

# Inhaltsverzeichnis.

## Arithmetische Untersuchungen.

	Seite
<b>Erster Abschnitt.</b> Von der Congruenz der Zahlen im Allgemeinen	1
Congruente Zahlen, Moduln, Reste und Nichtreste. Artikel 1—3. — Kleinste Reste. Artikel 4. — Elementare Sätze über die Congruenzen. Artikel 5—11. — Gewisse Anwendungen. Artikel 12.	
<b>Zweiter Abschnitt.</b> Von den Congruenzen ersten Grades . . . . .	6
Vorbereitende Sätze über Primzahlen, Factoren u. s. w. Artikel 13—25. — Auflösung der Congruenzen ersten Grades. Artikel 26—31. — Die Zahl zu finden, welche gegebenen Resten nach gegebenen Moduln congruent ist. Artikel 32—36. — Lineare Congruenzen mit mehreren Unbekannten. Artikel 37. — Verschiedene Sätze. Artikel 38—44.	
<b>Dritter Abschnitt.</b> Von den Potenzresten . . . . .	30
Die Reste der Glieder einer mit der Einheit anfangenden geometrischen Reihe bilden eine periodische Reihe. Artikel 45—48. — Es werden zunächst Moduln, welche Primzahlen sind, betrachtet. Artikel 49—81. — Ist der Modul gleich $p$ , so ist die Anzahl der Glieder in der Periode ein Teiler der Zahl $p - 1$ . Artikel 49. — Der Fermat'sche Satz. — Artikel 50 u. 51. — Über die Anzahl der Zahlen, denen Perioden entsprechen, in welchen die Anzahl der Glieder ein gegebener Teiler von $p - 1$ ist. Artikel 52—56. — Primitive Wurzeln, Grundzahlen, Indices. Artikel 57. — Algorithmus der Indices. Artikel 58 u. 59. — Über die Wurzeln der Congruenz $x^n \equiv A$ . Artikel 60—68. — Zusammenhang zwischen den Indices in verschiedenen Systemen. Artikel 69—71. — Besonderen Zwecken dienende Grundzahlen. Artikel 72. — Methode zur Bestimmung der primitiven Wurzeln. Artikel 73 u. 74. — Verschiedene Sätze über Perioden und primitive Wurzeln. Artikel 75—81. — Über Moduln, welche Potenzen von Primzahlen sind. Artikel 82—89. — Moduln, welche Potenzen von 2 sind. Artikel 90 u. 91. — Aus mehreren Primzahlen zusammengesetzte Moduln. Artikel 92 u. 93.	
<b>Vierter Abschnitt.</b> Von den Congruenzen zweiten Grades . . . . .	65
Quadratische Reste und Nichtreste. Artikel 94 u. 95. — Sooft der Modul eine Primzahl ist, ist die Anzahl der Reste, welche kleiner als derselbe sind, gleich der Anzahl der Nichtreste. Artikel 96 u. 97. — Die Antwort auf die Frage, ob eine zusammengesetzte Zahl Rest oder Nichtrest einer	

gegebenen Primzahl sei, hängt von der Natur der Factoren ab. Artikel 98 u. 99. — Über Moduln, welche zusammengesetzte Zahlen sind. Artikel 100—105. — Allgemeines Kriterium dafür, dass eine gegebene Zahl Rest oder Nichtrest einer gegebenen Primzahl ist. Artikel 106. — Untersuchungen über die Primzahlen, deren Reste oder Nichtreste gegebene Zahlen sind. Artikel 107—150. — Der Rest  $-1$ . Artikel 108—111. — Reste  $+2$  und  $-2$ . Artikel 112—116. — Reste  $+3$  und  $-3$ . Artikel 117—120. — Reste  $+5$  und  $-5$ . Artikel 121—123. — Über  $\pm 7$ . Artikel 124. — Vorbereitung auf die allgemeine Untersuchung. Artikel 125—129. — Durch Induction wird ein allgemeiner (fundamentaler) Satz begründet und daraus werden Schlüsse gezogen. Artikel 130—134. — Strenger Beweis des Fundamentalsatzes. Artikel 135—144. — Analoges Verfahren für den Beweis des Satzes im Artikel 114. Artikel 145. — Lösung des allgemeinen Problems. Artikel 146. — Über die linearen Formen, welche sämtliche Primzahlen enthalten, von denen eine beliebige gegebene Zahl Rest oder Nichtrest ist. Artikel 147—150. — Über die Arbeiten anderer bezüglich dieser Untersuchungen. Artikel 151. — Über die nichtreinen Congruenzen zweiten Grades. Artikel 152.

### **Fünfter Abschnitt.** Von den Formen und unbestimmten Gleichungen zweiten Grades . . . . . 111

Gegenstand der Untersuchung; Definition der Formen und Bezeichnung. Artikel 153. — Darstellung der Zahlen; die Determinante. Artikel 154. — Die Werte des Ausdrucks  $\sqrt{b^2 - ac}$  (mod.  $M$ ), zu welchen die Darstellung der Zahl  $M$  durch die Form  $(a, b, c)$  gehört. Artikel 155 u. 156. — Form, welche eine andere enthält oder unter einer anderen enthalten ist; Transformation, eigentliche und uneigentliche. Artikel 157. — Äquivalenz, eigentliche und uneigentliche. Artikel 158. — Entgegengesetzte Formen. Artikel 159. — Benachbarte Formen. Artikel 160. — Gemeinschaftliche Teiler der Coefficienten der Formen. Artikel 161. — Zusammenhang zwischen sämtlichen gleichartigen Transformationen einer gegebenen Form in eine gegebene Form. Artikel 162. — Ambige Formen. Artikel 163. — Satz betreffend den Fall, wo eine Form unter einer andern zugleich eigentlich und uneigentlich enthalten ist. Artikel 164 u. 165. — Allgemeines über die Darstellungen der Zahlen durch Formen und deren Zusammenhang mit den Transformationen. Artikel 166—170. — Über die Formen mit negativer Determinante. Artikel 171—182. — Specielle Anwendungen auf die Zerlegung der Zahlen in zwei Quadrate, in ein einfaches und ein doppeltes und in ein einfaches und ein dreifaches Quadrat. Artikel 182. — Von den Formen mit positiver nichtquadratischer Determinante. Artikel 183—205. — Von den Formen mit quadratischer Determinante. Artikel 206—212. — Formen, welche unter andern enthalten und trotzdem diesen nicht äquivalent sind. Artikel 213 u. 214. — Formen mit der Determinante 0. Artikel 215. — Allgemeine Auflösung aller unbestimmten Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten durch ganze Zahlen. Artikel 216—221. — Geschichtliche Bemerkungen. Artikel 222. — **Weitere Untersuchungen über die Formen.** Artikel 223—265. — Einteilung der Formen mit gegebener

Determinante in Klassen. Artikel 223—225. — Einteilung der Klassen in Ordnungen. Artikel 226 u. 227. — Teilung der Ordnungen in Geschlechter. Artikel 228—233. — Von der Composition der Formen. Artikel 234—244. — Composition der Ordnungen. Artikel 245. — Composition der Geschlechter. Artikel 246—248. — Composition der Klassen. Artikel 249—251. — Für eine gegebene Determinante sind in den einzelnen Geschlechtern derselben Ordnung gleichviele Klassen enthalten. Artikel 252. — Die Anzahlen der in den einzelnen Geschlechtern verschiedener Ordnungen enthaltenen Klassen werden verglichen. Artikel 253—256. — Über die Anzahl der ambigen Klassen. Artikel 257—260. — Sicher der Hälfte aller für eine gegebene Determinante möglichen Charactere können eigentlich primitive (bei negativer Determinante, positive) Geschlechter nicht entsprechen. Artikel 261. — Zweiter Beweis des Fundamentalsatzes und der übrigen auf die Reste  $-1$ ,  $+2$ ,  $-2$  sich beziehenden Sätze. Artikel 262. — Es wird diejenige Hälfte der Charactere, denen Geschlechter nicht entsprechen können, näher bestimmt. Artikel 263 u. 264. — Besondere Methode, Primzahlen in zwei Quadrate zu zerlegen. Artikel 265. — **Digression, enthaltend eine Untersuchung über ternäre Formen.** Artikel 266—285. — **Gewisse Anwendungen auf die Theorie der binären Formen.** Artikel 286—307. — Über die Ermittlung der Form, aus deren Duplikation eine gegebene binäre Form des Hauptgeschlechts entsteht. Artikel 286. — Allen Characteren mit Ausnahme derjenigen, welche in den Artikeln 263, 264 als unmöglich gefunden worden sind, entsprechen wirklich Geschlechter. Artikel 287. — Theorie der Zerlegung sowohl der Zahlen wie der binären Formen in drei Quadrate. Artikel 288—292. — Beweis der Fermat'schen Sätze, dass jede ganze Zahl in drei Trigonalzahlen oder in vier Quadrate zerlegt werden kann. Artikel 293. — Auflösung der Gleichung  $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ . Artikel 294 u. 295. — Über die Methode, nach welcher Legendre das Fundamentaltheorem behandelt hat. Artikel 296—298. — Darstellung der Null durch beliebige ternäre Formen. Artikel 299. — Allgemeine Lösung der unbestimmten Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten durch rationale Grössen. Artikel 300. — Über die mittlere Anzahl der Geschlechter. Artikel 301. — Über die mittlere Anzahl der Klassen. Artikel 302—304. — Eigentümlicher Algorithmus der eigentlich primitiven Klassen; reguläre und irreguläre Determinanten u. s. w. Artikel 305—307.

**Sechster Abschnitt.** Verschiedene Anwendungen der vorhergehenden

Untersuchungen . . . . . 364

Zerlegung der Brüche in einfachere. Artikel 309—311. — Verwandlung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche. Artikel 312—318. — Auflösung der Congruenz  $x^2 \equiv A$  durch die Methode der Ausschliessung. Artikel 319—322. — Lösung der unbestimmten Gleichung  $mx^2 + ny^2 = A$  nach der Ausschliessungsmethode. Artikel 323—326. — Andere Methode, die Congruenz  $x^2 \equiv A$  zu lösen für den Fall, in welchem  $A$  negativ ist. Artikel 327 u. 328. — Zwei Methoden, zusammengesetzte Zahlen von primen zu unterscheiden und ihre Factoren zu ermitteln. Artikel 329—334.

<b>Siebenter Abschnitt.</b> Über diejenigen Gleichungen, von denen die Teilung des Kreises abhängt . . . . .	397
Die Untersuchung wird auf den einfachen Fall zurückgeführt, in welchem die Anzahl der Teile, in welche der Kreis geteilt werden soll, eine Prim- zahl ist. Artikel 336. — Gleichungen für die trigonometrischen Functionen der Bogen, welche ein Teil oder Teile der ganzen Peripherie sind; Redu- ction der trigonometrischen Functionen auf die Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ . Artikel 337 u. 338. — Theorie der Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ (wo vorausgesetzt wird, dass $n$ eine Primzahl sei). Lässt man die Wurzel 1 weg, so sind die übrigen ( $\Omega$ ) enthalten in der Gleichung $X = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 = 0$ . Artikel 339 u. 340. — Die Func- tion $X$ lässt sich nicht in niedrigere Factoren zerlegen, in denen sämtliche Coefficienten rational sind. Artikel 341. — Das Ziel der folgenden Unter- suchungen wird angegeben. Artikel 342. — Sämtliche Wurzeln $\Omega$ werden in gewisse Klassen (Perioden) eingeteilt. Artikel 343. — Verschiedene Sätze über die Perioden der Wurzeln $\Omega$ . Artikel 344–351. — Auf die vor- stehenden Untersuchungen wird die Lösung der Gleichung $X = 0$ ge- gründet. Artikel 352–354. — Weitere Untersuchungen über die Perioden der Wurzeln. Die Aggregate, in denen die Anzahl der Glieder gerade ist, sind reelle Grössen. Artikel 355. — Über die Gleichung, durch welche die Verteilung der Wurzeln $\Omega$ in zwei Perioden bestimmt wird. Artikel 356. — Beweis eines im vierten Abschnitt erwähnten Satzes. Artikel 357. — Über die Gleichung für die Verteilung der Wurzeln $\Omega$ in drei Perioden. Artikel 358. — Zurückführung der Gleichungen, durch welche die Wurzeln $\Omega$ gefunden werden, auf reine Gleichungen. Artikel 359 u. 360. — Anwendung der vorstehenden Untersuchungen auf die trigonometrischen Functionen. Methode, die Winkel, welchen die einzelnen Wurzeln entsprechen, zu unterscheiden. Artikel 361. — Die Tangenten, Cotangenten, Sekanten und Cosekanten werden aus den Sinus und Cosinus ohne Division bestimmt. Artikel 362. — Methode, die Gleichungen für die trigonometrischen Functionen allmählig zu erniedrigen. Artikel 363 u. 364. — Die Teilungen des Kreises, welche man mittelst quadratischer Gleichungen oder durch geometrische Constructionen ausführen kann. Artikel 365 u. 366.	
<b>Zusätze</b> . . . . .	449
<b>Tafeln</b> . . . . .	451

### Abhandlungen.

<b>Neuer Beweis eines arithmetischen Satzes</b> . . . . .	457
<b>Summierung gewisser Reihen von besonderer Art</b> . . . . .	463
<b>Neue Beweise und Erweiterungen des Fundamentalsatzes in der Lehre von den quadratischen Resten</b> . . . . .	496
<b>Theorie der biquadratischen Reste. Erste Abhandlung</b> . . . . .	511
<b>Theorie der biquadratischen Reste. Zweite Abhandlung</b> . . . . .	534

**Einige Untersuchungen aus dem handschriftlichen  
Nachlasse von Gauss.**

	Seite
<b>Die Lehre von den Resten . . . . .</b>	589
I. Lösung der Congruenz $X^m - 1 \equiv 0$ . . . . .	589
II. Allgemeine Untersuchungen über die Congruenzen . . . . .	602
<b>Weitere Entwicklung der Untersuchungen über die reinen Gleichungen</b>	630
<b>Beweis einiger Sätze über die Perioden der Klassen der binären Formen zweiten Grades . . . . .</b>	653
<b>Über den Zusammenhang zwischen der Anzahl der Klassen, in welche die binären Formen zweiten Grades zerfallen, und ihrer Deter- minante . . . . .</b>	655
<b>Eingehendere Betrachtung gewisser auf die Kreisteilung bezüglicher Untersuchungen . . . . .</b>	678
<b>Bemerkungen . . . . .</b>	683

---