

Vorwort . . . . .	1
-------------------	---

**ERSTES KAPITEL: BLICK AUF DIE GRUNDLAGEN  
DER VORGRIECHISCHEN MATHEMATIK**

<b>A. Rechentechnik . . . . .</b>	<b>3</b>
1. Ägyptische Rechentechnik . . . . .	3
2. Babylonische Rechentechnik . . . . .	5
<b>B. Algebra . . . . .</b>	<b>7</b>
1. Ägyptische Algebra . . . . .	7
2. Babylonische Algebra . . . . .	8
<b>C. Ägyptische und babylonische Geometrie . . . . .</b>	<b>18</b>

**ZWEITES KAPITEL: DIE BEGRÜNDUNG DER WISSEN-  
SCHAFTLICHEN MATHEMATIK DURCH DIE GRIECHEN**

<b>A. Die frühgriechische Mathematik . . . . .</b>	<b>23</b>
1. Zahlzeichen und Rechnen . . . . .	23
2. Die Anfänge der griechischen Geometrie . . . . .	24
3. Der Bericht des Eudemos über die Quadratur der „Möndchen“ durch Hippokrates von Chios . . . . .	29
4. Die Arithmetik der Spielsteine ( <i>psēphoi</i> ) . . . . .	34
5. Die Lehre vom Geraden und Ungeraden . . . . .	37
<b>B. Die Grundlegung der Mathematik des Infinitesimalen . .</b>	<b>41</b>
1. Die ersten Betrachtungen über das Unendlichkleine ( <i>Zenon von Elea, Anaxagoras</i> ) . . . . .	41
2. Das Problem der Kreisquadratur ( <i>Antiphan, Bryson, Eudoxos</i> )	43
3. Integrationen nach der atomistischen und nach der Ex- haustionsmethode ( <i>Demokrit, Heron, Archimedes</i> ) . . . . .	55
4. Die Analyse des Unendlichkeits- und Stetigkeitsbegriffs durch Aristoteles ( <i>Unendlichkeit — Kontinuität — Zenons Paradoxien</i> ) . . . . .	64

<b>C. Die Theorie der Proportionen</b> . . . . .	78
1. Anfänge der Proportionenlehre ( <i>Archytas u. a.</i> ) . . . . .	78
2. Die Lehre von der geometrischen Proportion vor Eudoxos . . . . .	79
3. Die klassische Fassung der allgemeinen Proportionenlehre durch Eudoxos . . . . .	83
<b>D. Die systematische Grundlegung der griechischen Mathematik innerhalb ihrer selbst</b> . . . . .	87
1. Die logische Begründung durch die Axiomatik . . . . .	87
2. Der technische Sinn des Begriffs der mathematischen Existenz in der Antike . . . . .	90
<b>E. Die philosophische Reflexion auf die „elementare“ Grundlegung und das Wesen der Mathematik</b> . . . . .	95
I. Logische und methodische Fragen . . . . .	95
1. Platon über das Wesen der Mathematik . . . . .	95
2. Aristoteles über die Struktur einer „beweisenden“ Wissenschaft . . . . .	96
3. Proklos über Begriff und Methode der „Elemente“ der Mathematik . . . . .	98
II. Die Frage nach der Seinsweise der mathematischen Gegenstände . . . . .	105
1. Erste Betrachtungen zur Ontologie des Mathematischen durch die Pythagoreer . . . . .	105
2. Platon über den Seinssinn des Mathematischen . . . . .	109
3. Der „abstrakte“ Charakter des Mathematischen nach Aristoteles. . . . .	118
4. Die neuplatonische Philosophie der Mathematik im Euklid-Kommentar des Proklos . . . . .	121

## DRITTES KAPITEL: DIE GRUNDLEGUNG DER NEUEREN ABENDLÄNDISCHEN MATHEMATIK IM 17. JAHRHUNDERT

### DIE ENTDECKUNG DER ANALYSIS DES UNENDLICHEN

<b>A. Vorstadien der Infinitesimalrechnung</b> . . . . .	131
( <i>Nicole Oresme, Galilei, Kepler</i> )	
<b>B. Die Entdeckung der analytischen Geometrie durch Descartes</b> . . . . .	139

<b>C. Die Erfindung des Infinitesimalkalküls . . . . .</b>	<b>144</b>
1. Die Fluxionsmethode ( <i>Barrow</i> und <i>Newton</i> ) . . . . .	145
2. Berkeleys Kritik an der Fluxionsrechnung . . . . .	156
3. Leibnizens Differentialrechnung . . . . .	158

## VIERTES KAPITEL: DIE KRITISCHE MATHEMATIK DES 19. JAHRHUNDERTS

### ERSTER ABSCHNITT

#### GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE

1. Proklos über das 5. Postulat der Euklidischen „Elemente“	168
2. J. Wallis' Beweis der 5. Forderung Euklids aus der Existenz ähnlicher Figuren . . . . .	170
3. Girolamo Saccheris „von jedem Makel befreiter Euklid“	171
4. Johann Heinrich Lamberts Theorie der Parallellinien .	173
5. Kants Lehre vom Raum . . . . .	175
6. Gaußens Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie	178
7. F. A. Taurinus' Eintreten für den euklidischen Raum als eindeutige, apriorische Form des äußeren Sinnes . . .	183
8. B. Riemann über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen . . . . .	185
9. Felix Klein: Beweis für die Widerspruchsfreiheit der nichteuklidischen Geometrien . . . . .	194
10. Felix Klein: gruppentheoretisches „Erlanger Programm“	197
11. Moritz Paschs axiomatische Begründung der Geometrie	199
12. David Hilberts „Grundlagen der Geometrie“ ( <i>Widerspruchsfreiheit und Unabhängigkeit der geometrischen Axiome</i> )	202
13. Poincaré über die geometrischen Axiome als zweckmäßige Konventionen . . . . .	208
14. H. Dingler über den Aufbau einer technisch brauchbaren Geometrie . . . . .	209

### ZWEITER ABSCHNITT

#### DIE GRUNDLAGEN DER ARITHMETIK, ANALYSIS UND MENGENLEHRE

<b>A. Arithmetik . . . . .</b>	<b>213</b>
Leibniz und Gauß über das Imaginäre . . . . .	213
<b>B. Analysis . . . . .</b>	<b>217</b>
1. B. Bolzanos Beweis für den Zwischenwertsatz . . . . .	217
2. Die Entwicklung des Funktionsbegriffs nach H. Hankel	219
3. R. Dedekinds „Schnitt“-Theorie der irrationalen Zahl	224

4. G. Cantors Definition der irrationalen Zahl . . . . .	245
5. P. du Bois-Reymonds „Metaphysik und Theorie der mathematischen Grundbegriffe: Größe, Grenze, Argument und Funktion“ . . . . .	251
<b>C. Mengenlehre</b> . . . . .	272
1. Proklos über ein Paradoxon des Unendlichen . . . . .	273
2. Aus B. Bolzanos „Paradoxien des Unendlichen“ (Prag 1851) . . . . .	274
3. Georg Cantors Mengenlehre . . . . .	277
<i>(Abzählbarkeit der algebraischen Zahlen, Nichtabzählbarkeit des Kontinuums — Erste Einführung der transfiniten Zahlen — Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre — „Inkonsistente“ Vielheiten — J. v. Neumanns Begriff der „zu großen“ Mengen — Dedekind und Cantor über ihre Vorstellung einer unendlichen Menge — Dedekinds „Beweis“ für die Existenz unendlicher Mengen)</i>	

## FÜNFTES KAPITEL: DIE GRUNDLAGENFORSCHUNG DES 20. JAHRHUNDERTS

<b>A. Logizismus</b> . . . . .	317
1. G. Freges Kritik eines Leibnizschen Beweises und Definition des Begriffs der Zahl mit rein logischen Mitteln . . . . .	317
2. B. Russells logische Definition der Zahl . . . . .	322
3. B. Russell: Die Antinomien der Mengenlehre und ihre Auflösung durch die Theorie der logischen Typen . . . . .	323
<b>B. Intuitionismus</b> . . . . .	327
1. L. K. Kronecker gegen den Gebrauch irrationaler Zahlen und nicht-entscheidbarer Definitionen . . . . .	327
2. É. Borels Bedenken gegen den Begriff einer unstetigen Funktion allgemeinsten Art . . . . .	328
3. L. E. J. Brouwers „Neointuitionismus“ ( <i>Die intuitionistische Mengenlehre, unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten</i> ) . . . . .	329
4. A. Kolmogoroffs Deutung der Brouwerschen Logik als „Aufgabenrechnung“ . . . . .	334
5. H. Weyl über die „Grundlagenkrise der Mathematik“ (Halbintuitionismus und Intuitionismus) . . . . .	336
<b>C. Beweistheorie (Formalismus)</b> . . . . .	351
1. D. Hilberts axiomatische Definition der Zahl . . . . .	351

2. Einige Betrachtungen von Leibniz zur „Charakteristik“ (Zeichen und Dinge) . . . . .	355
3. D. Hilberts erster Ansatz zu einem Widerspruchsfreiheits- beweis der Arithmetik . . . . .	360
4. Charakteristische Proben aus Hilberts reifen Arbeiten zur Beweistheorie (Metamathematik) . . . . .	370
5. E. Husserl über noetisch-noematische Stufen und ihre Charakteristik . . . . .	384
6. Schelling über transfinite Reflexionen . . . . .	387
7. Gentzens Beweis für die Widerspruchsfreiheit der Zah- lentheorie . . . . .	387
8. P. Lorenzens konstruktive Begründung der Mathematik	392
9. P. Lorenzens Beweis für die Widerspruchsfreiheit der Analysis . . . . .	398
Anhang . . . . .	402
Schlußwort . . . . .	406
Quellenverzeichnis . . . . .	407
Anmerkungen . . . . .	412
Bibliographie . . . . .	415
Namenverzeichnis . . . . .	421
Sachverzeichnis . . . . .	426