

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Einführung und Beispiele | 1 |
| 1.1 | Was ist optimale Steuerung? | 1 |
| 1.2 | Beispiele konvexer Aufgaben | 2 |
| 1.2.1 | Optimale stationäre Aufheizung | 2 |
| 1.2.2 | Optimale instationäre Randtemperatur | 4 |
| 1.2.3 | Optimales Schwingen | 5 |
| 1.3 | Beispiele nichtkonvexer Probleme | 6 |
| 1.3.1 | Aufgaben mit semilinear elliptischer Gleichung | 6 |
| 1.3.2 | Probleme mit semilinear parabolischer Gleichung | 7 |
| 1.4 | Grundkonzepte im endlichdimensionalen Fall | 8 |
| 1.4.1 | Endlichdimensionale Aufgabe der optimalen Steuerung | 8 |
| 1.4.2 | Existenz optimaler Steuerungen | 9 |
| 1.4.3 | Notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung | 10 |
| 1.4.4 | Adjungierter Zustand | 11 |
| 1.4.5 | Lagrange-Funktion | 13 |
| 1.4.6 | Diskussion der Variationsungleichung | 14 |
| 1.4.7 | Formulierung als Karush-Kuhn-Tucker-System | 14 |
| 2 | Linear-quadratische elliptische Probleme | 17 |
| 2.1 | Lineare normierte Räume | 17 |
| 2.2 | Sobolewräume | 19 |
| 2.2.1 | L^p -Räume | 19 |
| 2.2.2 | Reguläre Gebiete | 21 |
| 2.2.3 | Schwache Ableitungen und Sobolewräume | 21 |
| 2.3 | Schwache Lösungen elliptischer Gleichungen | 24 |
| 2.3.1 | Poissongleichung | 25 |
| 2.3.2 | Randbedingung dritter Art | 27 |
| 2.3.3 | Differentialoperator in Divergenzform | 30 |
| 2.4 | Lineare Abbildungen | 32 |
| 2.4.1 | Lineare stetige Operatoren und Funktionale | 32 |
| 2.4.2 | Schwache Konvergenz | 35 |
| 2.5 | Existenz optimaler Steuerungen | 37 |
| 2.5.1 | Optimale stationäre Temperaturquelle | 38 |
| 2.5.2 | Optimale stationäre Randtemperatur | 42 |
| 2.5.3 | Allgemeinere elliptische Gleichungen und Zielfunktionale * | 43 |
| 2.6 | Differenzierbarkeit in Banachräumen | 44 |
| 2.7 | Adjungierte Operatoren | 47 |
| 2.8 | Notwendige Optimalitätsbedingungen erster Ordnung | 49 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 2.8.1 | Quadratische Optimierungsaufgabe im Hilbertraum | 49 |
| 2.8.2 | Optimale stationäre Temperaturquelle | 51 |
| 2.8.3 | Stationäre Temperaturquelle und Randbedingung dritter Art | 59 |
| 2.8.4 | Optimale stationäre Randtemperatur | 60 |
| 2.8.5 | Ein lineares Optimalsteuerungsproblem | 63 |
| 2.9 | Konstruktion von Testaufgaben | 64 |
| 2.9.1 | Bang-Bang-Steuerung | 64 |
| 2.9.2 | Verteilte Steuerung und Neumann-Randbedingung | 65 |
| 2.10 | Das formale Lagrange-Prinzip | 67 |
| 2.11 | Weitere Beispiele * | 71 |
| 2.11.1 | Differentialoperator in Divergenzform | 71 |
| 2.11.2 | Optimale stationäre Temperaturquelle mit vorgegebener Außen- temperatur | 72 |
| 2.12 | Numerische Verfahren | 72 |
| 2.12.1 | Bedingtes Gradientenverfahren | 73 |
| 2.12.2 | Gradienten-Projektionsverfahren | 76 |
| 2.12.3 | Überführung in ein endlichdimensionales quadratisches Optimierungsproblem | 76 |
| 2.12.4 | Aktive-Mengen-Strategie | 81 |
| 2.13 | Adjungierter Zustand als Multiplikator * | 84 |
| 2.13.1 | Elliptische Gleichungen mit Daten aus V^* | 84 |
| 2.13.2 | Anwendung beim Beweis von Optimalitätsbedingungen | 85 |
| 2.13.3 | Adjungierter Zustand als Lagrangescher Multiplikator | 86 |
| 2.14 | Höhere Regularität für elliptische Aufgaben * | 87 |
| 2.14.1 | Grenzen des Zustandsraums $H^1(\Omega)$ | 87 |
| 2.14.2 | Sobolew-Slobodezki-Räume | 88 |
| 2.14.3 | Höhere Regularität von Lösungen | 89 |
| 2.14.4 | Einbettungssätze | 90 |
| 2.15 | Regularität optimaler Steuerungen * | 91 |
| 2.16 | Übungsaufgaben | 92 |
| 3 | Linear-quadratische parabolische Probleme | 95 |
| 3.1 | Vorbetrachtungen | 95 |
| 3.2 | Der örtlich eindimensionale Fall | 98 |
| 3.2.1 | Eindimensionale Modellprobleme | 98 |
| 3.2.2 | Integraldarstellung von Lösungen – Greensche Funktion | 100 |
| 3.2.3 | Notwendige Optimalitätsbedingungen | 101 |
| 3.2.4 | Bang-Bang-Prinzip | 106 |
| 3.3 | Schwache Lösungen in $W_2^{1,0}(Q)$ | 109 |
| 3.4 | Schwache Lösungen in $W(0, T)$ | 113 |
| 3.4.1 | Abstrakte Funktionen | 113 |
| 3.4.2 | Abstrakte Funktionen und parabolische Gleichungen | 115 |
| 3.4.3 | Vektorwertige Distributionen | 116 |
| 3.4.4 | Zugehörigkeit schwacher Lösungen aus $W_2^{1,0}(Q)$ zu $W(0, T)$ | 119 |
| 3.5 | Parabolische Optimalsteuerungsprobleme | 123 |
| 3.5.1 | Optimale instationäre Randtemperatur | 123 |
| 3.5.2 | Optimale instationäre Temperaturquelle | 124 |
| 3.6 | Notwendige Optimalitätsbedingungen | 125 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 3.6.1 | Hilfssatz für adjungierte Operatoren | 125 |
| 3.6.2 | Optimale instationäre Randtemperatur | 127 |
| 3.6.3 | Optimale instationäre Temperaturquelle | 130 |
| 3.6.4 | Differentialoperator in Divergenzform * | 131 |
| 3.7 | Numerische Lösungstechniken | 134 |
| 3.7.1 | Gradienten-Projektionsverfahren | 134 |
| 3.7.2 | Überführung in eine endlichdimensionale Aufgabe | 135 |
| 3.8 | Parabolische Gleichungen in $L^2(0, T; V^*)$ * | 138 |
| 3.9 | Übungsaufgaben | 139 |
| 4 | Steuerung semilinearer elliptischer Gleichungen | 141 |
| 4.1 | Die semilineare elliptische Modellgleichung | 141 |
| 4.1.1 | Motivation des weiteren Vorgehens | 141 |
| 4.1.2 | Lösungen in $H^1(\Omega)$ | 142 |
| 4.1.3 | Stetige Lösungen | 144 |
| 4.2 | Nemyzki-Operatoren | 147 |
| 4.2.1 | Stetigkeit von Nemyzki-Operatoren | 147 |
| 4.2.2 | Differenzierbarkeit von Nemyzki-Operatoren | 149 |
| 4.2.3 | Ableitungen in weiteren L^p -Räumen * | 153 |
| 4.3 | Existenz optimaler Steuerungen | 154 |
| 4.3.1 | Grundvoraussetzung des Kapitels | 154 |
| 4.3.2 | Verteilte Steuerung | 155 |
| 4.4 | Der Steuerungs-Zustands-Operator | 158 |
| 4.4.1 | Verteilte Steuerung | 159 |
| 4.4.2 | Randsteuerung | 161 |
| 4.5 | Notwendige Optimalitätsbedingungen | 161 |
| 4.5.1 | Verteilte Steuerung | 161 |
| 4.5.2 | Randsteuerung | 164 |
| 4.6 | Anwendung des formalen Lagrange-Prinzips | 166 |
| 4.7 | Pontrjaginsches Maximumprinzip * | 169 |
| 4.7.1 | Hamilton-Funktionen | 169 |
| 4.7.2 | Maximumprinzip | 170 |
| 4.8 | Ableitungen zweiter Ordnung | 171 |
| 4.9 | Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung | 175 |
| 4.9.1 | Einführung – Die Zwei-Norm-Diskrepanz | 175 |
| 4.9.2 | Verteilte Steuerung | 179 |
| 4.9.3 | Randsteuerung | 187 |
| 4.9.4 | Berücksichtigung stark aktiver Restriktionen * | 188 |
| 4.9.5 | Fälle ohne Zwei-Norm-Diskrepanz | 192 |
| 4.9.6 | Lokale Optimalität in $L^r(\Omega)$ * | 193 |
| 4.10 | Numerische Verfahren | 194 |
| 4.10.1 | Gradienten-Projektionsverfahren | 194 |
| 4.10.2 | Grundidee des SQP-Verfahrens | 195 |
| 4.10.3 | SQP-Verfahren für elliptische Probleme | 197 |
| 4.11 | Übungsaufgaben | 200 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 5 | Steuerung semilinearer parabolischer Gleichungen | 201 |
| 5.1 | Die semilineare parabolische Modellgleichung | 201 |
| 5.2 | Grundvoraussetzung des Kapitels | 204 |
| 5.3 | Existenz optimaler Steuerungen | 205 |
| 5.4 | Steuerungs-Zustands-Operator | 207 |
| 5.5 | Notwendige Optimalitätsbedingungen | 211 |
| 5.5.1 | Verteilte Steuerung | 211 |
| 5.5.2 | Randsteuerung | 214 |
| 5.6 | Pontrjaginsches Maximumprinzip * | 216 |
| 5.7 | Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung | 217 |
| 5.7.1 | Ableitungen zweiter Ordnung | 217 |
| 5.7.2 | Verteilte Steuerung | 219 |
| 5.7.3 | Randsteuerung | 224 |
| 5.7.4 | Ein Fall ohne Zwei-Norm-Diskrepanz | 225 |
| 5.8 | Testaufgaben | 226 |
| 5.8.1 | Aufgabe mit Steuerungsrestriktionen | 226 |
| 5.8.2 | Aufgabe mit integraler Zustandsrestriktion * | 228 |
| 5.9 | Numerische Verfahren | 233 |
| 5.9.1 | Gradientenverfahren | 233 |
| 5.9.2 | SQP-Verfahren | 234 |
| 5.10 | Weitere parabolische Probleme * | 237 |
| 5.10.1 | Phasenfeldmodell | 237 |
| 5.10.2 | Instationäre Navier-Stokes-Gleichungen | 239 |
| 5.11 | Übungsaufgaben | 243 |
| 6 | Optimierungsaufgaben im Banachraum | 244 |
| 6.1 | Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen | 244 |
| 6.1.1 | Konvexe Aufgaben | 244 |
| 6.1.2 | Nichtkonvexe differenzierbare Aufgaben | 249 |
| 6.1.3 | Eine semilineare elliptische Aufgabe * | 253 |
| 6.2 | Steuerprobleme mit Zustandsbeschränkungen | 255 |
| 6.2.1 | Konvexe Aufgaben | 256 |
| 6.2.2 | Eine nichtkonvexe Aufgabe | 264 |
| 6.3 | Übungsaufgaben | 267 |
| 7 | Ergänzungen zu partiellen Differentialgleichungen | 268 |
| 7.1 | Elliptische Gleichungen | 268 |
| 7.1.1 | Beweis des Existenzsatzes | 268 |
| 7.1.2 | Methode von Stampacchia | 271 |
| 7.1.3 | Elliptische Gleichungen mit Maßen | 274 |
| 7.2 | Parabolische Gleichungen | 276 |
| 7.2.1 | Lösungen in $W(0, T)$ | 276 |
| 7.2.2 | Stetige Lösungen | 284 |