

# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>VII</b>
<b>1 Einführung</b>	<b>1</b>
1.1 Das Konzept der Randelementmethode . . . . .	1
1.1.1 Grundbegriffe . . . . .	1
1.1.2 Ein physikalisches Beispiel . . . . .	2
1.1.3 Fundamentallösungen . . . . .	6
1.1.4 Potentiale und Randintegraloperatoren . . . . .	6
1.2 Numerik von Randintegralgleichungen . . . . .	9
1.2.1 Galerkin-Verfahren . . . . .	9
1.2.2 Effiziente Verfahren zur Lösung der Galerkin-Gleichungen . . . . .	10
1.2.2.1 Quadraturverfahren . . . . .	11
1.2.2.2 Lösen des linearen Gleichungssystems . . . . .	11
1.2.2.3 Panel-Clustering . . . . .	12
<b>2 Elliptische Differentialgleichungen</b>	<b>15</b>
2.1 Funktionalanalytische Grundlagen . . . . .	15
2.1.1 Banach- und Hilbert-Räume . . . . .	15
2.1.1.1 Normierte Räume . . . . .	15
2.1.1.2 Lineare Operatoren . . . . .	16
2.1.1.3 Banach-Räume . . . . .	16
2.1.1.4 Einbettungen . . . . .	17
2.1.1.5 Hilbert-Räume . . . . .	18
2.1.2 Dualräume . . . . .	18
2.1.2.1 Dualraum eines normierten, linearen Raumes . . . . .	18
2.1.2.2 Dualer Operator . . . . .	19
2.1.2.3 Adjungierter Operator . . . . .	19
2.1.2.4 Gelfand-Dreier . . . . .	21
2.1.2.5 Schwache Konvergenz . . . . .	21
2.1.3 Kompakte Operatoren . . . . .	22
2.1.4 Fredholm-Riesz-Schauder-Theorie . . . . .	23
2.1.5 Bilinear- und Sesquilinearformen . . . . .	24
2.1.6 Existenzsätze . . . . .	25
2.1.7 Interpolationsräume . . . . .	34
2.2 Geometrische Grundlagen . . . . .	36
2.2.1 Funktionenräume . . . . .	36
2.2.2 Glattheit von Gebieten . . . . .	38

2.2.3	Normalenvektoren . . . . .	40
2.2.4	Randintegrale . . . . .	41
2.3	Sobolev-Räume auf Gebieten $\Omega$ . . . . .	41
2.4	Sobolev-Räume auf Oberflächen $\Gamma$ . . . . .	44
2.4.1	Definition der Sobolev-Räume auf $\Gamma$ . . . . .	44
2.4.2	Sobolev-Räume auf $\Gamma_0 \subset \Gamma$ . . . . .	46
2.5	Einbettungssätze . . . . .	46
2.6	Spur-Operatoren . . . . .	48
2.7	Greensche Formeln und Normalenableitungen . . . . .	51
2.8	Der Lösungsoperator . . . . .	56
2.9	Elliptische Randwertprobleme . . . . .	59
2.9.1	Klassische Formulierung elliptischer Randwertprobleme . . . . .	59
2.9.1.1	Inneres Dirichlet-Randwertproblem (IDP) . . . . .	60
2.9.1.2	Inneres Neumann-Randwertproblem (INP) . . . . .	60
2.9.1.3	Gemischtes inneres Randwertproblem (IDNP) . . . . .	60
2.9.1.4	Äußeres Dirichlet-Randwertproblem (ÄDP) . . . . .	60
2.9.1.5	Äußeres Neumann-Randwertproblem (ÄNP) . . . . .	61
2.9.1.6	Gemischtes äußeres Randwertproblem (ÄDNP) . . . . .	61
2.9.1.7	Transmissionsproblem (TP) . . . . .	61
2.9.2	Variationsformulierung elliptischer Randwertprobleme . . . . .	62
2.9.2.1	Inneres Dirichlet-Randwertproblem (IDP) . . . . .	62
2.9.2.2	Inneres Neumann-Randwertproblem (INP) . . . . .	63
2.9.2.3	Gemischtes inneres Randwertproblem (IDNP) . . . . .	63
2.9.2.4	Funktionsräume für Außenraumprobleme . . . . .	64
2.9.2.5	Äußeres Dirichlet-Randwertproblem (ÄDP) . . . . .	65
2.9.2.6	Äußeres Neumann-Randwertproblem (ÄNP) . . . . .	66
2.9.2.7	Gemischtes äußeres Randwertproblem (ÄDNP) . . . . .	67
2.9.2.8	Transmissionsproblem (TP) . . . . .	67
2.9.3	Äquivalenz von starker und schwacher Formulierung . . . . .	68
2.9.3.1	Innenraumprobleme . . . . .	68
2.9.3.2	Außenraumprobleme . . . . .	69
2.10	Existenz und Eindeutigkeit . . . . .	70
2.10.1	Innenraumprobleme . . . . .	72
2.10.1.1	Inneres Dirichlet-Randwertproblem . . . . .	72
2.10.1.2	Inneres Neumann-Randwertproblem . . . . .	72
2.10.1.3	Gemischtes inneres Randwertproblem . . . . .	73
2.10.2	Außenraumprobleme . . . . .	73
2.10.2.1	Allgemeiner elliptischer Operator mit $a_{\min} c > \ \mathbf{b}\ ^2$ . . . . .	73
2.10.2.2	Laplace-Operator . . . . .	74
2.10.2.3	Helmholtz-Gleichung . . . . .	78
<b>3</b>	<b>Elliptische Randintegralgleichungen</b> . . . . .	<b>79</b>
3.1	Randintegraloperatoren . . . . .	79
3.1.1	Das Newton-Potential . . . . .	81
3.1.2	Abbildungseigenschaften der Randintegraloperatoren . . . . .	88
3.2	Regularität der Lösungen der Randintegralgleichungen . . . . .	90
3.3	Sprungrelationen und Darstellungsformeln . . . . .	91

3.3.1	Sprungeigenschaften der Potentiale . . . . .	91
3.3.2	Explizite Darstellung des Randintegraloperators $V$ . . . . .	93
3.3.3	Explizite Darstellungen der Randintegraloperatoren $K$ und $K'$ . . . . .	97
3.3.4	Explizite Darstellung des Randintegraloperators $W$ . . . . .	106
3.4	Integralgleichungen für elliptische Randwert- probleme . . . . .	111
3.4.1	Die indirekte Methode . . . . .	112
3.4.1.1	Innenraumprobleme . . . . .	113
3.4.1.2	Außenraumprobleme . . . . .	115
3.4.1.3	Transmissionsproblem . . . . .	116
3.4.2	Die direkte Methode . . . . .	116
3.4.2.1	Innenraumprobleme . . . . .	117
3.4.2.2	Außenraumprobleme . . . . .	118
3.4.3	Vergleich der direkten und indirekten Formulierungen . . . . .	119
3.5	Eindeutige Lösbarkeit der Randintegralgleichungen . . . . .	120
3.5.1	Existenz und Eindeutigkeit für geschlossene Oberflächen und Dirichlet- oder Neumann-Randbedingungen . . . . .	120
3.5.2	Existenz- und Eindeutigkeit für das gemischte Randwertproblem . . . . .	124
3.5.3	Schirmproblem . . . . .	126
3.6	Calderón-Projektor . . . . .	127
3.7	Poincaré-Steklov-Operator . . . . .	130
3.8	Invertierbarkeit von Randintegraloperatoren 2. Art . . . . .	131
3.9	Randintegralgleichungen zur Helmholtz-Gleichung . . . . .	136
3.9.1	Helmholtz-Gleichung . . . . .	136
3.9.2	Integralgleichungen und Resonanzen . . . . .	137
3.9.3	Existenz von Lösungen des Aussenraumproblems . . . . .	139
3.9.4	Modifizierte Randintegralgleichungen . . . . .	142
<b>4</b>	<b>Randelementmethoden</b> . . . . .	<b>145</b>
4.1	Randelemente für die Potentialgleichung in $\mathbb{R}^3$ . . . . .	146
4.1.1	Modellproblem 1: Dirichlet-Problem . . . . .	146
4.1.2	Paneelierungen . . . . .	148
4.1.3	Unstetige Randelemente . . . . .	152
4.1.4	Galerkin-Randelementmethode . . . . .	154
4.1.5	Konvergenzrate unstetiger Randelemente . . . . .	158
4.1.6	Modellproblem 2: Neumann Problem . . . . .	161
4.1.7	Stetige Randelemente . . . . .	162
4.1.8	Galerkin-BEM mit stetigen Randelementen . . . . .	169
4.1.9	Konvergenzraten mit stetigen Randelementen . . . . .	171
4.1.10	Modellproblem 3: Gemischtes Randwertproblem . . . . .	172
4.1.11	Modellproblem 4: Schirmprobleme . . . . .	174
4.2	Konvergenz abstrakter Galerkin-Verfahren . . . . .	175
4.2.1	Abstraktes Variationsproblem . . . . .	176
4.2.2	Galerkin-Approximation . . . . .	176
4.2.3	Kompakte Störungen . . . . .	179
4.2.4	Konsistente Störungen. Lemma von Strang . . . . .	184

4.2.5	Aubin-Nitsche-Dualitätstechnik . . . . .	187
4.2.5.1	Fehler in Funktionalen der Lösung . . . . .	188
4.2.5.2	Störungen . . . . .	191
4.3	Beweis der Approximationseigenschaft . . . . .	196
4.3.1	Approximationseigenschaften auf ebenen Paneelen . . . . .	196
4.3.2	Approximation auf gekrümmten Paneelen . . . . .	202
4.3.3	Stetigkeit von Funktionen in $H_{stw}^s(\Gamma)$ für $s > 1$ . . . . .	205
4.3.4	Approximationseigenschaften von $S_G^{p,-1}$ . . . . .	206
4.3.5	Approximationseigenschaften von $S_G^{p,0}$ . . . . .	208
4.4	Inverse Abschätzungen . . . . .	208
4.5	Kondition der Systemmatrizen . . . . .	212
<b>5</b>	<b>Berechnung der Matrixkoeffizienten</b> . . . . .	<b>215</b>
5.1	Kernfunktionen und stark singuläre Integrale . . . . .	216
5.1.1	Geometrische Voraussetzungen . . . . .	216
5.1.2	Cauchy-singuläre Integrale . . . . .	220
5.1.3	Explizite Voraussetzungen an Cauchy-singuläre Kernfunktionen . . . . .	222
5.1.4	Kernfunktionen in lokalen Koordinaten . . . . .	225
5.2	Relativkoordinaten . . . . .	229
5.2.1	Der Fall identischer Paneele . . . . .	229
5.2.2	Der Fall einer gemeinsamen Kante . . . . .	236
5.2.3	Der Fall eines gemeinsamen Punktes . . . . .	238
5.2.4	Überblick: Regularisierende Koordinatentransformationen . . . . .	239
5.2.5	Berechnung der rechten Seite und des integralfreien Terms . . . . .	242
5.3	Numerische Integration . . . . .	244
5.3.1	Numerische Quadraturverfahren . . . . .	244
5.3.1.1	Einfache Quadraturverfahren . . . . .	244
5.3.1.2	Tensor-Gauß-Quadratur . . . . .	245
5.3.2	Lokale Quadraturfehlerabschätzungen . . . . .	246
5.3.2.1	Lokale Fehlerabschätzungen für einfache Quadraturverfahren . . . . .	246
5.3.2.2	Ableitungsfreie Quadraturfehlerabschätzungen für analytische Integranden . . . . .	250
5.3.2.3	Abschätzung der Analytizitätsellipsen der regularisierten Integranden . . . . .	252
5.3.2.4	Quadraturordnungen für regularisierte Kernfunktionen . . . . .	260
5.3.3	Einfluß der Quadratur auf den Diskretisierungsfehler . . . . .	261
5.3.4	Überblick über die Quadraturordnungen für das Galerkin-Verfahren mit Quadratur . . . . .	268
5.3.4.1	Integralgleichungen negativer Ordnung . . . . .	268
5.3.4.2	Gleichungen nullter Ordnung . . . . .	269
5.3.4.3	Gleichungen positiver Ordnung . . . . .	269
<b>6</b>	<b>Lösung der linearen Gleichungssysteme</b> . . . . .	<b>271</b>
6.1	cg-Verfahren . . . . .	272
6.1.1	cg-Grundalgorithmus . . . . .	272
6.1.2	Vorkonditionierungsverfahren . . . . .	273
6.1.3	Orthogonalitätsrelationen . . . . .	274

6.1.4	Konvergenzrate des cg-Verfahrens . . . . .	275
6.1.5	Verallgemeinerungen . . . . .	277
6.2	Abstiegsverfahren für nichtsymmetrische Systeme . . . . .	277
6.2.1	Abstiegsverfahren . . . . .	278
6.2.2	Konvergenzrate von MR und Orthomin( $k$ ) . . . . .	278
6.3	Iterative Löser für Gleichungen negativer Ordnung . . . . .	280
6.4	Iterative Löser für Gleichungen positiver Ordnung . . . . .	282
6.4.1	Integralgleichungen positiver Ordnung . . . . .	282
6.4.2	Iterationsverfahren . . . . .	284
6.4.3	Mehrgitterverfahren . . . . .	288
6.4.3.1	Motivation . . . . .	289
6.4.3.2	Mehrgitteralgorithmus für Integralgleichungen positiver Ordnung . . . . .	292
6.4.3.3	Geschachtelte Iteration . . . . .	294
6.4.3.4	Konvergenzanalyse für Mehrgitterverfahren . . . . .	295
6.5	Mehrgitterverfahren für Gleichungen negativer Ordnung . . . . .	310
<b>7</b>	<b>Panel-Clustering</b> . . . . .	<b>313</b>
7.1	Der Panel-Clustering-Algorithmus . . . . .	314
7.1.1	Voraussetzungen an den Integraloperator . . . . .	314
7.1.2	Clusterbaum und zulässige Überdeckung . . . . .	315
7.1.3	Approximation der Kernfunktion . . . . .	319
7.1.3.1	Čebyšev-Interpolation . . . . .	319
7.1.3.2	Multipol-Entwicklung . . . . .	322
7.1.3.3	Abstrakte Panel-Clustering-Approximation . . . . .	324
7.1.4	Die Matrix-Vektor-Multiplikation im Panel-Clustering-Format . . . . .	324
7.1.4.1	Berechnung der Fernfeldkoeffizienten . . . . .	328
7.1.4.2	Cluster-Cluster-Wechselwirkung . . . . .	329
7.1.4.3	Auswertung der Panel-Clustering-Approximation einer Matrix-Vektor-Multiplikation . . . . .	329
7.1.4.4	Algorithmische Beschreibung des Panel-Clustering-Verfahrens . . . . .	330
7.2	Realisierung der Teilalgorithmen . . . . .	332
7.2.1	Algorithmische Realisierung der Čebyšev-Approximation . . . . .	333
7.2.2	Entwicklung mit variabler Ordnung . . . . .	337
7.3	Fehleranalyse für das Panel-Clustering-Verfahren . . . . .	339
7.3.1	Lokale Fehlerabschätzungen . . . . .	340
7.3.1.1	Lokale Fehlerabschätzung für die Čebyšev-Interpolation . . . . .	340
7.3.2	Globale Fehlerabschätzungen . . . . .	352
7.3.2.1	$L^2$ -Abschätzungen des Panel-Clustering-Fehlers ohne partielle Integration . . . . .	353
7.3.2.2	$L^2$ -Abschätzungen des Panel-Clustering-Fehlers mit partieller Integration . . . . .	355
7.3.2.3	Stabilität und Konsistenz für das Panel-Clustering-Verfahren . . . . .	356
7.4	Der Aufwand der Panel-Clustering-Methode . . . . .	357
7.4.1	Anzahl der Cluster und Blöcke . . . . .	357
7.4.2	Der algorithmische Aufwand der Panel-Clustering-Methode . . . . .	362
7.5	Panel-Clustering für Kollokationsverfahren . . . . .	365

<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>367</b>
<b>Liste der Symbole</b>	<b>377</b>
<b>Index</b>	<b>380</b>