Inhaltsverzeichnis

Einleitung **17**

1 Reelle Zahlen **22**

1.1 Axiome der Addition 22
1.2 Axiome der Multiplikation 23
1.3 Anordnungsaxiome 24
1.3.1 Rechnen mit Ungleichungen 25
1.4 Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ 26
1.5 Mehr über Ungleichungen 28
1.6 Das Wurzelziehen 31
1.6.1 Das Dilemma des Pythagoras 31
1.6.2 Das babylonische Wurzelziehen 31
1.7 Schranken, Minimum, Maximum, Supremum und Infimum 33
1.8 Das Vollständigkeitsaxiom 34
1.9 Bemerkungen zu mathematischen Beweisen 37
1.9.1 Der direkte Beweis 38
1.9.2 Der Widerspruchsbeweis 38
1.9.3 Das Prinzip der vollständigen Induktion 39
1.10 Zahlendarstellung mit g–adischen Brüchen 42
1.10.1 Unendliche g–adische Brüche 42
1.11 Abschließende Bemerkungen 45

2 Euklidische Räume und $\mathbb{C}$ **48**

2.1 Der Euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ 48
2.2 $\mathbb{R}^2$ und die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ 49

3 Zahlenfolgen, Konvergenz, Reihen, Punktfolgen **53**

3.1 Zahlenfolgen 53
3.2 Funktionen 53
3.3 Konvergenz 54
3.3.1 Konvergenz einer Punktfolge im $\mathbb{R}^n$ 58
3.4 Rechnen mit Limites 59
3.5 Konvergenzkriterien, Kompaktheit, Fixpunktsatz 61

3.5.1 Bezeichnungsweisen für Intervalle . . . 63
3.5.2 Berechnung von π nach Archimedes . . . 64
3.5.3 Der Satz von Bolzano–Weierstrass und Cauchy–Folgen . . 65
3.5.4 Offene, abgeschlossene und kompakte Mengen in $\mathbb{R}^n$ und der Satz von Heine–Borel . . . 67
3.5.5 Der Banachsche Fixpunktsatz . . . 71
3.5.6 Häufungsgrenzen in $\mathbb{R}$ . . . 75
3.6 Reihen . . . 76
3.7 Abschließende Bemerkungen . . . 87

4 Funktionen in $\mathbb{R}^n$ und in $\mathbb{C}$ 89
4.1 Stetige Funktionen . . . 90
4.2 Polynome in $\mathbb{C}$ . . . 99
4.3 Potenzreihen in $\mathbb{C}$ . . . 101
4.4 Spezielle Funktionen . . . 106
4.4.1 Die Exponentialfunktion in $\mathbb{C}$ . . . 107
4.4.2 Die Trigonometrischen Funktionen in $\mathbb{C}$ . . . 108
4.4.3 Stetige Funktionen im Reellen; Zwischenwertsatz, der Satz von Weierstrass, exp x und die trigonometrischen Funktionen im Reellen . . . 110
4.5 Monotone und inverse Funktionen . . . 116
4.5.1 Die Logarithmus–Funktion: . . . 118
4.5.2 Zyklometrische Funktionen . . . 120
4.5.3 Hyperbelfunktionen . . . 121
4.6 Mehr über stetige Funktionen . . . 122
4.7 Abschließende Bemerkungen . . . 125

5 Funktionenfolgen 127
5.1 Konvergenz von Funktionenfolgen . . . 127
5.2 Vektorräume . . . 129
5.3 Normen . . . 130
5.4 Normierte Vektorräume . . . 132
5.5 Funktionenreihen . . . 133
5.6 Banachscher Fixpunktsatz . . . 134
5.7 Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes . . . 137
5.8 Abschließende Bemerkungen . . . 138

6 Integration 139
6.1 Treppenfunktionen . . . 139
6.2 Das Cauchy–Integral . . . 144
6.3 Das Riemann–Integral . . . 155
6.3.1 Das uneigentliche Integral . . . 158
6.4 Das Lebesgue–Integral . . . 159

6.4.1 Vorbemerkungen über Intervalle 159
6.4.2 Lebesgue–meßbare Teilmengen von $\mathbb{R}$ 160
6.4.3 Das Lebesgue–Integral für positive Funktionen 167
6.4.4 Meßbare Funktionen 170
6.4.5 Das Lebesgue–Integral für Funktionen mit beliebigen Werten 175
6.4.6 Die Sätze von Levi, Lebesgue und Fatou 176
6.5 Sonstiges zur Integration 180
6.5.1 Riemann– und Lebesgue–integrierbare Funktionen 180
6.5.2 Der Mittelwertsatz der Integralrechnung 183
6.5.3 Das unbestimmte Integral 184
6.6 Abschließende Bemerkungen 185

7 Differential– und Integralrechnung 188
7.1 Differentiation in einer Veränderlichen 189
7.2 Die Hauptsätze der Differential– und Integralrechnung 198
7.3 Spezielle Integrationsregeln 203
7.4 Differentiation von Funktionenfolgen und –reihen 205
7.5 Höhere Ableitungen 209
7.6 Die Taylorsche Formel 210
7.6.1 Die Limes–Regeln von L'Hospital 215
7.6.2 Das vollständige Horner–Schema 218
7.6.3 Sukzessive Approximation und Konvergenzordnung 219
7.6.4 Das Newton–Verfahren 221
7.6.5 Die Steffensen–Iteration 224
7.7 Numerische Integration 225
7.7.1 Rechteckformel 226
7.7.2 Trapezregel 227
7.7.3 Die Integrationsformel von Simpson (Torricelli) 229
7.8 Kurvendiskussion 229
7.9 Entwicklung in Potenzreihen 232
7.9.1 Taylorsche Reihe 232
7.9.2 Approximationsaufgabe von Tschebyscheff 234
7.9.3 Approximationsaufgabe von Gauß 235
7.10 Integration mittels Partialbruchzerlegung 235
7.11 Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung 241
7.12 Anfangswertproblem der expliziten Differentialgleichung 250
7.13 Abschließende Bemerkungen 263

8 Differentiation im $\mathbb{R}^n$ 267
8.1 Gebiet und Bereich 267
8.2 Richtungsableitungen und Fréchet–Differenzierbarkeit 268
8.3 Mittelwertsatz und Taylorsche Formel 276

9 Funktionen mehrerer Veränderlicher **282**
9.1 Extremwertaufgaben und Polynom–Approximation im $\mathbb{R}^n$ 282
9.2 Geometrische Interpretationen 292
9.3 Implizit gegebene Kurven und die implizite Funktion 296
9.4 Abbildungen im $\mathbb{R}^n$ 306
9.5 Iterationsverfahren zur Lösung von Gleichungssystemen im $\mathbb{R}^n$ . . 312
9.6 Implizite Funktionen und inverse Abbildungen im $\mathbb{R}^n$ 317
9.7 Lagrange–Multiplikatoren 321
9.8 Abschließende Bemerkungen 323

10 Parameterabhängige und mehrfache Integrale im $\mathbb{R}^n$ **324**
10.1 Parameterabhängige Integrale 324
10.2 Mehrfache Integrale 330
10.3 Intervalle im $\mathbb{R}^n$ 334
10.4 Das Cauchy–Integral im $\mathbb{R}^n$ 335
10.5 Das Riemann–Integral im $\mathbb{R}^n$ 335
10.6 Lebesgue–meßbare Mengen im $\mathbb{R}^n$ 336
10.7 Das Lebesgue–Integral im $\mathbb{R}^n$ 337
10.8 Der Satz von Fubini 338
10.9 Abschließende Bemerkungen 343

11 Die Integralsätze von Gauß, Ostrogradski und Green **344**
11.1 Kurvenintegrale 345
11.2 Begleitendes Dreibein, Frenetsche Formeln 354
11.3 Integralsätze in der Ebene 357
11.4 Flächenintegrale und Stokesscher Satz 368
11.5 Gaußscher Satz im $\mathbb{R}^3$ und Satz von Cartan 379
11.6 Erhaltungssätze und Reynoldssches Transporttheorem 390
11.7 Abschließende Bemerkungen 394

12 Anfangswertprobleme gewöhnlicher Differentialgleichungen **396**
12.1 Die exakte Differentialgleichung erster Ordnung 396
12.2 Runge–Kutta–Verfahren 398
12.3 Anfangswertprobleme für Systeme 403
12.4 Lineare Systeme erster Ordnung 409
12.5 Das Reduktionsverfahren von D'Alembert 417
12.6 Inhomogene lineare Systeme und Variation der Konstanten 419
12.7 Lineare homogene Systeme mit konstanten Koeffizienten 421
12.8 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung 434
12.9 Langzeitverhalten autonomer Systeme 444
12.10 Ein Beispiel aus der Regelungstheorie 467
12.11 Implizite Differentialgleichung 471
12.12 Abschließende Bemerkungen 475

13 Rand– und Eigenwertprobleme **477**
13.1 Das Sturmsche Randwertproblem 478
13.2 Grundlösung und Greensche Funktion 482
13.3 Eigenwerte und Entwicklungssatz 488
13.4 Abschließende Bemerkungen 505

14 Stetigkeit und Differenzierbarkeit im Komplexen **507**

15 Der Cauchysche Integralsatz **514**
15.1 Komplexe Integration 514
15.2 Der Integralsatz von Riemann 517
15.3 Der Cauchysche Integralsatz für holomorphe Funktionen 521
15.4 Die Cauchysche Integralformel und Analytizität 524
15.5 Die Plemelj–Sochozki–Formeln 533
15.6 Carl Neumanns Methode 542
15.7 Die Poisson–Formel 554
15.8 Abschließende Bemerkungen 556

16 Laurent–Reihen und Residuensatz **559**
16.1 Abschließende Bemerkungen 567

17 Eigenschaften holomorpher Funktionen **568**
17.1 Abschließende Bemerkungen 573

18 Analytische Fortsetzung und Schwarzsches Spiegelungsprinzip **574**
18.1 Abschließende Bemerkungen 585

19 Konforme Abbildungen und Familien holomorpher Funktionen **587**
19.1 Die Umströmung einer Kontur 587
19.2 Definition konformer Abbildungen 589
19.3 Beispiele konformer Abbildungen 593
19.3.1 Drehstreckung und Translation 593
19.3.2 Inversion am Einheitskreis 594
19.3.3 Möbius–Transformation 595
19.3.4 Aufbiegen einer Ecke 598
19.3.5 Die Exponentialabbildung 598
19.4 Familien holomorpher Funktionen 599
19.5 Der Riemannsche Abbildungssatz 605
19.6 Ritzsches Verfahren 612
19.7 Die Potenzreihenmethode bei gewöhnlichen Differentialgleichungen 614
19.8 Abschließende Bemerkungen 617

20 Fourier–Reihen **619**
20.1 Fourier– und Laurent–Reihen 620
20.2 Fourier–Reihen und Hilbert–Raum $L^2(S^1)$ 622
20.3 Sobolev–Räume auf S^1 634
20.4 Abschließende Bemerkungen 637

21 Riemann–Hilbert–Probleme **639**
21.1 Das Riemann–Hilbert–Randwertproblem vom Windungsindex Null 641
21.2 Negativer Windungsindex $\omega < 0$ 642
21.3 Positiver Windungsindex $\omega > 0$ 646
21.4 Der Satz von Fritz Noether 649
21.5 Abschließende Bemerkungen 652

Literatur **653**

Index **659**