

# TABLE DES MATIÈRES

MATRICES	Pages	
I	– Matrices – Dimensions – Sous-matrices – Matrice transposée . . . . .	1
II	– Vecteurs-colonnes et vecteurs-lignes d’une matrice . . . . .	3
III	– Représentation d’une application linéaire par une matrice : changement de coordonnées . . . . .	8
IV	– Représentation d’une application linéaire par une matrice . . . . .	12
V	– Exemples de matrices représentatives d’applications linéaires simples . . . . .	14
VI	– Bijection de l’ensemble des applications linéaires sur l’ensemble des matrices . . . . .	18
VII	– Transformations linéaires dont on connaît la matrice associée . . . . .	20
VIII	– Opération sur les matrices-sommes . . . . .	21
IX	– Somme de deux ou plusieurs matrices . . . . .	23
X	– Produit d’une matrice par un scalaire . . . . .	25
XI	– Produit d’une matrice par un scalaire – Espace vectoriel . . . . .	26
XII	– Produit de deux transformations linéaires . . . . .	29
XIII	– Produit de deux matrices . . . . .	30
XIV	– Représentation par une matrice du produit de 2 transformations géométriques . . . . .	32
XV	– Produit de trois matrices (angles d’Euler) . . . . .	35
XVI	– Transformé d’un vecteur par une composition d’applications linéaires . . . . .	39
XVII	– Matrices transposées . . . . .	41
XVIII	– Matrice diagonale . . . . .	44
XIX	– Matrices symétriques et antisymétriques . . . . .	47
XX	– Matrices antisymétriques . . . . .	49
XXI	– Matrices adjointes . . . . .	52
XXII	– Calcul des matrices inverses à l’aide des matrices adjointes . . . . .	54

	Pages
XXIII – Matrice inverse – Transformations réciproques – Transformation involutive . . . . .	58
XXIV – Matrice inverse d'une transformation . . . . .	60
XXV – Corps des matrices M. Isomorphisme . . . . .	64
XXVI – Changements de base. Composantes contrevariantes et covariantes . . . . .	70
XXVII – Matrices régulières . . . . .	73
XXVIII – Propriétés des matrices régulières carrées . . . . .	76
XXIX – Exercice sur les matrices régulières . . . . .	79
XXX – Changements de base réitéré . . . . .	82
XXXI – Déterminants et changements de base . . . . .	86
XXXII – Matrices équivalentes. Interprétation géométrique : générale . . . . .	89
XXXIII – Matrices régulières et équivalentes . . . . .	93
XXXIV – Matrices semblables – Interprétation géométrique dans $R^2$ . . . . .	94
XXXV – Exemple géométrique de matrices semblables . . . . .	96
XXXVI – Matrices semblables – Interprétation géométrique des changements de base . . . . .	97
XXXVII – Propriétés et opérations sur les matrices semblables . . . . .	98

## DETERMINANTS

I – Calcul d'un déterminant du 3 <sup>ème</sup> ordre . . . . .	103
II – Propriétés des déterminants . . . . .	105
III – Calcul des déterminants par la combinaison linéaire de lignes ou de colonnes . . . . .	108
III bis – Calcul de 2 déterminants . . . . .	112
IV – Décomposition d'un déterminant en somme de plusieurs déterminants . . . . .	114
V – Contre-exemple . . . . .	116
VI – Produit de deux déterminants . . . . .	117
VII – Dérivée d'un déterminant . . . . .	118
VIII – Déterminants particuliers . . . . .	119
A – Déterminant adjoint . . . . .	119
B – Déterminant de Van der Monde . . . . .	121
C – Déterminant cyclique . . . . .	123

	Pages
D – Déterminant antisymétrique .....	123
E – Déterminant diagonal .....	124
 DEPENDANCE & INDEPENDANCE LINEAIRES	
I – Dépendance ou indépendance linéaires de 3 vecteurs appartenant à $R^3$ ou à $C^3$ .....	125
II – Dépendance de 3 vecteurs de $R^5$ .....	126
III – Trois vecteurs de $K^3$ avec $K = Z/6Z$ constituent-ils une base de $K^3$ ? .....	127
IV – Dépendance et indépendance linéaires associées à la recherche de bases .....	128
V – Formes linéaires .....	130
VI – Endomorphisme régulier .....	132
 SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES	
I – Résolution d'un système de 2 équations paramétriques du 1 <sup>er</sup> degré à 2 inconnues .....	135
II – Résolution d'un système de 3 équations du 1 <sup>er</sup> degré à 3 inconnues .....	136
III – Résolution d'un système de 3 équations du 1 <sup>er</sup> degré à un paramètre et à 3 inconnues .....	137
IV – Résolution d'un système de 3 équations à 3 inconnues paramétrique .....	138
 RANG D'UNE MATRICE	
I – Rang d'une matrice carrée de dimensions (3,3) .....	141
II – Rang d'une matrice rectangulaire de dimensions (5,4) .....	142
 VALEURS PROPRES D'UNE MATRICE	
I – Directions propres d'une matrice – Interprétation géométrique dans $R^2$ .....	143
II – Application – Calcul de directions propres .....	146
III – Valeurs propres et vecteurs propres – Interprétation géométrique dans $R^2$ .....	147
IV – Calcul de valeurs propres et de vecteurs propres distincts ..	150
V – Matrices de Pauli .....	154
VI – Interprétation géométrique. Calcul de l'équation réduite d'une conique .....	158

	Pages
VII – Calcul de valeurs propres et de vecteurs propres pour des matrices carrées d'ordre 3 : valeurs propres distinctes . . . . .	162
VIII – Calcul de valeurs propres et de vecteurs propres pour des matrices carrées d'ordre 3 : valeurs propres multiples . . . . .	167
IX – Interprétation géométrique : équation réduite d'un quadrique . . . . .	170
X – Propriétés du polynôme caractéristique d'une matrice . . . . .	174
 DIAGONALISATION & TRIANGULATION	
I – Cas des matrices d'ordre 2 – Matrices réductibles à la forme diagonale . . . . .	177
II – Matrices non réductibles à la forme diagonale . . . . .	180
III – Cas des matrices d'ordre 3. Matrices réductibles à la forme diagonale : (valeurs caractéristiques simples) . . . . .	181
IV – Matrices réductibles à la forme diagonale (valeurs caractéristiques multiples) . . . . .	185
V – Matrices non réductibles à la forme diagonale : Triangulation . . . . .	187
VI – Autre procédé de triangulation . . . . .	196
VII – Applications de la diagonalisation . . . . .	200
$\alpha$ ) Puissance $n^{\text{ièmes}}$ d'une matrice diagonalisable . . . . .	200
$\beta$ ) Etude de suites récurrentes . . . . .	204
$\gamma$ ) Intégration d'un système différentiel linéaire du premier ordre à coefficients constants sans second membre . . . . .	207
$\delta$ ) Résolutions d'équations matricielles . . . . .	209
VIII – Théorème de Cayley-Hamilton . . . . .	210
 QUELQUES MATRICES PARTICULIERES	
I – Matrices orthogonales . . . . .	212
1 <sup>er</sup> exercice – Changement de bases orthonormées . . . . .	212
2 <sup>ème</sup> exercice – Valeurs propres d'une matrice orthogonale . . . . .	215
II – Matrices symétriques réelles . . . . .	217
1 <sup>er</sup> exercice – Propriétés des matrices symétriques réelles . . . . .	217
III – Matrices hermitiennes . . . . .	221
BIBLIOGRAPHIE . . . . .	223