

TABLE ANALYTIQUE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER

PROLÉGOMÈNES

<i>Plan de cette introduction</i>	19
NUMÉRATIONS FIGURÉES, PARLÉES, ÉCRITES	19
Les traductions permettant de passer d'une sorte de numération à une autre appliquent le principe de correspondance	20
<i>Grandes variétés de numérations figurées</i>	20
Image d'un troupeau sous la forme de boulettes d'argile.	
Utilisation du corps humain qui conserve l'ordre dans lequel les nombres devront être présentés.	
Le geste doit accompagner la parole	22
<i>Importance de la main</i>	23
Sur le corps humain le nombre 5 est répété quatre fois.	
La forme de la main lui permet de repérer aisément un nombre ordinal.	
Pouvant être considérée à la fois comme un tout et comme la juxtaposition des doigts, l'idée de base devient intuitive.	
<i>Les numérations écrites historiquement attestées donnent valeur privilégiée à 10 ou à certains de ses multiples</i>	25
La base 10 est de moins bonne qualité que la base 12, mais elle est supérieure à 5 qui eût été trop petit et aussi supérieure à 20 et à 60 trop grands pour la mémoire humaine.	

Le système binaire a supplanté la base 10 dans les modernes machines à calculer	
Ayant fait choix d'une base il était simple de considérer son carré comme une nouvelle unité; mais ceci n'avait rien d'obligatoire, la numération sumérienne et la numération maya des codices en font foi	26
Du carré de la base on passe au cube de la base	27
L'introduction de symboles originaux pour représenter la base et ses puissances donne au dénombrement un caractère scientifique.	
La numération figurée a été un pont entre la numération parlée et la numération écrite, ce qui explique le rôle primordial joué par la table à compter, relayée ultérieurement par le boulier	29
<i>Difficultés de la numération parlée.</i>	31
Nommer la base et donner ensuite des noms originaux à ses premières puissances.	
Du danger des bases auxiliaires : mille, myriade	31
Inventer une grammaire qui permette d'énoncer le nombre en toute sécurité.	
Il y a équivalence entre l'expression d'une numération parlée bien organisée et l'expression d'un polynôme dont la variable est la base de la numération	34
CLASSIFICATION HIÉRARCHISÉE DES NUMÉRATIONS ÉCRITES	35
Dans l'expression de chaque monôme deux informations sont en général présentes : la puissance de la base et son coefficient.	
<i>Type I dit d'addition</i>	37
La simple juxtaposition des symboles implique que leurs valeurs numériques doivent être additionnées.	
Type I _{A'} , Symboles limités à l'unité, à la base et à ses premières puissances.	
Type I _{A''} , Introduction d'un diviseur privilégié de la base et de ses puissances.	
Type I _B Apparition de deux bases alternées.	
Type I _C Symboles originaux pour tous les nombres inférieurs à la base.	
Symboles originaux pour tous les nœuds successifs.	
Importance de l'alphabet ou du syllabaire.	
<i>Type II dit hybride</i>	38
Coefficients et puissances de la base jouent des rôles également importants.	
Transcription intégrale de la numération parlée.	

<i>Type III dit écrit de position</i>	38
Seuls les coefficients subsistent mais ils doivent être enchaînés dans un ordre strict.	
Si un nœud vient à manquer des difficultés apparaissent.	
Zéro médial, zéro opérateur.	
Importance des ébauches du zéro opérateur.	
Quatre numérations de position seulement sont historiquement attestées	39
TABLE A COMPTER. BOULIER	41
Sur la table, mention est faite de la position de l'unité de la base et de ses puissances qui doivent former un ensemble totalement ordonné.	
Sur le boulier toute mention écrite ou gravée a disparu.	
L'instrument le plus important est la table à compter; le boulier est un instrument tardif destiné aux opérations effectuées en numération écrite de position.	
Tout nombre écrit dans le type hybride devient écrit de position sur la table à compter	43
Les opérations nobles sont nées sur la table à compter	44
Sur le boulier les nombres sont présentés dans une numération de Type III _B , mais de caractère primitif puisque les unités sont égrenées alors qu'elles ne l'étaient pas dans la numération de type classique III _B	46
PRÉSENTATION DU CODE	46
Le code est simple parce qu'une loi d'économie a présidé à l'écriture des nombres.	
Pour la numération écrite il se limite à sept symboles :	
<i>s</i> : symbole original	47
<i>j</i> : symboles juxtaposés valeurs additionnées	48
<i>j.</i> : symboles juxtaposés valeurs multipliées.	
<i>l</i> : symboles ligaturés valeurs additionnées	49
<i>l.</i> : symboles ligaturés valeurs multipliées.	
σ : signe dépourvu de valeur numérique, mais qui, juxtaposé à un symbole numérique, multiplie conventionnellement sa valeur par une puissance déterminée de la base.	
Σ : zéro opérateur uniquement pour les numérations de type III. .	50
Pour la numération parlée l'apparition d'une base auxiliaire, puissance de la base doit être notée par un nouveau symbole : \underline{s}	51
L'écriture des nombres se présente généralement linéairement	53
Classification et Code se prêtent mutuellement appui.	
Fin du chapitre	54

CHAPITRE II

ÉGYPTE AZTÈQUES

ÉGYPTE

NUMÉRATION HIÉROGLYPHIQUE (type I _A)	55
<i>C'est un dénombrement dans la base 10</i>	56
On renonce en écrivant au caractère évolué de la numération parlée.	
Écriture se limitant aux nombres inférieurs à 10 ⁷ ; elle n'exige que sept symboles originaux mais leur répétition rend cette numération lourde à manier.	
<i>Étude des sept chiffres</i>	58
Présentation des divers nœuds : une décomposition dyadique apparaît progressivement.	
<i>Disposition matérielle du nombre</i> : les divers nœuds sont disposés linéairement	63
Le sens de lecture est indiqué à un lecteur averti.	
<i>Étude des plus anciens textes numériques</i>	64
Documents trouvés à Hiérakonpolis et à Saqqara.	
<i>L'irrégularité créatrice</i>	70
Cette numération, de type I _A ', très pur, a évolué grâce à une remarquable irrégularité due au fait que le signe pour un million est tombé en désuétude : une écriture abrégée s'est introduite pour un nombre qui aurait dû grouper cent un têtards.	
Cette irrégularité est restée d'un usage limité, avec elle l'écriture hiéroglyphique accède au type hybride partiel	73
NUMÉRATION HIÉRATIQUE	75
Influence remarquable de l'emploi d'une cursive qui lie les caractères identiques au point de rendre méconnaissable le groupement initial.	
Passage du type I _A ', au type I _C '.	
Présentation des divers nœuds.	
TECHNIQUE DU CALCUL EN ÉGYPTE	78
Importance de la conception égyptienne relative à l'écriture des fractions.	

<i>Thot, le dieu qui sait compter</i>	78
Mythe destiné à expliquer comment le calendrier lunaire s'est adapté au déplacement apparent du soleil sur la sphère céleste, au cours d'une année.	
Apparition de 5 jours supplémentaires, représentant 1/72 de l'année ancienne.	
Ces jours ont été extorqués par Thot à la lune afin que la déesse Nout puisse mettre au monde ses enfants.	
Mythe relatant la lutte entre Seth et Horus	81
Seth ayant réussi à s'emparer d'un des yeux d'Horus le réduit en six morceaux. Thot réussit à reconstituer l'œil mutilé.	
Chaque partie de l'œil a reçu valeur numérique sous la forme de puissances négatives de 2 : $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$.	
Mythe très complexe	82
Le dessin des diverses parties de l'œil d'Horus sert à présenter les divisions dyadiques des mesures de capacités lorsqu'elles concernent les céréales ou le minéral.	
L'œil droit ou l'œil gauche peuvent être utilisés suivant le sens de lecture du texte	83
LE PAPYRUS DE RHIND	84
Rédigé par le scribe Ahmes.	
Édition critique de T. Eric Peet (1923).	
Planche extraite du Leather scroll pour initiation à l'écriture numérique hiéroglyphique et à l'usage des fractions en Égypte	86
LES QUATRE OPÉRATIONS, LES FRACTIONS	87
Multiplication de deux nombres entiers obtenus par duplications successives	90
Multiplication d'un nombre entier par 10, par 100	91
Division de deux nombres entiers lorsque le quotient est entier	91
Division de deux nombres entiers lorsque le quotient est fractionnaire	92
Usage obligatoire de fractions de numérateur 1 (fractions égyptiennes), $\frac{2}{3}$ cependant a reçu un symbole original.	
Exemples commentés : 19 : 8 16 : 3 4 : 15	92
Résolution moderne du 3 ^e exemple	94

Le scribe introduit de manière partiellement arbitraire une première fraction égyptienne de dénominateur d , inférieur à 15, et choisie de telle manière qu'elle permette de reconstituer $4/15$ en lui ajoutant une autre fraction égyptienne	95
Nouveaux exemples : 6 : 10 7 : 10 8 : 10 9 : 10	96
Relations fondamentales concernant les fractions égyptiennes	98
$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$.	
$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ généralisation $\frac{1}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n}$.	
$\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ généralisation $\frac{2}{3k} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{6k}$.	
Intérêt de l'introduction des fractions égyptiennes en particulier pour l'écriture cursive	99

NOTE 1

Table 2 : n

n entier impair inférieur ou égal à 101	100
Écarter provisoirement 3 et ses multiples impairs.	
Méthode générale utilisée pour le seul nombre 101	101
Cette méthode n'est qu'un pis aller.	
32 valeurs de n .	
Le choix du nombre arbitraire d peut être simplifié si n n'est pas premier (9 valeurs de n)	104
n EST PREMIER (23 VALEURS DE n)	104
d appartient à des suites néodyadiques aisées à former	106
Former $\frac{2d-n}{d}$ (complément de $\frac{n}{d}$).	
Qualités que doit remplir $2d-n$	107
Exemple $n = 71$ $d = 40$	108
Exercice d'entraînement figurant dans le Papyrus de Rhind :	
Compléter $\frac{2}{3} + \frac{1}{15}$ à 1	110
Discussion permettant d'orienter le choix de d .	
Étude systématique des valeurs de d pour $n = 23$	111
Le problème résolu artisanalement par les scribes égyptiens est lié au problème suivant : Peut-on former à partir des parties aliquotes de d une somme égale à d ?.	

Aucune partie aliquote de d ne peut figurer plus d'une fois dans la somme considérée	115
Définitions des nombres parfaits, déficients, abondants. Exemples : Tous les multiples de 6 sont abondants	116
Décomposition en fractions égyptiennes de toutes les fractions irréductibles de dénominateur 15, inférieures à 1.....	117
De tels exercices ont été présentés à la période byzantine mais il s'agit d'une technique dégénérée le choix de d étant mauvais.....	118
Le choix de d , par les scribes de bonne époque s'éclaire par les considérations précédentes : tous les nombres déficients ont été systématiquement écartés	119
Les problèmes que posait l'utilisation des fractions égyptiennes a peut-être orienté les Grecs vers l'étude des nombres parfaits, déficients ou abondants, problèmes d'une extrême difficulté qui continuent de n'être que partiellement résolus	120
n N'EST PAS PREMIER MAIS IL EST PREMIER À 3 (9 VALEURS)	120
Le choix de d est facilité.	
Le choix du scribe est remarquable pour $n = 35$ et pour $n = 91$, il est de moins bonne qualité pour $n = 95$	124
Discussion théorique pour ces 9 valeurs de n	125
n EST MULTIPLE DE 3 (16 VALEURS)	129
Le scribe applique une méthode unique inspirée d'une formule générale qui n'est pas la meilleure pour 6 de ces valeurs.....	130
Résumé complet de la discussion : tableau 10.....	132
Importance historique des fractions égyptiennes	133
La lourdeur du système égyptien, son caractère artisanal, expliquent que le système sexagésimal des fractions lui ait été préféré	134

NOTE 2

<i>Compléments théoriques</i>	135
Résumé concernant l'étude des entiers N tels qu'à partir de leurs seuls diviseurs on puisse former tous les entiers inférieurs ou égaux à N	136

AZTÈQUES

Généralités sur les numérations aztèque et maya.....	138
Seuls documents originaux : les codices.....	140
<i>Numération de base 20, type I_A'</i>	142
Quatre nœuds seulement sont présentés.	
Cette numération apparaît sur le Calendrier et sous la forme de dénombrements.	
<i>Calendrier des Précolombiens</i>	144
<i>Année religieuse</i>	145
Durée 260 jours, résultant de la considération simultanée des 20 jours sacrés placés dans un ordre immuable et des 13 premiers nombres entiers.	
Tezcatlipoca	149
Dieu des vingt jours : chacun d'entre eux figure sur son manteau sous la forme d'un hiéroglyphe. (planche 8 + commentaire).	
Seuls les 13 premiers nombres entiers sont présentés numériquement sur le calendrier	152
Le groupement de leurs unités est très varié.	
<i>Année solaire</i>	157
Durée 365 jours.	
Il y a eu confrontation entre année solaire et année religieuse : le premier jour de chaque année solaire est signalé par la présentation du jour de l'année religieuse qui lui est associé (year-bearer). Ce jour, porteur de l'année, suffira à caractériser l'année solaire dans les chronologies.	
<i>Calendar Round</i>	160
Cycle de 52 années solaires présentées sous la forme de 52 year-bearers différents.	
<i>Textes provenant du Codex Mendoza</i>	164
Le Codex a été peint en 1549, la première édition critique n'est que de 1938.	
<i>Première partie</i>	165
Chronologie des Seigneurs de Mexico.	
Durée du règne (mythique) de Tenuch : 51 year-bearers (planche 11 + commentaire).	

<i>Seconde partie</i>	165
Dénombrement concernant les tributs que les villes aztèques étaient tenues de fournir à Montecuçuma.	
Les quatre nœuds apparaissent; malgré de trompeuses apparences ils sont présentés isolément.	
Discussion de cette question controversée	169
<i>Textes provenant du Codex Telleriano Remensis</i>	178
Dans la partie historique du récit, des nombres considérables apparaissent sous la forme de dénombrements de prisonniers. Ces nombres groupent généralement les deux nœuds supérieurs.	
S'il a existé un usage dynamique de cette numération, il nous est inconnu	180
Fin du chapitre.....	180

CHAPITRE III

GRÈCE I ROME

GRÈCE I

Généralités sur les numérations écrites grecques	181
La primitive numération, qualifiée autrefois d'hérodiennne, est de type I_A^n et de base 10.	
Système acrophonique attique	182
Les signes numériques en usage pour cette écriture sont les plus anciens sigles de l'épigraphie grecque.	
ÉTUDE DES DIX CHIFFRES DE CETTE NUMÉRATION	183
Le caractère privilégié reconnu à 5, diviseur de 10, entraîne l'apparition de signes pour noter : 5, 50, 500, 5000, 50000; lesquels s'ajoutent aux signes pour : 1, 10, 100, 1000, 10000.	
<i>Travaux de M. N. Tod</i>	184
NOTATION DES MONNAIES	186
Irrégularité due à l'introduction du talent qui valait 6000 drachmes.	
Autre irrégularité : le talent se divisait dyadiquement.	
Treize symboles sont utilisés	188

ABAQUE DE SALAMINE	188
Magnifique document qui était une table à compter pour les monnaies : elle fait état des treize symboles.	
Légère transformation des symboles initiaux lorsque le talent est pris comme unité	
	191
AUTRES SYSTÈMES ACROPHONIQUES GRECS	195
En Béotie, apparition de symboles aberrants destinés à noter 30 et 300.	

ROME

GÉNÉRALITÉS	199
Importance dans le temps et dans l'espace de cette numération qui n'a dû son succès qu'à la longue hégémonie de Rome.	
Son usage moderne n'est qu'une survivance.	
NUMÉRATION SŒUR DE LA NUMÉRATION GRECQUE ACROPHONIQUE	202
Elle est de type $1A^n$, de base 10, avec valeur privilégiée attribuée au nombre 5	
Les sept chiffres du système symbolisent : 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000	
	203
L'origine du dessin de ces chiffres est controversée.	
<i>Numération parlée latine pour les puissances de 10</i>	205
Elle permet l'accession à l'énoncé de grands nombres par l'intermédiaire de paliers pour mille et pour cent mille; il n'existait pas de mot pour le million.	
Très subtile numération parlée pour les monnaies.....	
	207
<i>Les abaqués à main</i>	209
Documents rares et aussi précieux que l'Abaque de Salamine.	
L'instrument est un boulier de même type que le boulier chinois, le nombre cinq malgré sa valeur privilégiée, a été heureusement incorporé dans l'ensemble des boules qui valent une unité de même valeur.	
Ce boulier servait aux calculs concernant les monnaies.	
Étude sur ces bouliers des chiffres anciens unifiant la notation des puissances de 10 supérieures à 10^2	
	211
Notation tenant beaucoup de place, mais originale et bien conçue	

ACCESSION A L'ÉCRITURE DE GRANDS NOMBRES	213
Elle fait état de deux symboles marquant la multiplication d'un nombre par mille ou par cent mille.	
<i>Efforts tentés pour créer une numération écrite de position à deux bases auxiliaires</i>	216
Rares exemples, remarquablement choisis par leurs auteurs, car cette numération abrégée pouvait être ambiguë.	
<i>Notation difficile des nœuds isolés</i>	220
Discussion par J. Carcopino, de l'un de ces cas litigieux.	
Le caractère géométrique des chiffres latins et aussi des signes symbolisant la multiplication d'un nombre par mille ou par cent mille favorisait les erreurs des copistes.	
<i>Essais à basse époque de la simplification de l'écriture des nombres</i> ..	224
La numération latine s'efforce vainement de survivre face à la numération qui la supplantera.	
Fin du chapitre	227

CHAPITRE IV

LES NUMÉRATIONS ALPHABÉTIQUES
HÉBREUX, GRÈCE II ET III, ÉTHIOPIE, ARABE I

<i>Numérations de type I_C" qui utilisent les lettres de l'alphabet comme symboles numériques</i>	229
L'alphabet phénicien, composé de 22 consonnes est à l'origine de tous les autres alphabets	230
Ses lettres se présentaient dans un ordre immuable ce qui le qualifiait pour être instrument de numération	
Alphabet hébraïque 22 consonnes	
Alphabet grec 24 consonnes et voyelles	
Alphabet arabe 28 consonnes	232
Les trois numérations correspondantes sont de base 10; elles symbolisent aisément les nœuds des unités et des dizaines; la présentation des centaines sera délicate, sauf en arabe	232

HÉBREUX 234

Six nœuds sont représentés.

L'alphabet ne permet de noter que les premières centaines, les dernières ont d'abord été caractérisées par des signes composés, puis par des signes simples habilement tirés de l'alphabet.

Un artifice d'écriture permet de noter les trois derniers nœuds... 236

La simplicité de cet artifice a même permis à l'écriture de certains nombres de devenir partiellement de position.

L'écriture du nombre 15 est irrégulière par suite d'un tabou religieux. 237

GRÈCE II 239

Importance de cette numération dans le temps et dans l'espace

Sources : travaux de M. N. Tod pour la numération attique 240

Peu de nombres sur les inscriptions : beaucoup sont écrits en toutes lettres, les nombres ordinaux sont écrits en acrophonique, pas d'ère d'origine, peu de goût pour les dates.

Les 24 lettres de l'alphabet ont d'abord servi à noter les 24 premiers nombres entiers 241

Usage limité et éphémère.

Numération classique 242

Quatre nœuds seulement sont représentés.

On commence par noter les nœuds des unités, des dizaines et des centaines, bien que le système s'essouffle pour les dernières centaines qui sont notées grâce à l'introduction de trois lettres archaïques rejetées par l'alphabet classique.

Un trait supplémentaire ajouté aux unités simples permet de noter le nœud des mille 242

Enfin la myriade reçoit symbole numérique sous la forme d'un signe de caractère acrophonique 245

La valeur numérique d'un nombre est indépendante de l'ordre des lettres qui le composent 245

La présentation d'un nombre sur la table à compter permet à cette dernière de faire figure de révélateur en restituant l'ordre hiérarchisé des puissances de la base 247

La facile adaptation de la numération grecque à la notation des fractions sexagésimales lui a assuré une longue survie 249

GRÈCE III

250

Notation des grands nombres conçue à partir de la myriade devenue base auxiliaire	251
Arénaire d'Archimède : conception remarquable mais sans usage pratique	253
Apollonius de Perge crée une numération de type hybride complet d'usage savant	255
Multiplication de deux nombres entiers	258
Lettres de Rhabdas.	
Comment calculait Démosthène	262
Les multiplications attestées proviennent d'auteurs de basse époque	263

NOTE 3

<i>Présentation moderne de la multiplication de deux nombres entiers exprimés en numération grecque alphabétique</i>	265
--	-----

ÉTHIOPIE

270

Emprunt tardif à Grèce II.

Remarquable simplification : seuls les nœuds des unités et des dizaines sont notés, cent devient la base d'une numération de type hybride complet. Les puissances de cent sont notées d'une manière assez naïve	271
---	-----

ARABE I

273

Six nœuds sont représentés.

L'alphabet permet d'accéder facilement au nombre mille.

Des signes composés, formés de deux lettres juxtaposées ou ligaturées, permettent d'écrire tous les nœuds suivants jusqu'au million.

Première difficulté.

La confrontation de l'alphabet arabe avec les valeurs numériques attribuées aux consonnes montre que les nombres successifs apparaissent dans le désordre	276
Si l'on place les nombres suivant un ensemble totalement ordonné, on retrouve pour les consonnes associées l'ordre de l'alphabet phénicien	276

On sait, en effet, qu'après avoir adopté l'ordre des alphabets consonantiques anciens les grammairiens arabes l'ont rejeté pour des raisons graphiques et phonétiques	279
L'ordre initial des nombres ayant été perdu, des mots mnémotechniques ont été inventés pour aider à retenir la succession des nœuds	280
<i>Seconde difficulté.</i>	
L'usage des points diacritiques est dangereux car il peut favoriser la confusion pour certains nombres qui ne diffèrent que par eux	281
<i>Troisième difficulté.</i>	
L'écriture des nombres quelconques est rendue difficile à déchiffrer parce qu'il s'agit d'une écriture qui doit se plier aux lois inexorables de la cursive arabe : chaque nombre composé de la juxtaposition de deux ou de plus de deux lettres doit être considéré comme un mot.	
Or chaque lettre peut recevoir quatre formes distinctes suivant sa position dans le mot : isolée, initiale, médiale, finale	283
Toutes ces complications confinaient la première écriture arabe des nombres dans un usage statique. Seule l'adoption du système sexagésimal de position lui a permis de devenir une numération accessible au calcul puisque pratiquement il suffisait de savoir écrire les 59 premiers nombres entiers	287
Dans ces conditions un répertoire de 59 symboles dont 45 sont composés de deux lettres juxtaposées suivant les lois de la cursive arabe permettait d'écrire tous les nombres entiers, si grands soient-ils.	
Étude d'une table sexagésimale qui était encore en usage en Égypte au début du XIX ^e siècle	288
Justification de l'écriture cursive des 60 premiers nombres entiers	289
Usage pratique de cette table	295
Fin du chapitre	296

CHAPITRE V

SUMER ET BABYLONE

<i>Intérêt et importance de la plus ancienne numération écrite de position</i>	297
Résumé de ses qualités essentielles.	
Sa longue survie comme numération savante.	
Son opposition avec la numération vulgaire accadienne.	

<i>Numération figurée par les calculi</i>	299
Étude de l'objet ovoïde découvert à Nizu en 1928, il contenait 48 cailloux symbolisant un troupeau comportant 48 têtes de bétail.	
La comptabilité des intendants a comporté ultérieurement des calculi de différentes formes et de différentes tailles.	
L'image grossière de ces calculi apparaît dans l'écriture.	
La numération écrite sumérienne réalisée avec le calame circulaire comportait 6 chiffres pour 1, 10, 60, 600, 3600, 36000 ...	301
10 figure donc explicitement et devient ensuite opérateur.	
6 n'est qu'opérateur.	
La présence de deux bases régulièrement alternées conduit fatalement à une numération de base 60.	
<i>Numération parlée sumérienne</i> (d'après Thureau-Dangin)	302
Elle porte témoignage des articulations qui apparaissent dans la numération écrite.	
<i>Numération écrite (type I_B).</i>	
<i>Sumer I</i>	306
Disposition dyadique des symboles identiques.	
L'apparition des premières opérations remonte au 3 ^e millénaire.	
<i>Multiplication</i>	308
Étude systématique des 6 produits les plus élémentaires; 2 d'entre eux sont difficiles à effectuer	309
<i>Division</i>	311
Résumé de l'étude d'une tablette sumérienne remontant à — 2000.	
<i>Sumer II</i>	315
Profondes transformations matérielles de l'écriture liées à l'apparition d'un nouveau calame.	
A l'origine présentation dyadique des symboles identiques puis progressivement primauté donnée au nombre 3 (Textes mathématiques de Suse)	317
La ressemblance entre les signes pour 60 et pour 1 a dû favoriser l'évolution de cette numération.	
<i>De Sumer II à la numération écrite de position</i>	318
Identité d'écriture des nombres inférieurs à 60 pour Sumer II et pour Babylone.	
Comparaison de l'écriture des nombres compris entre 60 et 60 ² ..	320
Évolution probable du signe pour 600.	

<i>Apparition tardive du zéro médial</i>	322
Graphiquement il s'agit du signe de séparation.	
Le zéro opérateur est absent.	
<i>Pourquoi 60 ?</i>	326
Il y a eu croisement des bases 10 et 6; il serait plus légitime de dire pourquoi 6?.	
Historique des théories anciennes (Thureau-Dangin)	326
<i>Documentation récente : textes économiques</i>	327
Monnaie d'argent, monnaie d'orge; cette dernière est une monnaie de compte.	
<i>Première numération de l'orge</i>	330
Articulations successives pour 6, 36, 144.	
<i>Seconde numération de l'orge</i>	334
Articulations successives pour 10, 60, 300.	
Importance donnée à la durée du mois lunaire	337
<i>Nombres caractérisant les grands dieux</i>	338
Deux triades divines	338
Anu (ciel) 60 Enlil (terre) 50 Enki (eaux) 40	
Sin (lune) 30 Shamash (soleil) 20 Ishtar (Vénus) 15.	
Le nombre attribué à Sin se présente naturellement puisque la durée moyenne de la lunaison est 30 jours.	
On peut en dire autant de l'importance attribuée au premier ou au dernier quartier mais la demi-lunaison peut aussi être artificiellement divisée en trois parties égales placées sous les signes d'Anu, d'Enki et d'Enlil.	
<i>Découvertes récentes en musique</i>	342
Au temps des Cassites (— 1500) la gamme de sept notes était connue en Mésopotamie avec apparition de la quinte et de la quarte.	
La tablette qui révèle ces faits contient des archaïsmes en langue sumérienne.	
Importance de la quinte dans l'étude des cordes vibrantes	344
Son introduction exige la division de la corde en trois parties égales, alors que la division d'une corde vibrante en deux parties égales n'apporte harmoniquement rien de nouveau.	
<i>Calculs en numération sexagésimale</i>	347

Tables de multiplication : elles sont nombreuses.

- On appelle régulier tout nombre entier ne contenant pas d'autres facteurs premiers que 2, 3, 5 349
 Tout nombre régulier est diviseur de 60 ou d'une puissance de 60.

Tables des inverses pour un nombre entier n 350

Elles sont particulièrement simples si n est régulier : elles permettent de diviser un nombre quelconque par n .

Tardivement les Babyloniens ont même utilisé des valeurs sexagésimales approchées pour des nombres qui n'étaient pas réguliers.

Numération vulgaire accadienne 352

Type hybride partiel, de base 10.

Les chiffres sont 1, 10, 100, 1000.

Les nœuds des dizaines s'écrivent de manière archaïque, par simple répétition du nombre dix.

Fin du chapitre 354

CHAPITRE VI

MAYAS

INTRODUCTION 355

La numération écrite maya, sous sa forme la plus évoluée est de même conception que la numération babylonienne : type IIIA', base 20.

Elle n'a été qu'un instrument mis au service du calendrier.

Aire géographique du pays maya 357

Les monuments se sont en général effondrés sous l'influence de la jungle, qui les a quand même protégés des déprédations humaines

Documents 359

Les gravures des stèles et des monuments.

Trois codices mayas ont survécu à la domination espagnole, le plus important est le Codex de Dresde.

Récits d'origine maya rédigés en espagnol, après la conquête.

Œuvre de Diego de Landa.

<i>Découverte des ruines en 1840 par Stephens et Catherwood</i>	363
Stephens et Catherwood ont exploré les ruines de Copan, Palenque et Uxmal.	
Les travaux de ces deux pionniers ont prouvé, contrairement aux idées préconçues des historiens contemporains, qu'il s'agissait d'une civilisation autochtone d'une grande originalité.	
ANNÉE RELIGIEUSE	365
Même conception que celle des Aztèques.	
20 noms de caractère divin, présentés dans un ordre immuable; étude de certains d'entre eux.	
Introduction des 13 premiers nombres entiers.	
Système de permutation circulaire à deux facteurs	368
Durée de l'année religieuse : 260 jours	369
20 est la base de la numération.	
13 origine inconnue; il y a 13 grands dieux du ciel.	
Tableau des 260 jours de l'année religieuse	372
Chaque jour est caractérisé par un nom et par un nombre.	
L'usage du tableau précédent met en évidence le lien mathématique simple qui unit 20 et 13 : $20 \times 2 - 13 \times 3 = 1$.	
ANNÉE VAGUE	375
Durée : 365 jours. C'est une année solaire.	
18 mois de 20 jours + 5 jours (Uayeb).	
Succession des mois empruntés au livre de Chilam Balam de Chumayel	376
Étude de quelques mois et de Uayeb.	
Tableau des 365 jours de l'année vague	379
CALENDAR ROUND (C. R.)	380
Considération simultanée d'un jour de l'année religieuse (αX) et du jour correspondant de l'année vague (βY).	
Si l'on part du jour $\alpha X \beta Y$, on le retrouve après un cycle de 52 années religieuses ou de 73 années vagues.	
Pour définir un C. R. le choix d'un jour d'origine était indispensable : 4 Ahau 8 Cumhu.	
YEAR-BEARERS (porteurs de l'année)	383
La découverte des year-bearers a engendré pour les Mayas celle du C. R..	

Si l'année vague avait compté 360 jours, son premier jour eût été associé à un seul des vingt jours sacrés de l'année religieuse, Caban pour l'origine 4 Ahau 8 Cumhu.	
Comme l'année vague compte 365 jours et que 5 est un diviseur de 20, 4 jours sacrés seulement de l'année religieuse sont associés au premier jour de l'année vague : ce sont les year-bearers.	
Caban, Ik, Manik, Eb.	385
Comme 365 est un multiple de 13, augmenté de 1, le nombre associé à chaque year-bearer augmente d'une unité chaque année. On peut donc aisément présenter la succession des 4×13 jours de l'année religieuse qui définissent le C. R..	
Tableau des year-bearers que les Mayas ont pu dresser, par voie empirique	388
Ce tableau peut être utilisé pour le 1 ^{er} jour d'un mois quelconque de l'année vague, ce qui permet de vérifier l'appartenance au C. R. d'un jour donné $\alpha X \beta Y$.	
Présentation moderne du tableau précédent	393
NUMÉRATIONS	393
Toutes les dates utilisées dans le Calendrier sont exprimées en jours et comptées à partir de l'origine; elles sont aussi situées dans le C. R..	
L'origine étant située très loin dans le passé ceci implique la possibilité de savoir écrire de grands nombres.	
<i>Numération parlée maya</i>	394
Remarquablement cohérente.	
Pour les 19 premiers nombres entiers, 10 est un relais.	
Dans l'énoncé des nombres de 41 à 60, intervention inattendue de la troisième vingtaine, il s'agit probablement d'un archaïsme.	
Usage des classeurs numériques	401
<i>Numération écrite</i>	402
L'écriture des 19 premiers nombres entiers est de type I_A' , 5 jouant le rôle de diviseur privilégié de la base.	
<i>Adaptation de la numération écrite au calendrier</i>	404
Introduction d'une irrégularité qui joue le rôle d'année de compte : 360 se substitue à 400. Cette irrégularité a été funeste à la logistique.	
<i>Présentation de grands nombres sur les stèles</i>	405
Cinq glyphes sont en général utilisés.	

- Cette numération pouvait se passer du zéro, l'absence de certains nœuds est cependant signalée afin de conserver une ordonnance immuable à la présentation des glyphes.
- La numération des stèles est de type hybride complet mais contient une irrégularité* 408
- La numération qui apparaît dans le Codex de Dresde est de position et de type III_A'* 409
- Cette transformation était due sans doute au souci d'abrégier l'écriture des nombres.
- La mention du zéro est toute naturelle.
- L'irrégularité empêche le zéro terminal d'être opérateur.
- Apparition de nouveaux symboles pour écrire les nombres inférieurs à la base* 412
- Il est attesté que l'effigie de dieux puisse se substituer à l'écriture sténographique des dix-neuf premiers nombres entiers.
- Transposition aisée pour les 13 premiers nombres entiers qui sont associés aux 13 dieux du jour. Pour les nombres suivants, intervention de Cimi, consacré au dieu 10, et représenté par une tête de mort.
- La seule apparition du squelette du maxillaire inférieur associé aux dieux 3, 4, 5... 9 suffit à leur permettre de caractériser les nombres 13, 14, 15... 19.
- Usage rare, limité aux stèles. Il ne s'agit pas d'une évolution vers une numération de type III_B.
- La numération écrite de position des Mayas est d'une grande qualité* ... 415
- Le zéro médial et le zéro terminal sont d'un usage courant, ce dernier n'est pas un zéro opérateur.
- L'irrégularité introduite pour le Calendrier a interdit aux Mayas d'inventer une technique pour les opérations nobles.
- LES SÉRIES INITIALES 416
- Les stèles étaient en général érigées aux fins de Katuns ou de demi-Katuns.
- Elles contiennent en particulier le nombre de jours écoulés depuis l'origine des temps, la date dans le C. R. mais le numéro du C. R. n'est jamais précisé. On reçoit donc deux informations distinctes qui doivent être concordantes (Compte long).
- Leyden Plate* 419
- Elle présente, sous la forme d'une Série Initiale, la plus ancienne date attestée de l'épigraphe maya.

Ce document a été authentifié par la figure dessinée sur sa face antérieure.

Origine des temps : le jour 4 Ahau 8 Cumhu 421

Le choix de ce jour est deux fois maladroit. Il doit être très ancien et de caractère religieux. Sans doute sommes-nous en présence d'une invocation au Soleil et au Maïs.

Difficultés de la Chronologie maya 422

L'usage du Compte long aura été rapidement abandonné au profit de l'information mutilée présentée dans le Compte court. Ce dernier, contemporain de la conquête espagnole, interdisait qu'on puisse établir une concordance entre la chronologie maya et notre calendrier.

ARITHMÉTIQUE MAYA 426

Pas de documents d'usage profane, aucune preuve d'une numération écrite sans irrégularité.

Les textes arithmétiques se réduisent au bon usage des Séries Initiales
Importance des travaux de J. E. Thompson.

Résolution de deux problèmes fondamentaux qui sont des exercices de conversion permettant de passer de la numération vigésimale à la numération du C. R..

Numération vigésimale Numération du C. R. 427
(unité le jour) C. R.

0 4 Ahau 8 Cumhu

n $\alpha X\beta Y$

n' $\alpha' X'\beta' Y'$

Substituer au jour origine une nouvelle origine qui élimine les défauts de l'ancienne et qui soit proche de son époque d'utilisation.

J. E. Thompson fait choix de :

9. 10. 10. 0. 0 13 Ahau 18 Kankin

qui se substituent à n et à $\alpha X\beta Y$ 427

1^{er} problème : n' est donné, $\alpha' X'\beta' Y'$ est inconnu.

2^e problème : $\alpha' X'\beta' Y'$ est donné, n' est inconnu à un nombre entier de C. R. près.

Il est exclu qu'on effectue des divisions, les remplacer par des soustractions portant sur des multiples de nombres soigneusement choisis.

Introduire 364 comme année de compte : ce nombre est très proche de l'année vague, il est multiple de 13 et même de 52 428

364×5 est le p.p.c.m. de 260 et de 364.

Ajouter 364×5 jours à $\alpha X \beta Y$, αX est inaltéré, βY diminue de 5 jours.

Ajouter 364×20 jours à $\alpha X \beta Y$, αX est inaltéré, βY diminue de 20 jours, donc en général d'un mois.

Tableau 33, inventé par les Mayas, permettant d'ajouter aisément 364 et ses premiers multiples à un jour αX de l'année religieuse, α est toujours inaltéré; X ne l'est que pour 364×5 et ses multiples. Le tableau introduit même 91, diviseur privilégié de 364 432

Problème I : former $n' - n$ (tableau 36).

Retrancher de ce nombre le plus grand multiple de 364×20 .

Retrancher du reste le plus grand multiple de 364 en utilisant le tableau 33.

Du nouveau reste retrancher le plus grand multiple de 91.

Le problème I est résolu à l'aide de trois soustractions qui sont trois divisions déguisées 436

Problème II (tableau 38).

Priorité continue d'être donnée à l'année religieuse.

On doit passer de 13 Ahau 18 Kankin à $\alpha'X'\beta'Y'$.

En deux étapes on passe de 13 Ahau à $\alpha'X'$ en modifiant correctement 18 Kankin. Ensuite on ne pourra plus ajouter que des multiples de 364×5 ; en particulier, vis-à-vis de l'année vague, 364×20 et ses multiples ont valeur privilégiée.

Solution moderne de ces deux problèmes 438

Priorité est donnée à l'année vague.

On introduit le jour O pour deux mois de l'année vague choisis simplement à partir des données, ce qui permet d'utiliser le tableau perfectionné concernant les year-bearers (voir les tableaux 37 et 39).

NOTE 4

Résolution en nombres entiers de l'équation $ax - by = c$ 445

Données : a , b , c entiers, premiers entre eux dans leur ensemble.

Inconnues : x et y obligatoirement entiers.

Condition de possibilité : a et b doivent être premiers en eux.

S'il en est ainsi il existe une infinité de solutions qui se déduisent toutes de l'une d'entre elles, souvent apparente dans les cas simples 446

$$1^{\text{er}} \text{ ex : } 20x - 13y = 1.$$

Sol. : $x = 2, y = 3$ puisque $20 \times 2 - 13 \times 3 = 1$
(utilisée par les Mayas).

$$2^{\text{e}} \text{ ex : } 73x - 52y = 1.$$

Sol. : $x = 5, y = 7$ puisque $73 \times 5 - 52 \times 7 = 1$
 $365 - 364 = 1$
(utilisée par les Mayas).

Méthode générale pour trouver une solution de l'équation proposée... 447

Résoudre l'équation auxiliaire : $ax - by = 1$ en présentant $\frac{a}{b}$ sous forme de fraction continue.

NOTE 5

La révolution synodique de Vénus dans le Codex de Dresde..... 449

Analyse de la page 24 du Codex de Dresde 449

20 nombres sont consignés ainsi que 2 Séries Initiales.

12 nombres sont en progression arithmétique.

1^{er} terme et raison : 2920.

4 nombres sont en progression arithmétique.

1^{er} terme et raison : 2920×13 .

4 nombres, multiples de 260, sont groupés mais sans lien apparent entre eux. $2920 = 8 \times 365 = 5 \times 584$ 450

584 est la durée moyenne entière de la révolution synodique de Vénus (V. R.).

Les 20 nombres figurant p. 24 sont tous multiples de 20, ils sont tous associés à Ahau 454

On constate que si le jour 0 apparaissait il serait associé à 1 Ahau.

Dans le passé le jour 1 Ahau a été sans doute associé au premier lever héliaque de Vénus consigné dans les tables

$2920 \times 13 = 65 \text{ V. R.}$ 455

C'est le grand cycle de Vénus $65 \text{ V. R.} = 2 \text{ C. R.}$ 455

La durée exacte de la révolution synodique de Vénus est 583, 920; il lui manque 8 jours pour 100 révolutions synodiques 456

On sait que la correction des Mayas équivaut à 24 jours pour 301 révolutions synodiques; elle a été choisie afin que le début de chaque grand cycle conserve le jour 1 Ahau 457

- La correction est établie à partir de 65 V. R. qui est le plus petit multiple de V. R. qui soit divisible par 260 457
- Circonstance favorable $585 = 1 \text{ V. R.} + 1$ est divisible par 65
- On diminuera le compte de jours de 65 V. R. d'un petit nombre de jours (k) en même temps qu'on diminuera d'un petit nombre d'entiers (p) le compte des V. R., ceci afin que le total soit divisible par $260 : (65 - p) \text{ V. R.} - k$, ce qui exige que $(p \text{ V. R.} + k)$ soit divisible par 260.
- Il est facile de voir que k doit être divisible par 4 et que dans les conditions de l'énoncé p doit être égal à k 458
- Corrections retenues par les Mayas :*
- | | | | |
|---------|---------|--------------|-----|
| $k = 4$ | $p = 4$ | 61 V. R. — 4 | |
| $k = 8$ | $p = 8$ | 57 V. R. — 8 | 459 |
- 4 corrections de la première forme sont associées à 1 correction de la seconde forme 460
- Autre difficulté :* les prêtres mayas savaient que le jour initial de la révolution synodique ne coïncidait pas avec le lever héliaque de Vénus il le précédait de quelques jours. On ajoutera donc 16 jours mais aussi le même nombre de grands cycles toujours afin de conserver 1 Ahau 460
- Analyse des nombres de la 4^e rangée* 461
- | | | | |
|--|-------------|----|--|
| Le premier doit être rectifié (J. E. Thompson) | | | |
| | 16 V. R. + | 16 | |
| | 57 V. R. — | 8 | |
| | 118 V. R. — | 12 | |
| | 317 V. R. — | 8 | |
- La succession des diverses corrections apparaît dans d'autres pages du Codex 462
- Sur la page 24 figurent aussi deux Séries Initiales :* 464
- | | | |
|------------|--------|----------|
| 9.9.9.16.0 | 1 Ahau | 18 Kayab |
| 9.9.16.0.0 | 4 Ahau | 8 Cumhu |
- Ce dernier nombre équivaut à 72 C. R.
- La différence entre les deux nombres précédents figure aussi sur cette page, elle montre que le premier nombre est très peu inférieur à 72 C. R., remarquable multiple commun à des nombres importants pour le calendrier.
- Un troisième jour du C. R. figure aussi p. 24.*
- 1 Ahau 18 Uo* 465
- Les corrections ont débuté le jour 1 Ahau 18 Kayab et 1 Ahau 18 Uo est sans doute contemporain de la rédaction du Codex de Dresde

<i>La méthode qui a permis d'atteindre une bonne approximation de la durée de la révolution synodique de Vénus est de même conception que celle qui a permis de résoudre les deux problèmes fondamentaux de l'arithmétique maya</i>	466
Deux circonstances favorables, fortuites et de même nature, ont considérablement simplifié les calculs : 365 est un multiple de 13 augmenté de 1; 584 est un multiple de 13 diminué de 1.	
Fin du chapitre	466

CHAPITRE VII

CHINE

<i>Généralités</i>	467
Beaucoup d'ouvrages occidentaux concernant la Chine sont démodés; les ouvrages d'auteurs chinois ne sont pas souvent traduits dans nos langues.	
Importance de l'ouvrage que J. Needham consacre à la science chinoise.	
Le jugement que J. Needham porte sur la plus ancienne numération chinoise nous paraît sujet à caution.	

CHINE I (oracle-bones)

Textes divinatoires gravés sur os ce qui leur a permis une longue survie. Ces textes contiennent des nombres épars, il ne s'agit pas de vrais textes mathématiques	468
Les nœuds des unités, dizaines, centaines, mille sont présentés avec quelques lacunes, la myriade figure rarement.	
Numération de type $I_{c'}$ à première vue	474
Un thème général apparaît pour l'écriture des centaines et des mille qui semblent écrits dans le type hybride, mais avec des ligatures.	
Exemples présentés par J. Needham	475
Ces exemples devraient être écrits verticalement.	
Suggestion : numération traduisant à l'origine la numération parlée, de type hybride complet, mais qui, dans l'écriture, a dégénéré en une numération de type $I_{c'}$, non seulement pour les unités et les dizaines, mais aussi pour les centaines et les mille, bien que leur écriture se souvienne du type hybride	478

Cette écriture dans laquelle l'ordre des signes n'est pas toujours rigoureux peut prêter à confusion.

Exemple : comparer l'écriture de 80 à celle de 18 482

NOTE 6

Discussion du jugement porté par J. Needham sur l'importance théorique de la numération des oracle-bones 484

Définition des place-value components.

J. Needham leur refuse la qualité de nombres : ils ne sont destinés qu'à conduire les neuf chiffres à leur place convenable sur la table à compter.

En réalité si la place-value component n'a pas valeur numérique cette numération est de type Ic' .

Si il a valeur numérique elle est de type Ic' et de type hybride partiel

En tous cas elle n'est pas écrite de position 485

J. Needham considère le système des oracle-bones comme le plus ancien système capable d'exprimer n'importe quel nombre, si grand soit-il, avec neuf chiffres, or les place-value components sont incorporés à l'écriture des nombres, on ne peut les passer sous silence.

La plus ancienne numération écrite de position c'est la babylonienne, excellent instrument de calcul malgré sa trop grande base (Textes mathématiques de Suse) 487

On ne peut comparer la numération des oracle-bones à la numération indienne de position 487

J. Needham signale, avec raison, le caractère primitif de la numération des grottes aux Indes. C'est la seule qu'on puisse comparer avec fruit à la numération des oracle-bones 489

Si le nombre grandit, on doit inventer de nouveaux place-value components : l'écriture du nombre se trouve donc encombrée de symboles dont le nombre grandira et les neuf signes pour les neuf premiers nombres entiers seront insuffisants pour caractériser l'écriture du nombre 490

CHINE II

C'est une numération en tous mots; ces mots d'une syllabe sont traduits dans l'écriture par des dessins simples, qui deviennent d'excellents symboles numériques 491

Numération de type hybride complet de base 10	493
Les chiffres sont : 1, 2, 3.....9, 10, 10 ² , 10 ³ , 10 ⁴ .	
Cette numération ne pouvait noter que les nombres inférieurs ou égaux à 10 ⁵ . Pour de tels nombres elle ne comporte aucune irrégularité donc aucune ambiguïté.	
Les textes trouvés par Aurel Stein dans le Turkestan chinois et qui remontent aux Han, montrent l'ancienneté de cette écriture. On peut même suivre l'évolution des caractères mais la conception intellectuelle de la numération reste immuable	493
La myriade étant un palier, comme chez les Grecs, le problème de l'écriture des grands nombres s'est posé	497
Anciennement trois systèmes différents ont été utilisés	498
Exemples de l'écriture de nombres supérieurs à 10 ⁵	500
Numération parlée pour : 10 ⁵ , 10 ⁶ , 10 ⁷ , 10 ⁸ .	
Noms composés à partir de wan (10 ⁴); par exemple 10 ⁸ se dit wan wan	502
Exemples contemporains de grands nombres destinés à l'usage courant	503
Étude systématique de tous les exemples étudiés :	506
10 ⁴ ≤ N < 10 ⁵ Type hybride normal	
10 ⁵ ≤ N < 10 ⁶ Une irrégularité simplificatrice wan n'est écrit qu'une fois	
10 ⁶ ≤ N < 10 ⁸ Généralisation de cette irrégularité	
10 ⁸ ≤ N	
Exemple présenté par A. Vissière : wan figure seul s'il s'agit d'un nombre exclusivement formé de chiffres significatifs; il marque la frontière entre tranches successives de 4 chiffres	508
Cas particulier où l'une des tranches est formée de zéros	511
Comparaison avec Grèce III	511
Influence moderne de la numération occidentale	512

CHINE III

NUMÉRATION A L'AIDE DES ROD-NUMERALS	513
Il s'agit de fiches en bambou ou en os, toutes de même dimension et ne présentant aucun signe distinctif.	
Article de A. Vissière : mémoire de Mei Wên Ting.	
Lorsque ces fiches étaient groupées elles pouvaient symboliser les 9 premiers nombres entiers	516

- A l'origine il s'agit d'une véritable numération figurée de position;
base 10.
- Age du vieillard de Kiang-hien 517
- Ultérieurement apparaît l'alternance des fiches qui sont debout ou
couchées 518
- Dans les textes anciens la myriade semble un palier mais cette numé-
ration s'est étendue facilement à des nombres quelconques.
- Présentation des 18 symboles permettant de figurer non seulement
les nœuds des unités mais les nœuds des dizaines 520
- Les 99 premiers nombres entiers sont écrits dans le type Ic' . Cette
numération n'est qu'artificiellement de base 100, dans la pratique
elle est de base 10.
- Planche 38 : Triangle de Pascal (1303).
- Apparition de l'échiquier qui facilitera les calculs* 521
- Cette numération figurée pouvait se passer du zéro.
Elle devra lui consacrer un symbole quand elle deviendra écrite de
position.
- Apparition des monogrammes 524
- Cette numération a survécu dans les travaux scientifiques jusqu'à la
fin du XIX^e siècle.
- TECHNIQUE DE LA MULTIPLICATION PRATiquÉE SUR L'ÉCHIQUIER CHINOIS 528
- La disposition matérielle de l'opération présente une remarquable
analogie avec la multiplicatrice de Leibniz 528
- Cette dernière déplaçait d'un bloc le multiplicande vers la gauche
quand le multiplicateur était formé d'un chiffre significatif suivi de
zéros.
- Cas particulier fondamental* 530
- Le multiplicande est quelconque, le multiplicateur n'a qu'un chiffre
Il s'agit d'une addition dans laquelle tous les nombres à additionner
sont égaux au multiplicande.
- Les Chinois commençaient l'opération par la gauche.
L'usage de l'échiquier, et pour d'autres civilisations de la table à
compter, permettait de modifier successivement les nombres cal-
culés alors que la transcription sur le papier matérialise la succes-
sion des chiffres écrits puis barrés, ce qui faisait perdre au produit
sa présentation linéaire (traduction infidèle) 531
- En Chine apparaît pour ce cas particulier une présentation très con-
densée qui préfigure celle du boulier, laquelle sera plus abstraite.

Cas général 534

 Pose de l'opération qui est effectuée sur une seule ligne placée entre le multiplicateur et le multiplicande. Ce dernier est déplacé autant de fois que le multiplicateur a de chiffres 536

 Exemples attestés de multiplications chinoises effectuées sur l'échiquier 536

 Technique opératoire de grande qualité ne surchargeant pas trop la mémoire puisque la base de la numération est assez petite pour que la table de multiplication soit sue par cœur 538

NOTE 7

Table d'addition pour les rod-numerals 540

Exemple d'une multiplication entièrement développée sur l'échiquier 542

Présentation de multiplications effectuées sur le boulier.

 Fin du chapitre 543

CHAPITRE VIII

INDE

INTRODUCTION 547

 Notre numération est-elle d'origine indienne? Il convient de se méfier des faux, on ne doit donc retenir que les inscriptions lapidaires

NUMÉRATION PARLÉE 550

 Travaux de F. Woepcke.

 Goût indien pour les grands nombres (Lalitavistara) 551

 Deux progressions géométriques célèbres de raisons 10^2 et 7 553

 Ressemblance troublante avec l'Arénaire d'Archimède 555

Chaque puissance de la base 10 reçoit un nom 556

 Énoncé d'un nombre de 18 de nos chiffres présenté par F. Woepcke dans quatre numérations parlées distinctes 557

 Il s'agit des numérations arabe, grecque, occidentale moderne (échelle longue), indienne.

 Importance de l'œuvre de Nicolas Chuquet pour les grands nombres en Occident 557

LES NOMBRES MOTS	559
<i>C'est une numération parlée de position</i>	559
Toute mention de la base et de ses puissances disparaît : le zéro reçoit un nom.	
Numération inventée pour incorporer, dans la poésie, des nombres jugés importants.	
Glossaire de ces mots liés à la mythologie, à l'astronomie, aux apparences des êtres vivants.....	560
Équivalents du zéro	561
Intéressantes irrégularités du système	562
Les nombres sont énoncés en commençant par les unités simples ce qui permet de les placer immédiatement sur la table à compter	564

NOTE 8

<i>Les grands nombres en numération parlée</i> (État actuel de la question)	566
Million est un mot d'origine italienne, en usage en France à partir du XIII ^e siècle	
<i>Terminologie de Nicolas Chuquet</i> (1484)	567
Échelle longue basée sur le million : $10^{6N} = (N)$ illion	569
Échelle courte basée sur mille : $10^{3n} = (n-1)$ illion	570
Elle emploie inconsidérément la terminologie de l'échelle longue.	
Répartition géographique actuelle des deux échelles	572
Leur coexistence étant devenue intolérable, la neuvième Conférence Générale des Poids et Mesures (1948) a conseillé l'emploi de l'échelle longue pour les pays européens	
	572
NUMÉRATION D'ÂRYABHATA (+ VI ^e siècle)	5.5
Numération destinée à être incorporée à la poésie.	
Elle est de type 10^n et utilise une partie du syllabaire indien : les chiffres sont des syllabes constituées par l'association d'une consonne ou d'une semi-voyelle avec une voyelle ou une diphtongue	
33 consonnes et semi-voyelles	
9 voyelles (brèves ou longues) et diphtongues	
Consonnes et semi-voyelles sont présentées dans un ordre strict; il en est de même des voyelles et des diphtongues.	

Signification numérique des 33 consonnes et semi-voyelles associées à la voyelle <i>a</i> 1, 2, 3..... 24, 25, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100.....	577
La vocalisation des syllabes permet de s'élever dans la suite des nombres : pour une consonne déterminée associée à une certaine voyelle, le fait de remplacer cette dernière par la suivante multiplie la valeur de la syllabe par 100, ce qui permet d'écrire tous les nombres entiers jusqu'à 10^{18}	580

EXEMPLES

1° Dix nombres écrits dans la numération d'Âryabhaṭa et provenant du Surya Siddhanta	584
Des irrégularités sont fréquentes : l'ordre d'apparition des syllabes peut être transgressé sans que la valeur du nombre soit altérée : cette numération n'est pas écrite de position	584
2° Suite de 24 nombres décroissants, le premier est 225	586
Grand intérêt théorique de ces nombres qui permettent de présenter une liste de valeurs proportionnelles aux sinus d'une suite d'arcs en progression arithmétique (voir la note 9).	
Cette numération, très lourde au départ, devient ensuite très élégante étant marquée tour à tour, par le caractère maléfique ou bénéfique du syllabaire indien	588
Comparaison avec une numération artificiellement conçue à partir de l'écriture brāhmī : numération de base 10, initialement de type I_c , devenant aisément écrite de position	589

NOTE 9

<i>Table de Sinus</i>	591
Expression de la valeur de π utilisée par Âryabhaṭa.	
Elle provient d'une circonférence de cercle de diamètre deux myriades. $\pi = 3,1416$, d'où l'expression du radian en minutes d'arc : 3 438, ce sera la mesure du rayon <i>R</i>	591
Choix de $3^\circ 45' = 225'$ comme arc initial <i>a</i> .	
Choix justifié par une construction géométrique	592
Utilisation d'une formule différentielle, inconnue pour l'excellente raison qu'elle n'est vraie que pour une seule valeur de l'arc initial, <i>R</i> étant donné	593
Pour $R = 3\,438$, <i>a</i> devrait être égal à $229'$	594

Âryabhaṭa était contraint de choisir pour a un diviseur de $30 \times 60 = 1\ 800$; il a retenu 225 qui peut être obtenu dyadiquement à partir de 1 800. Ce nombre, voisin de 229, convenait donc géométriquement et arithmétiquement	595
Les résultats présentés par Âryabhaṭa sont très bons	600
Dégradation rapide de la formule pour d'autres valeurs de a	601
J. Itard ne pense pas qu'on puisse créditer Âryabhaṭa de l'invention de la formule différentielle. Il pense qu'elle provient des Données d'Euclide	602
NUMÉRATIONS ÉCRITES	602
Toutes ces numérations sont de base 10.	
<i>Numération liée à l'écriture kharoṣṭri</i> : type $I_{A'}$	603
Inspiration araméenne; seule numération indienne s'écrivant de droite à gauche.	
Peu de chiffres connus; il existe des chiffres pour 4 et 20.	
<i>Numération liée à l'écriture brāhmī</i> : type $I_{A'}$	605
Documents rares, peu de chiffres connus.	
<i>Numération des grottes (Nānā Ghāt)</i> (— 2 ^o s.) : type $I_{C'}$	606
Les nœuds des centaines et des mille conservent mention des nœuds des unités; ultérieurement mille a dû jouer le rôle de base auxiliaire.	
<i>Numération des grottes (Nasik)</i> (+ 2 ^o s.) : type $I_{C'}$	608
Déchiffrement assuré par la mention simultanée des nombres et de leur écriture en toutes lettres.	
Elle ressemble beaucoup à la précédente numération.	
On peut la comparer à la numération des oracle-bones	610
Elle est à mi-chemin entre le type $I_{C'}$, et le type hybride	611
Si l'on présente les nombres attestés sur la table à compter, seules les dizaines ne peuvent être décomposées; il y aurait aussi des difficultés pour les trois premiers nœuds des centaines et des mille.	
<i>Numération en écriture tamoule</i>	614
Type hybride complet. Elle est toujours en usage.	
Évolution remarquable, peut-être ancienne, vers une numération de position, ce qui entraîne une présentation originale du nombre si l'un des nœuds vient à manquer.	

Numération en écriture singhalaise 615
 Toujours en usage.
 Idéalement située entre la numération des grottes et la numération tamoule.
 Le syllabaire complet (544 signes distincts) a été intégralement utilisé pour paginer les manuscrits.

Inscription de Gwalior (+ 876) 618
 Numération écrite de position.
 Texte fondamental bien que tardif, comportant seulement quatre nombres.
 Les chiffres 4 et 6 sont absents, le zéro opérateur figure deux fois, les chiffres destinés aux trois premiers nombres entiers ont perdu tout caractère figuratif 619
 Texte gravé sur un petit temple monolithique.
 Texte écrit en prose. La date, écrite en chiffres et en toutes lettres est exprimée en ère saṃvat, elle est facile à restituer en ère çaka, puis dans notre ère 620
 Les trois autres nombres de l'inscription sont aussi écrits en chiffres et en toutes lettres, ils sont relatifs à des donations faites au temple : pièce de terre dont les dimensions sont précisées, contribution journalière au temple de 50 guirlandes de fleurs.

NOTE 10

Division de la roupie 622
 La série de signes exprimant les fractions de la roupie est utilisée parfois pour paginer les préfaces.

Écriture de tous les nombres de 1 à 32 624
 Chiffres pour 1, 4, 16, 32.
 Numération de base 4 et de type I_A' , 32 est une irrégularité, mais il est diviseur de 64 qui n'a pas reçu symbole original.
 Comparer les chiffres, qui sont de caractère linéaire, avec les chiffres en usage, pour Chine III. 627

TÉMOIGNAGES EXTÉRIEURS A L'INDE 628

Texte de Sévère Sébekt (+ 662) 628
 L'auteur, qui était astronome en Syrie, mentionne les neuf chiffres de la numération indienne, aucune allusion au zéro.

<i>Texte de Chhüthan Hsi-Ta (+ 720)</i>	630
L'auteur écrit en chinois, mais il est d'origine indienne et porte un nom sinisé.	
Il signale que la numération indienne s'écrit avec 9 chiffres écrits cursivement d'un seul trait; il mentionne l'usage du zéro qui est un point.	
DOCUMENTS EXTÉRIEURS A L'INDE	632
Article de G. Coedès « A propos de l'origine des chiffres arabes. »	
Textes recueillis au Cambodge et à Sumatra et antérieurs de deux siècles à l'inscription de Gwalior.	
<i>Inscriptions du Cambodge</i>	633
Travaux de E. Aymonier.	
Les inscriptions concernent des donations à des temples, les nombres sont exprimés en numération vernaculaire, mais la date qui figure en tête des documents est exprimée en ère çaka dans une numération de position	636
La numération vernaculaire est de type <i>Io'</i> assez primitif, avec incidences de la base 20, le nombre 400 est un palier difficile à franchir ..	640
Cette écriture des nombres ressemble à la numération des grottes : tableau 66	643
La numération destinée à noter les dates est écrite de position dans un style parfait; les chiffres sont les chiffres de la numération vernaculaire sauf pour les trois premiers entiers dont l'expression a perdu tout caractère figuratif : tableau 67	643
Discussion des points de vue de G. Coedès et de J. Needham	644
<i>Inscriptions découvertes à Sumatra</i>	645
Elles sont en relation avec les foyers culturels bouddhiques existant à Sumatra.	
Déchiffrement de H. Kern, complété par G. Coedès	646
<i>Inscription de Kēdukan Bukit</i>	646
Découverte à Palembang 605 çaka.	
<i>Inscription de Talang Tuwo</i>	647
Découverte à Palembang 606 çaka.	
<i>Inscription de Karang Brahi.</i>	
Découverte dans la province de Jambi.	
Non datée; elle n'est qu'une partie de la quatrième inscription.	

Inscription de Kota Kapur.

Découverte dans l'île de Bangka 608 çaka.	
Étude des trois inscriptions datées	649
Le second texte est d'inspiration bouddhique.	
Le bouddhisme était implanté en Indonésie avant l'arrivée des pèlerins chinois qui sont justement venus l'y chercher	652
Les trois inscriptions mettent en évidence les débuts foudroyants du royaume de Çrivijaya, ce qui explique que les trois dates notées en numération de position 605, 606, 608 çaka soient si proches.	
Fin du chapitre	652

CHAPITRE IX

DU ZÉRO ET DE SES PRÉCURSEURS

DÉFINITION D'UN SIGNE σ	653
C'est un symbole qui ne possède aucune valeur numérique intrinsèque; mais qui, juxtaposé ou ligaturé avec un signe original s , multiplie automatiquement sa valeur par une puissance déterminée de la base.	
Il s'agit donc d'un opérateur.	
Chine I (oracle-bones)	655
On ne peut affirmer que les signes pour 100 et pour 1 000 soient des signes σ .	
Grèce II. — Hébreux	655
Un signe σ très net pour chacune de ces numérations.	
Âryabhaṭa	656
Plusieurs signes σ .	
Rome	656
Deux signes σ qui peuvent être associés à la présentation graphique d'un nombre quelconque.	
DÉFINITION DU ZÉRO OPÉRATEUR Σ	657
1° Symbole n'ayant aucune valeur numérique intrinsèque, mais qui acquiert la qualité d'opérateur dès qu'il est juxtaposé à un nombre entier N , écrit dans une numération de base quelconque.	

On doit supposer que N ne présente dans sa constitution aucune irrégularité.

2° Le signe Σ multiplie la valeur numérique de N par la base de la numération.

3° La position géométrique de Σ par rapport à N est strictement définie le nombre s'écrivant linéairement; cette position permettra la répétition de Σ .

Les deux signes σ de la numération latine sont de vraies ébauches du zéro opérateur 657

De la multiplication par 10 d'un nombre écrit dans la base 10 pour les trois types de numération 658

Cas de la numération latine : l'introduction des signes σ complique dangereusement la multiplication par 10 d'un nombre N 659

Nécessité d'envisager plusieurs paliers pour N .

SCOLIE DE NEOPHYTOS (+ XIV^e s.) 661

Apparition de signes σ présentant les deux premières propriétés d'un signe Σ 663

Invention remarquable, tardive et artificielle.

Comparaison avec les chiffres gobar 665

L'invention de ces chiffres doit être postérieure à l'adoption par les Arabes du système indien de position; ce n'était sans doute qu'une facilité d'écriture destinée à familiariser les utilisateurs avec cette numération nouvelle qui bouleversait leurs habitudes.

COMPARAISON DU ZÉRO OPÉRATEUR ET DU ZÉRO MÉDIAL 667

Le zéro opérateur se présente théoriquement plus simplement que le zéro médial; mais ce dernier peut facilement être signalé par un vide, ce qui serait dangereux pour le zéro opérateur.

LE ZÉRO DANS LES QUATRE NUMÉRATIONS ÉCRITES DE POSITION 668

Babylone 668

Apparition tardive du zéro médial.

Le zéro opérateur n'est signalé que par un léger agrandissement du chiffre pour 60.

L'utilisation de deux bases régulièrement alternées a favorisé l'introduction d'une nouvelle base et a facilité les opérations effectuées sur la table à compter. Le zéro opérateur n'a pas besoin d'être noté pour jouer son rôle.

Mayas 671

Le zéro médial apparaît rarement sur les stèles.

Le zéro terminal est très fréquent, mais l'irrégularité de la numération empêche qu'il soit opérateur.

<i>Autre aspect du zéro maya</i>	675
Les Américanistes pensent que, pour les Mayas zéro n'était pas un nombre, ce qui ne peut surprendre.	
Tables de nombres apparaissant dans le Codex de Dresde	677
Elles montrent que les Mayas utilisaient avec une grande maîtrise zéro médial et zéro terminal et que ce symbole avait pour eux la même importance graphique qu'un chiffre significatif	682
Les deux numérations babylonienne et maya ont eu vis-à-vis du zéro deux attitudes très différentes, aucune d'entre elles n'est entièrement satisfaisante	684
<i>Chine</i>	684
Né sur la table à compter, le zéro chinois, qui se présente sous la forme d'un petit cercle, ne s'incorpore pas facilement à l'écriture des nombres mais il était réduit à un usage statique puisque les opérations s'effectuaient sur l'échiquier et ultérieurement sur le boulier.	
<i>Inde</i>	686
A Gwalior, en Indonésie, le zéro opérateur et le zéro médial apparaissent sous leur forme parfaite.	
L'usage des nombres mots a dû familiariser les calculateurs avec l'un et l'autre zéro puisqu'ils étaient nommés, et l'introduction de nombres dans des textes écrits en prose a joué aussi un rôle important. En se libérant de la table à compter le nombre s'est écrit de gauche à droite en commençant par les unités simples.	687
C'est sur la table à compter que conscience a dû être prise du fait que le zéro terminal est opérateur	687
C'est aussi sur elle que la technique des opérations nobles est née mais cette technique aurait dû être révisée lorsque la table a disparu, ce qui aurait évité à l'Occident l'apparition d'opérations monstrueuses.	688
La grande invention des deux zéros, qui avait quelque chose de bouleversant pour l'esprit, a trouvé de beaux échos dans les textes littéraires	689

NOTE 11

<i>Technique de la multiplication pour les numérations de types III_A'₁, I_B, I_A ..</i>	691
<i>Écriture symbolique pour les numérations :</i>	
— de type III _A ' ₁ , (Babylone, Mayas)	691

— de type I _B (Sumer)	694
— de type I _A ⁿ , (Grèce I et Rome)	695
<i>Technique opératoire de la multiplication de deux nombres entiers supposés écrits symboliquement</i>	696
<i>n</i> base de la numération	
<i>k</i> base auxiliaire	
Babylone <i>n</i> = 60 <i>k</i> = 10	699
Mayas <i>n</i> = 20 <i>k</i> = 5	701
Rome <i>n</i> = 10 <i>k</i> = 5	703
Fin du chapitre	706

CHAPITRE X

RETOUR A LA CLASSIFICATION

ÉTAGE MATHÉMATIQUE.....	707
NOMBRE CONSIDÉRÉ COMME LA VALEUR NUMÉRIQUE D'UN POLYNÔME A UNE VARIABLE (ÉCARTER SUMER).	
Nombre = $\sum an^p$ <i>n</i> est la base	708
Étude des cinq cas possibles.	
<i>Graphe</i> (fig. 44) : Tous les cas possibles sont attestés	709
Discussion des cas attestés qui ne figurent pas sur le graphe : I _B et I _A ⁿ .	710
La classification est une classification naturelle	712
COMPARAISON ENTRE L'ÉCRITURE D'UN NŒUD ET CELLE D'UNE SYLLABE FORMÉE PAR LA JUXTAPOSITION D'UNE CONSONNE ET D'UNE VOYELLE ...	712
<i>Graphe</i> (fig. 45) : Tous les cas possibles ne sont pas attestés.	
Exemple d'apparition de la syllabe dans une écriture qui ne connaît pas l'alphabet (cunéiformes babyloniens)	713
Comparaison des deux graphes précédents	715
Écriture vieux perse	717
Analyse du cas litigieux en terme de numération.	
COMPARAISON DU NOMBRE ET DU MOT	720
Nombre : chaque puissance de la base <i>n</i> apparaît qu'une fois.	

Mot : l'association exclusive consonne voyelle mutile la langue.	
Les solutions sont prélevées dans les arrangements de N syllabes prises p à p avec ou sans répétition.	721
La comparaison entre nœuds et syllabes a été inspirée par la numération d'Âryabhaṭa et par celle des grottes	722
IMPORTANCE DE L'ORDRE D'APPARITION DES PUISSANCES DE LA BASE.	722
Les trois types de numération sont caractérisés par le fait que dans l'écriture d'un nombre les chiffres sont libres, partiellement libres ou enchaînés.	
Dans toutes les numérations de types I et II l'unité, la base et ses puissances forment un ensemble totalement ordonné, alors que cet ordre n'est pas indispensable	723
Cet ordre conditionne l'apparition des numérations écrites de position; il a donc existé avant d'être fonctionnel.	
Sans doute le dénombrement est-il à l'origine de cet ordre	723
ÉVENTAIL DES BASES ATTESTÉES	724
Toujours 10 ou un multiple de 10, avec incidences de bases auxiliaires, puissances de 10 ou diviseurs privilégiés de 10.	
Le choix de 10 est lié à un accident de notre nature.	
Comparaison avec les systèmes pondéraux	725
Pour eux la base 2 est une base naturelle.	
On n'a renoncé au système binaire que pour mettre le système pondéral en harmonie avec la base de la numération.	
Deux exemples célèbres : le système pondéral babylonien et le système pondéral métrique.	
ÉTAGE HISTORIQUE	726
Avec l'apparition du temps surgit pour une numération la possibilité d'évoluer et d'essaimer.	
Nous nous limitons volontairement à l'étude de l'évolution interne de chaque numération.	
Les évolutions attestées sont toujours faites dans le sens du progrès . . .	727
Cette hypothèse sera donc exclusivement retenue pour tous les cas examinés.	
28 combinaisons doivent être étudiées	728
L'une de ces combinaisons est une identité	728
Les 27 autres combinaisons se répartissent ainsi : évolution attestée, possible mais non attestée, impossible	729

Tableau récapitulatif	735
Nouveau tableau : présentation synthétique du précédent	736
Étude directe des 24 numérations figurant dans la classification, relative- ment à leurs possibilités évolutives	737
12 d'entre elles témoignent d'une évolution.	
12 autres n'ont pas évolué; elles se réduisent du reste à 11 puisque l'une d'entre elles est une numération écrite de position (Chine III)	738

NOTE 12

Numération de position et boulier	745
N valeur numérique de :	
$a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_px^{m-p} + \dots + a_m.$	
x base de la numération.	
a_px^{m-p} est défini par deux informations.	
En numération de position N s'écrit : $a_0a_1, \dots, a_p, \dots, a_m.$	
Supposer provisoirement que tous les a_p sont différents de zéro.	
x^{m-p} a disparu et sera remplacé par $(m-p)$ qui est son loga- rithme dans la base x et plus simplement le rang de a_p dans l'écriture du nombre	746
Présentation analytique de N	746
Abscisse : valeur numérique de $a_p.$	
Ordonnée : rang de $a_p.$	
Égrener les unités contenues dans a_p : apparition de la présen- tation de N sur le boulier	747
Identité de la numération de position et du boulier.	
Caractère universel du boulier pour une base donnée	748
Sur la présentation analytique apparaissent un nombre cardinal et un nombre ordinal	748
Si l'un des a_p est nul il faut introduire zéro médial ou zéro opé- rateur, ce dernier se présente moins aisément que le zéro médial et sur le nombre et sur le boulier	749
Importance de l'écriture linéaire du nombre : c'est une présentation ana- lytique limitée à la seule ordonnée	749
Généralisation relative à l'introduction des puissances négatives de la base	749
Le boulier et les numérations de type I_c et $I_{A''}$,	750

Le boulier peut être considéré comme le terme ultime de l'évolution d'une numération de type I _A , qui passe intermédiairement par le type hybride	750
ÉTAGE GÉOGRAPHIQUE	751
La classification fait état de onze pays appartenant à l'hémisphère boréal, leur latitude est inférieure à 45°	751
Neuf pays de longitude Est, inférieure à 120°	752
Deux pays de longitude Ouest comprise entre 85° et 100°.	
Tableau 73	754
BASSIN MÉDITERRANÉEN : 5 pays, 9 numérations	755
Types I et II exclusivement.	
ASIE : 4 pays, 12 numérations	756
Le type I _A est absent, II est bien attesté, III apparaît trois fois.	
Diffusion de la numération indienne par les Arabes et par les Persans.	759
La technique des opérations nobles est identique en Chine est en Perse.	759
L'organisation de la logistique en Europe a été longue et douloureuse.	760
AMÉRIQUE CENTRALE : 2 pays, 3 numérations	760
I _{A'} , pour les Aztèques; II _B et III _{A'} , pour les Mayas.	
Identité de conception des numérations écrites de position babylonienne et maya	761
CONDITIONS INTELLECTUELLES QUI ONT PERMIS LA NAISSANCE DES NUMÉRATIONS ÉCRITES DE POSITION	763
L'exemple des numérations babylonienne et maya montre que la situation géographique d'un pays n'est qu'un élément de la question.	
La nécessité de savoir écrire de grands nombres a dû être le levain qui a permis à la numération écrite d'achever son évolution; il s'agit d'une aventure spirituelle et pas seulement de satisfaire aux besoins du commerce ou à l'administration des États	763
Les numérations écrites de position ont dû naître dans les collèges de prêtres qui s'intéressaient à l'astronomie ou seulement à l'astrologie	766
La numération indienne de position est la seule qui ait réussi à défier le temps; sa diffusion a pris de nos jours un caractère universel	767
Fin du chapitre	768