TABLE DES MATIÈRES

Pages

CHAPITRE I

1. ESPACES VECTORIELS 3

1er Exercice : L'ensemble des matrices colonnes à trois lignes constituent-elles un espace vectoriel ? 3

2ème Exercice : Dans R^2, un ensemble défini par deux lois données respectivement de composition interne et de composition externe est-il un espace vectoriel ? 6

3ème Exercice : L'ensemble E des nombres réels $x = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$ a-t-il une structure d'espace vectoriel ? En trouver diverses bases 8

4ème Exercice : Montrer que l'ensemble $\mathcal{G}$ des fonctions en escalier de $[a, b]$ vers R, et l'ensemble $\mathcal{H}$ des fonctions affines par morceaux de $[a, b]$ vers R constituent deux espaces vectoriels sur R 11

5ème Exercice : L'ensemble des fonctions définies sur $[a, b]$ et à valeurs dans R telles que $|f(x) - f(x')| \leqslant K_f|x - x'|$ $(K_f \geqslant 0)$ est-il un espace vectoriel sur R ? 16

6ème Exercice : L'ensemble des suites réelles dont les termes vérifient : $u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}$ constitue-t-il un espace vectoriel ? 18

7ème Exercice : L'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices carrées d'ordre 2 constitue-t-il un espace vectoriel par rapport aux lois, addition et multiplication par un scalaire ? 19

8ème Exercice : Montrer que les solutions de l'équation différen-

Pages

tielle $y'' + ay' + by = 0$ forment un espace vectoriel. En est-il de même des polynomes $P(t)$ vérifiant

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} P(t)\, t^i \, dt = 0 \quad (i \text{ entier donné}) ?$$ 21

9ème Exercice : Démontrer que l'homothétie définie dans un espace vectoriel est un automorphisme de cet espace vectoriel. En est-il de même pour la translation ? 23

2. SOUS-ESPACES VECTORIELS 29

1er Exercice : Trouver dans l'ensemble E des fonctions continues sur $[0,1]$ qui forment des sous-espaces vectoriels de E 29

2ème Exercice : a) Montrer que, dans l'espace vectoriel E_1 à une dimension des vecteurs $\vec{v}$, l'ensemble des multiples de $\vec{v}$ constitue un sous-espace vectoriel de E_1.
b) Dans l'espace vectoriel E_2 de base $\vec{u}, \vec{v}; \vec{D} = a\vec{u} + b\vec{v}$ forme-t-il un sous-espace vectoriel de E_2 ?
c) Dans l'espace vectoriel E_3 à 3 dimensions de base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, l'ensemble G des vecteurs $\vec{V}$ tels que $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, est-il un sous-espace vectoriel de E_3 ? 32

3ème Exercice : Dans l'ensemble $\mathfrak{Q}$ des matrices carrées d'ordre 4, l'ensemble $\mathfrak{P}$ des matrices carrées de la forme P est-il un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{Q}$? 33

4ème Exercice : 1) Un vecteur $\vec{Z} = (11, 10, -21)$ appartient-il au sous-espace vectoriel engendré par $\vec{X} = (3, 6, -5)$ et $\vec{Y} = (-1, 4, 3)$?
2) Déterminer a pour que $\vec{Z} = (a, 2, -3)$ appartienne au sous-espace vectoriel engendré par $\vec{X} = (1, 2, 3)$ et $\vec{Y} = (-1, 0, 2)$?
3) Montrer que les deux systèmes de R^3

$$\vec{u} = (1, 2, 1) \qquad \vec{v} = (1, 3, 2)$$
$$\vec{u}' = (4, 9, 5) \qquad \vec{v}' = (4, 11, 7)$$

engendrent le même sous-espace vectoriel 34

5ème Exercice : Dans l'espace vectoriel K^3 avec $K = Z/3$, quel est le nombre de vecteurs engendrés par le sous-espace vectoriel contenant $\vec{A} = (\dot{1}, \dot{2}, \dot{1})$ et $\vec{B} = (\dot{1}, \dot{1}, \dot{2})$? 37

6ème Exercice : Si E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E, montrer que $E_1 \cap E_2$ est un sous-espace vectoriel de E ; peut-on en dire de même de $E_1 \cup E_2$? Application 37

Pages

3. SOMME DE DEUX SOUS-ESPACES VECTORIELS .. 39

1[er] Exercice : Dans l'espace vectoriel pointé R^3 :
Quelle est la somme de deux droites distinctes $\vec{D}$ et $\vec{D'}$?
Quelle est la somme d'un plan (P) et d'une droite $\vec{D}$ sécante ?
Quelle est la somme de deux plans sécants (P) et (P') ? 39

2[ème] Exercice : Dans l'espace vectoriel R^3, soient deux sous-espaces vectoriels E_1 défini par $\vec{e}_1 = (1, -1, 2)$ $\vec{e}_2 = (1, 1, 2)$ $\vec{e}_3 = (3, -1, 6)$; E_2 défini par $\vec{e}_1' = (0, -2, 0)$ $\vec{e}_2' = (1, 0, 1)$. Déterminer les dimensions de E_1 et E_2, ainsi que la somme $E_1 + E_2$ 40

3[ème] Exercice : Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E, avec les deux lois de composition interne $\cap$ et $+$. Montrer que $\mathcal{E}$ a une structure de treillis 41

4[ème] Exercice : Dans l'espace vectoriel $\mathcal{V}$, trois sous-espaces vectoriels E, F, G tels que $E \cap F = E \cap G$; $E + F = E + G$; $F \subset G$. Montrer que $F = G$ 42

4. SOMME DIRECTE – SOUS-ESPACES SUPPLEMENTAIRES 43

1[er] Exercice : Quelle est la somme directe de deux droites distinctes, d'un plan et d'une droite, de 2 plans distincts ? 43

2[ème] Exercice : Recherche de sous-espaces supplémentaires à divers sous-espaces 44

3[ème] Exercice : Dans l'espace vectoriel $R^6 = E$ de base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_6)$, on considère le sous-espace vectoriel V_1 engendré par $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et V_2 engendré par $(\vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_6)$. Montrer que V_1 admet une infinité de sous-espaces supplémentaires .. 45

4[ème] Exercice : Montrer que deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un même sous-espace sont isomorphes 46

5[ème] Exercice : Démontrer que l'ensemble des combinaisons linéaires d'un système fini de vecteurs de l'espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E 47

CHAPITRE II

1. DEPENDANCE ET INDEPENDANCE LINEAIRES .. 51

1[er] Exercice : Dans l'espace vectoriel E sur le corps K à 3 dimensions et admettant trois vecteurs de base $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{U}_3$.

Pages

1) Démontrer que $\vec{W}_1 = \vec{U}_2 + \vec{U}_3$; $\vec{W}_2 = \vec{U}_3 + \vec{U}_1$; $\vec{W}_3 = \vec{U}_1 + \vec{U}_2$ sont linéairement indépendants.
2) Démontrer que $\vec{V}_1 = \vec{U}_1$ $\vec{V}_2 = a\vec{U}_1 + \vec{U}_2$, $\vec{V}_3 = b\vec{U}_1 + c\vec{U}_2 + \vec{U}_3$ sont linéairement indépendants $(\forall a)(\forall b)(\forall c) \in K$. 51

2ème **Exercice** : Dans l'espace vectoriel $\mathscr{C}$ sur $\boldsymbol{R}$ des trinômes, démontrer que les trinômes $(1, x, x^2)$ et $(x^2 + 1, 2x, x^2 - 1)$ sont linéairement indépendants 53

3ème **Exercice** : Examiner la dépendance ou l'indépendance linéaires des trois vecteurs

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{V}' = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{V}'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$$

et des trois vecteurs $\vec{A} = (1+i, i, 1+2i)$ $\vec{B} = (i, -1, 1-i)$ $\vec{C} = \left(1 - 3i, 1+i, \frac{3}{5} i\right) \in C^3$ 54

4ème **Exercice** : Dans l'espace vectoriel K^3 avec $K = Z/6Z$, le trivecteur $\vec{A} = (\dot{2}, -\dot{1}, \dot{0})$ $\vec{B} = (\dot{3}, \dot{4}, \dot{2})$ $\vec{C} = (\dot{0}, \dot{5}, \dot{1})$ est-il formé de vecteurs dépendants ou indépendants? En est-il de même pour $\vec{D} = (\dot{2}, -\dot{1}, \dot{0})$ $\vec{E} = (\dot{3}, \dot{4}, \dot{2})$ $\vec{F} = (\dot{0}, \dot{2}, \dot{4})$?.. 56

5ème **Exercice** : Dans l'espace vectoriel $\boldsymbol{R}^4$ les trois vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ -9 \\ -12 \end{pmatrix}$$

sont-ils linéairement dépendants. Déterminer m pour que les trois vecteurs $\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}'$

$$\vec{u}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{v}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{w}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ m \\ 13 \end{pmatrix}$$

soient linéairement dépendants 58

2. SYSTEME GENERATEUR – BASES 61

1er **Exercice** : I Les parties suivantes de l'espace vectoriel $\boldsymbol{R}^2$ sont-elles des parties génératrices de cet espace vectoriel :
a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$; b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

II Les parties suivantes de l'espace vectoriel R^3 sont-elles des parties génératrices de cet espace vectoriel ?

Pages

a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{z} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$; b) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 61

2ème **Exercice** : Dans l'espace vectoriel des trinômes du second degré :
a) montrer que $\{1, x, x(x-1)\}$ en est une base.
b) $\{2x^2 - 5,\ 7x,\ 3x^2 + 4\}$ en est-il une partie génératrice ? une base ?
$\{x(x-1),\ 2x^2 - 5,\ 3x^2 + 4\}$ en est-il une partie génératrice ? une base ?
$\{1,\ 7x,\ 3x^2 + 4\}$ en est-il une partie génératrice ? Une base ? 64

3ème **Exercice** : Soit E l'ensemble des formes linéaires

$$F(x, y, z) = ax + by + cz . \quad a, b, c \in R^3.$$

1) Montrer que E est un espace vectoriel sur R.

2) Montrer que le système de formes $\begin{cases} F_1 = x + 2y + 2z \\ G_1 = 2x + 3y + 2z \\ H_1 = 6x + 8y + 4z \end{cases}$

en est une partie génératrice. En est-il une base ? . . . .

3) Le système de formes $\begin{cases} F_2 = -x + 2y + 2z \\ G_2 = 2x + y + 2z \\ H_2 = 2x + 4y + 2z \end{cases}$ en est-il une

partie génératrice ? En est-il une base ? 67

3. **BASES D'UN ESPACE VECTORIEL – DIMENSION** . . 71

1er **Exercice** : Dans un espace vectoriel de dimension un constitué par une droite vectorielle $\vec{D}$, qui a pour vecteur unitaire $\vec{i}$,
1) Montrer que tout système libre constitué d'un élément de $\vec{D}$ est une base de $\vec{D}$.
2) Existe-il des bases de $\vec{D}$ ayant plus d'un élément .
3) Dimension de $\vec{D}$? 71

2ème **Exercice** : 1) Dans l'espace vectoriel R^2 les deux vecteurs
$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ constituent-ils une base ?
2) Tout couple de vecteurs linéairement indépendants constitue-t-il une base ?

Pages

$4^{ème}$ **Exercice** : Dans R^3 rapporté à la base $\mathcal{B}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ soit f l'application linéaire telle que

$$\begin{cases} \vec{e}'_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{e}'_2 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \\ \vec{e}'_3 = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3 \end{cases}$$

1) Quelle est l'image par f de la base $\mathcal{B}$?
2) L'application f est-elle bijective ?
3) Définir l'application réciproque f^{-1} 106

$5^{ème}$ **Exercice** : Dans R^2, on considère deux sous-espaces supplémentaires U_1 et U_2 constitués par deux droites sécantes :

$$\vec{V} \in R^2 \Longrightarrow \vec{V} = \vec{X} + \vec{Y} \quad \text{avec} \quad \vec{X} \in U_1,\ \vec{Y} \in U_2$$

On pose $\vec{X} = \text{proj}_1(\vec{V}) \quad \vec{Y} = \text{proj}_2(\vec{V})$.
1) Montrer que ces deux applications sont des applications linéaires
2) Généralisation à R^3 108

2. PROPRIETES DES APPLICATIONS LINEAIRES ... 111

1^{er} **Exercice** : Pour plusieurs applications linéaires données, trouver
1) l'image de l'espace vectoriel de départ
2) le noyau de chacune de ces applications linéaires 111

$2^{ème}$ **Exercice** : Dans R^2 rapporté à la base $\mathcal{B}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, soit f les applications linéaires, représentées par les matrices

$$A(a, b) = \begin{bmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{bmatrix}$$

1) A quelle condition f est-il un isomorphisme ?
2) Quel est le noyau de l'application φ de matrice $A(0,1)$?
3) Quelle est l'image de R^2 par l'application φ ? 113

$3^{ème}$ **Exercice** : Dans R^3 rapporté à la base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ soit A la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Soit T la transformation linéaire de matrice A.
1) Ecrire les formules de changement de coordonnées.
2) Quelle est l'image de R^3 par T ?
3) Trouver les points dont l'image par T est O 115

$4^{ème}$ **Exercice** : $\mathcal{M}_3$ étant l'espace vectoriel des matrices carrées

Pages

d'ordre 3 à coefficients réels, soit f l'application définie par $f : A \in \mathcal{M}_3 \longrightarrow f(A) = A + \widetilde{A}$.
1) Montrer que f est une application linéaire de $\mathcal{M}_3$ dans $\mathcal{M}_3$.
2) Déterminer le noyau $\mathcal{N}$ de f.
3) Quelle est l'image de $\mathcal{M}_3$ par f ? 117

5ème **Exercice** : Problème général sur les propriétes des applications linéaires 119

6ème **Exercice** : (I) Montrer que l'ensemble des applications linéaires de E dans F a une structure d'espace vectoriel sur K.
(II) Démontrer que la composée de deux applications linéaires $g \circ f$ est une application linéaire.
(III) Démontrer que l'ensemble des endomorphismes de l'espace vectoriel E a une structure d'anneau unitaire par rapport aux 2 lois + et $\circ$ 123

3. FORMES LINEAIRES 129

1er **Exercice** : E un espace vectoriel de dimension n sur le corps K de base $\mathcal{B}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \ldots \vec{e}_n)$.
1) Démontrer que E^* ensemble des formes linéaires est aussi un espace vectoriel sur K. Que peut-on en déduire ?
2) Montrer que les f_i $1 \leqslant i \leqslant n$ avec $f_i(\vec{e}_i) = 1$; $f_i(\vec{e}_j) = 0$ $i \neq j$ constituent une base de E^*.
3) Dimension de E^*.......... 130

2ème **Exercice** : (I) Définir l'ensemble L des applications linéaires f de $\boldsymbol{R}$ dans $\boldsymbol{R}$. Espace dual ? Base de E^* ? Composantes de f dans cette base ? Trouver une base de $\mathcal{B}^{**}$. Donner les composantes dans $\mathcal{B}^{**}$ d'une application linéaire de E^* dans $\boldsymbol{R}$.
(II) Soit la forme linéaire $f(\vec{x}) = 2x - y + z$ dans $\boldsymbol{R}^3$ trouver son expression dans la base duale de $\boldsymbol{R}^3$.......... 132

3ème **Exercice** : Dans $\boldsymbol{R}^2$ soit f^* la forme linéaire telle que $\mathcal{B}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ étant une base de $\boldsymbol{R}^2$ $f^*(\vec{e}_1) = a_1$ $f^*(\vec{e}_2) = a_2$ $(\forall \vec{X}) \in \boldsymbol{R}^2$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad f^*(\vec{X}) = a_1 x + a_2 y.$$

1) Noyau de f^*.
2) Equation d'un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\boldsymbol{R}^2$.
3) Noyaux de deux formes linéaires distinctes f^* et f'^* représentant la même droite vectorielle.
4) Généralisation à $\boldsymbol{R}^3$.
5) Généralisation à $\boldsymbol{R}^n$.......... 134

Pages

1) Montrer que $(A\vec{V}_1) \cdot \vec{V}_2 = (\widetilde{A}\vec{V}_2) \cdot \vec{V}_1$.
2) Trouver les matrices A telles que $A \cdot \widetilde{A} = \widetilde{A} \cdot A$. Montrer que $A\vec{V}$ et $\widetilde{A} . \vec{V}$ ont même norme.
3) Montrer que $\|\vec{V}\| = \|\vec{V}'\|$ entraîne l'orthogonalité de $\vec{V}+\vec{V}'$ et $\vec{V} - \vec{V}'$ 203

6$^{\text{ème}}$ **Exercice** : Equations réduites d'une conique et d'une quadrique 206

BIBLIOGRAPHIE 212