

# Inhaltsverzeichnis

0. Einleitung . . . . .	1
0.1 Vermutung von Blumenthal . . . . .	1
0.2 Hilberts Nachlaß . . . . .	2
0.3 Projektive Geometrie und Grundlagenfragen vor Hilbert . . . . .	3
0.3.1 Desargues, Pascal . . . . .	3
0.3.2 Möbius, Steiner, von Staudt . . . . .	4
0.3.3 Cayley, Klein . . . . .	5
0.3.4 Pasch . . . . .	7
1. Vorlesung "Projektive Geometrie" und erste Aus- einandersetzung mit Grundlagenfragen (1880-1893) .	9
1.1 Schulheft über projektive Geometrie . . . . .	9
1.2 Studium, Promotion und Kolloquien im Seminar Lindemanns . . . . .	10
1.3 Erdmanns Theorie der Geometrie . . . . .	12
1.4 Geometrievorlesungen in Königsberg . . . . .	13
1.5 Lindemann, Killing . . . . .	14
1.6 Vorlesung "Theorie der ebenen algebraischen Curven" (WS 1890/91) . . . . .	15
1.7 Vorlesung "Projektive Geometrie" (SS 1891) .	18
1.7.1 Einteilung der Geometrie . . . . .	18
1.7.2 Stellung der Geometrie in der Mathematik	20
1.7.3 Historische Entwicklung geometrischer Methoden . . . . .	22
1.7.4 Grundbegriffe . . . . .	26
1.7.5 Grundgesetze der Anschauung: Inzidenz .	30
1.7.6 Harmonische Lage, Satz von Desargues .	32
1.7.7 Projektivität, Satz von Pappos und Pascal . . . . .	34
1.7.8 Anschauung und Stetigkeit . . . . .	37
1.8 Vortrag von Wiener (September 1891) . . . . .	40

1.9 Killings "Grundlagen der Geometrie" . . . . .	43
1.10 Brief an Klein (23.5.1893): Zwischenaxiome, Unabhängigkeit . . . . .	44
1.11 Vorlesung "Analytische Geometrie des Raumes" (WS 1893/94) . . . . .	46
1.12 Brief an Lindemann (15.11.1893) über Lies einseitig analytischen Standpunkt . . . . .	47
1.13 Geometrische Übungen (WS 1893/94), erziehe- rischer Wert . . . . .	48
1.14 Zusammenfassung . . . . .	50
2. Vorlesung "Die Grundlagen der Geometrie" (SS 1894) und veröffentlichter wissenschaftlicher Brief (14.8.1894) . . . . .	51
2.1 Käthe Hilbert, Literaturverzeichnis . . . . .	51
2.2 Beziehung zu den italienischen Arbeiten . . . .	55
2.3 Aufgaben der Geometrie, Unabhängigkeit . . . .	57
2.4 Verknüpfungsaxiome . . . . .	59
2.5 Existenzsätze, Grundbegriffe, Formalisierung	62
2.6 Gedanke von Hertz, Bilder und Experiment . .	63
2.7 Lagenaxiome . . . . .	66
2.8 Trennung und harmonische Lage . . . . .	68
2.9 Einführung der Zahl . . . . .	70
2.10 Stetigkeitsaxiom . . . . .	74
2.11 Koordinaten, ideale Elemente . . . . .	79
2.12 Kongruenzaxiome . . . . .	85
2.13 Hyperbolische Geometrie, Parallelenproblem .	89
2.14 Einführung des Maßes, parabolische Geometrie	95
2.15 Brief an Hurwitz (13.6.1894) und Lindemann (17.7.1894) über die Auswahl von Axiomen . .	100
2.16 Ankündigung eines wissenschaftlichen Briefes, weiterführende Anmerkungen . . . . .	102
2.17 "Ueber die gerade Linie als kürzeste Verbin- dung zweier Punkte" (14.8.1894) . . . . .	104
2.18 Reaktionen von Klein und Schur . . . . .	107

2.19 Vorlesung "Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes" (WS 1894/95) . . . . .	110	
2.20 Ferienkurs 1896, Zahlentheorie . . . . .	112	
2.21 Zusammenfassung . . . . .	114	
3. Ferienkurs "Über den Begriff des Unendlichen" (Ostern 1898) . . . . .		115
3.1 Brief an Hurwitz (16.3.1898) über Schließungssätze . . . . .	115	
3.2 Zusammenhang zwischen Universität und Schule	119	
3.3 Axiomgruppen, Konstruierbarkeit . . . . .	122	
3.4 Unabhängigkeit des Stetigkeitsaxioms, Stoltz .	127	
3.5 Schließungssätze, Beweis von Schur . . . . .	130	
3.6 Streckenprodukte . . . . .	133	
3.7 Flächeninhalte, Aufbau . . . . .	137	
3.8 Zusammenfassung . . . . .	141	
4. Vorlesung "Grundlagen der Euklidischen Geometrie" (WS 1898/99) . . . . .		143
4.1 Ankündigung, Stellung zu anderen Geometrievorlesungen . . . . .	143	
4.2 Anschauung, mathematischer Scherz, Literatur	146	
4.3 Verbindungsaxiome, Unabhängigkeit . . . . .	149	
4.4 Anordnungsaxiome, Unabhängigkeit . . . . .	152	
4.5 Satz von Desargues, Unbeweisbarkeit in der Ebene . . . . .	156	
4.6 Kongruenzaxiome . . . . .	161	
4.6.1 Streckenkongruenz . . . . .	161	
4.6.2 Winkelkongruenz . . . . .	165	
4.6.3 Kongruenzsatz, Außenwinkelsatz . . . . .	167	
4.6.4 Konstruierbarkeit, Zahlenbereich $\Omega$ . . . . .	170	
4.7 Parallelenaxiom . . . . .	173	
4.7.1 Legendre, Geschichte der Parallelentheorie . . . . .	173	
4.7.2 Äquivalente Sätze, Nichteuklidische Geometrien . . . . .	178	
4.7.3 Einführung idealer Elemente . . . . .	182	

4.8 Proportionenlehre, Streckenrechnung, Geraden-	gleichung . . . . .	184
4.9 Flächeninhaltslehre . . . . .		189
4.10 Stetigkeitsaxiome . . . . .		191
4.11 Neue Streckenrechnung, Einführung der Zahl, Existenz . . . . .		192
4.12 Beliebiger Schnittpunktsatz, offene Probleme		195
4.13 Brief an Hurwitz (31.12.1898), Stellung der Stetigkeitsaxiome . . . . .		198
4.14 Zusammenfassung . . . . .		200
5. Ausarbeitung "Elemente der Euklidischen Geometrie" (März 1899) . . . . .		202
5.1 Vorwort, Ausgangspunkt, Hauptfrage . . . . .		202
5.2 Grundelemente, Axiomgruppen I-III . . . . .		204
5.3 Sätze von Legendre, Desargues und Pascal . .		208
5.4 Parallelenaxiom, ideale Elemente, Dualität .		211
5.5 Flächenmessung, Flächen- und Inhaltsgleich- heit . . . . .		215
5.6 Unabhängigkeitsbeweis der Stetigkeitsaxiome .		220
5.7 Neue Streckenrechnung und Kommutativgesetz der Multiplikation . . . . .		223
5.8 Cantorsches Axiom, Widerspruchsfreiheit, Anwendung einer Theorie . . . . .		226
5.9 Elementare geometrische Konstruktionen . . .		229
5.10 Inhaltsverzeichnis, Vergleich mit der Fest- schrift . . . . .		232
5.11 Notizen in Hilberts persönlichem Exemplar . .		234
5.12 Zusammenfassung . . . . .		236
6. Festschrift "Grundlagen der Geometrie" (Juni 1899)		238
6.1 Stellungnahme Minkowskis, Kant-Zitat . . . .		238
6.2 Einleitung, Parallelenaxiom . . . . .		239
6.3 Kongruenzaxiome, Archimedisches Axiom . . . .		241
6.4 Spiegelungsbegriff, Widerspruchsfreiheit . .		243
6.5 Unabhängigkeitsbeweise, Proportionenlehre . .		244

6.6 Flächeninhaltslehre in der Ebene, Desargues-	246
scher und Pascalscher Satz . . . . .	
6.7 Geometrische Konstruktionen, Schlußwort . . .	248
6.8 Zusammenfassung, Übersicht zu den Schlies-	
sungssätzen . . . . .	250
 7. Grundlagenfragen im Zusammenhang mit der Fest-	
schrift (1899/1900) . . . . .	253
7.1 Gauß - Weber - Feier (17.6.1899) . . . . .	253
7.2 Vollständigkeitsaxiom und Cantorsches Axiom .	254
7.3 Korrespondenz mit Hurwitz . . . . .	256
7.4 Axiomatische Methode, Anschauung, Intuition .	257
7.5 Kritik durch Frege . . . . .	261
7.6 Rezensionen . . . . .	263
7.7 Auswirkungen . . . . .	264
 Zusammenfassung . . . . .	265
Anlage: Euklids Größenaxiome . . . . .	270
Verzeichnis der Manuskripte und Briefe . . . . .	271
Literaturverzeichnis . . . . .	273
Namenverzeichnis . . . . .	287