung (2.7) eine algebraische Gleichung

$$\left(\boldsymbol{k}^2 + \kappa^2\right)\widetilde{\phi}(\boldsymbol{k}) = -g\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\,,$$

deren Lösung offensichtlich ist. Die Umkehrung gewinnt man durch Integration in sphärischen Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^3_k$. Mit $r = |\boldsymbol{x}|$ und $k = |\boldsymbol{k}|$ ist

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{x}) &= -\frac{g}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3k\;\frac{e^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}}{\boldsymbol{k}^2+\kappa^2}\\ &= -2\pi\frac{g}{(2\pi)^3}\int\limits_0^\infty k^2\mathrm{d}k\;\frac{e^{\mathrm{i}kr}-e^{-\mathrm{i}kr}}{(k^2+\kappa^2)\mathrm{i}kr} = -\frac{g}{4\pi}\frac{e^{-\kappa r}}{r}\,.\end{aligned}$$

Die punktförmige Quelle sei ein im Vergleich zu m schweres Nukleon, das sich am Ort $\boldsymbol{x}_0$ befindet. Am Ort $\boldsymbol{x}$ erzeugt sie das Feld

$$\phi^{(0)}(\boldsymbol{x}) = -\frac{g}{4\pi}\frac{e^{-\kappa|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|}\,.$$

Betrachten wir jetzt die Hamiltondichte der Wechselwirkung $\mathcal{H}_\mathrm{W} = -\mathcal{L}_\mathrm{W}$ und die Wechselwirkung selbst, $H_\mathrm{W} = \int\mathrm{d}^3x\;\mathcal{H}_\mathrm{W}(x)$, so ergibt sich mit $\varrho^{(1)}(\boldsymbol{x}) = g\,\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1)$

$$H_\mathrm{W} = \hbar c\int \mathrm{d}^3x\;\phi^{(0)}(\boldsymbol{x})\varrho^{(1)}(\boldsymbol{x}) = -\hbar c\,\frac{g^2}{4\pi}\frac{e^{-\kappa|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0|}}{|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_0|}\,. \tag{2.8}$$

Diese Energie, die man sich als Wechselwirkungsenergie zwischen zwei (schweren) Nukleonen vorstellen kann, wird *Yukawa Potential* genannt[1]. Die Stärke dieser Wechselwirkung wird durch $g^2/(4\pi)$, ihre Reichweite wird durch $1/\kappa = \lambda^{(m)}/(2\pi)$ charakterisiert. In Abb. 2.1 ist sie ganz schematisch durch durchgezogene, einlaufende und auslaufende Linien für die beiden Nukleonen und durch eine gestrichelte Verbindungslinie anstelle eines π-Mesons dargestellt.

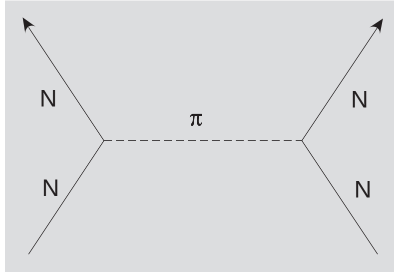

Abb. 2.1. Zwischen zwei Nukleonen der Masse m_N wird ein π-Meson der Masse m_π ausgetauscht. Wenn $m_N \gg m_\pi$ gilt, dann können die Nukleonen als praktisch inerte äußere Quellen in der Klein-Gordon-Gleichung angesehen werden

[1]Nach H. Yukawa, der 1936 aus der Interpretation der Kernkräfte als Austausch von Mesonen und aus der Reichweite dieser Kräfte die Existenz der π-Mesonen vorhergesagt hat.