

TABLE DES MATIÈRES

	Pages
Chapitre I : Ensembles. Cours résumé	1
(I.1) <i>Exercices corrigés sur les ensembles</i>	4
1) Propriétés de la complémentarité	4
2) Propriétés de l'inclusion. Produit cartésien	8
3) Propriétés de la différence symétrique	10
 Chapitre II : Relations binaires. Cours résumé	 13
(II.1) <i>Exercices corrigés sur les relations binaires</i>	17
1) Eléments des produits cartésiens $E \times F$, $E \times G$, $F \times G$. E , F , G ayant 3 éléments	17
2) Relations binaires définies par des graphes. Composition de ces relations binaires. Relation binaire réciproque	21
3) Représentation du graphe d'une relation. Relation binaire complémentaire. Relation réciproque	24
4) Propriétés de réflexivité. Symétrie. Transitivité de certaines relations binaires	25
5) Propriétés des graphes de relations binaires. R et S définies dans l'ensemble des relations binaires d'un ensemble E	27
(II.2) <i>Exercices corrigés sur les relations d'équivalence</i>	27
1) Démontrer que la relation $R[(a, b), (c, d)]$ définie dans N^{*2} et telle que $ad = cb$ est une relation d'équivalence	27

	Pages
2) Dans Z la relation $R(x, y) \iff (\exists m \in Z x - y = 7m)$ est-elle une relation d'équivalence ? Classes d'équivalence. Ensemble quotient	28
3) Relations d'équivalence définies dans R^2 . Etude de diverses relations. Classes d'équivalence	30
4) Lois de compositions internes dans l'ensemble quotient Z/R avec $R(a, b) \iff a - b = 7k \quad k \in Z$	34
5) Relation d'équivalence définie entre polynômes $R[P(x), Q(x)] \iff P(x) - Q(x) = (x^2 + 1) A(x)$. - Classes d'équivalences	40
6) Montrer que l'équipotence entre deux ensembles est une relation d'équivalence	41
7) Montrer qu'une relation réflexive et circulaire est une relation d'équivalence	42
8) Dans un ensemble E 2 relations d'équivalence \mathcal{R} et \mathcal{S} d'ensembles R et S . montrer que $R \cap S$ est une relation d'équivalence	43
(II.3) <i>Exercices corrigés sur les relations d'ordre</i>	44
1) Dans $N^* = N - \{0\}$ la relation "a divise b" est-elle une relation d'ordre ? d'ordre total ou partiel ?	44
2) Dans le plan affine, soient deux points m et m' tels que $R(m, m') \iff \begin{cases} x \leq x' \\ y \leq y' \end{cases} \quad m(x, y)$ est-elle une relation d'ordre total ou partiel ?	45
3) La relation \leq entre cardinaux est-elle une relation d'ordre ?	47
4) Finesse de relations d'équivalences dans E	48
5) Borne supérieure et borne inférieure. Treillis. Treillis distributif	48
Chapitre III : Fonctions et applications. Cours résumé	51
Correspondances. Graphes de correspondances. Correspondances réciproques, produit de correspondances. Fonctions. Applications. Injection. Surjection. Bijection	51 à 55

	Pages
(III.1) <i>Exercices corrigés sur les fonctions et applications</i> . . .	56
1) Etude d'une correspondance, correspondance réciproque. Différence entre fonction et application. Graphes	56
2) Etude des permutations de l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$. permutations réciproques. Composition de permutations . .	58
3) Composition de deux injections, de deux surjections, propriétés du composé de deux bijections	61
4) Montrer que $h \circ f = h \circ g \implies f = g$ si f et g sont deux applications quelconques de E dans F , h étant une injection de F dans G . De même $f \circ h = g \circ h \implies f = g$ si h est une surjection de F dans G	62
5) Produit d'applications $f \circ g$ et $g \circ f$; exemple algébrique ..	64
6) Transformation géométrique étudiée au point de vue injectif et surjectif. Transformation réciproque	67
7) f une fonction définie dans E et prenant ces valeurs dans F $A \subset E$, $B \subset E$ $f(A)$ ensemble des images $f(x)$ pour $x \in A$. $f(A \cup B) \stackrel{?}{=} f(A) \cup f(B)$. Comparer $f(C_E A)$ et $C_E f(A)$ suivant f	68
 Chapitre IV : Lois de composition. Cours résumé	 71
– <i>Lois de composition interne</i> . Commutativité. Associativité. Eléments neutres. Eléments symétriques. Réguliers. Distributivité. <i>Lois de composition externe</i> . Relations entre une loi interne et une loi externe	71 à 73
 (IV.1) <i>Exercices corrigés sur les lois de composition interne</i> .	75
1) Etude d'une loi non associative et non commutative définie dans $Q^* = Q - \{0\}$ $a * b = a + \frac{1}{b}$	75
2) Etude de la loi exponentiation définie dans $N \times N^*$	77
$a * b = a^b$	
3) Propriétés du neutre et du symétrique d'un élément. Régularité	79

	Pages
4) Propriétés de la loi externe $f[\alpha ; (a, b)] \in Z \times E$ avec $f[\alpha ; (a, b)] = \alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b) \in E \dots\dots\dots$	81
5) Ensemble E dans lequel on définit 2 lois de composition internes \circ et $*$ ayant pour neutres respectifs e et f ; telles que $(x * y) \circ (u * v) = (x \circ u) * (y \circ v) \dots\dots\dots$	82
6) Ensemble des bijections d'un ensemble $E = \{a, b, c\}$. Composition, table de Pythagore. Structure de l'ensemble des bijections $\dots\dots\dots$	83
7) Transformations ponctuelles et matrices associées. Composition. Transformation réciproque $\dots\dots\dots$	87
8) Structure de l'ensemble $E = \{x_K \ 0 \leq K \leq 3\}$ tel que $x_K = \pi + \frac{2K\pi}{4} \dots\dots\dots$	91
 Chapitre V : Structures. Groupes. Sous-groupes. Anneaux. Corps. Espaces vectoriels. Cours résumé $\dots\dots\dots$	
(V.1) <i>Exercices corrigés sur les groupes $\dots\dots\dots$</i>	99
1) Montrer que $a * b = a \times b \times k$, $k \in E$ donne à E une structure de groupe abélien $\dots\dots\dots$	99
2) Dans le groupe $(G, *)$ non commutatif résoudre $x * a * b = c * b$ $a * x * b = b * c \dots\dots\dots$	101
3) Groupe des isométries conservant globalement un rectangle .	102
4) Groupe multiplicatif des matrices carrées d'ordre 2. Stabilité d'un sous-ensemble pour l'opération $\times \dots\dots\dots$	106
5) Construction des nombres relatifs par des classes d'équivalence $\dots\dots\dots$	112
(V.2) <i>Exercices corrigés sur les sous-groupes $\dots\dots\dots$</i>	119
1) Démontrer qu'une partie non vide d'un groupe est un sous-groupe sous certaines conditions $\dots\dots\dots$	119

	Pages
2) Etablir que $H \cap H'$ est un sous-groupe de G si H et H' sont des sous-groupes de G	121
3) Sous-groupe défini par une loi de composition interne dans un groupe	121
4) Etablir que H étant un sous-groupe de G la relation binaire R définie par	
$R(x, y) \iff x * y^{-1} \in H$	
est une relation d'équivalence dans G	122
(V.3) Exercices corrigés sur les anneaux	124
1) Dans l'ensemble $\mathcal{G} = \{z ; z = (a, b); a \in R, b \in R\}$, muni de 2 lois de composition interne	
$+ (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$	
$\cdot (a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad + bc).$	
Montrer que $\{\mathcal{G}, +, \cdot\}$ a une structure d'anneau. Diviseurs de zéro	124
2) Soit A un anneau non commutatif, on définit la loi *	
$x * y = xy - yx.$	
Montrer l'anticommutativité et la distributivité de $*$ par rapport à $+$	127
3) Un ensemble E muni de deux lois est-il un anneau	
$x * y = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$	
$x \perp y = (x_1 y_1 + x_2 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \dots \dots \dots$	129
4) Dans l'ensemble $Z \times Z$, les 2 lois	
$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$	
$(x, y) \times (x', y') = (xx', 0)$	
donnent à Z^2 une structure d'anneau commutatif	133
5) Montrer que l'ensemble A des nombres réels	
$x = \alpha + \beta\sqrt{5} \quad (\alpha, \beta) \in Z^2$	
forme un anneau d'intégrité, les deux lois étant l'addition et la multiplication dans R	135

- 6) Montrer que l'ensemble F des matrices de la forme
- $$A = aI + b\alpha \quad \text{avec} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$
- a une structure d'anneau unitaire par rapport à l'addition et la multiplication des matrices 138
- 7) Anneau des fonctions numériques définies sur $[0, 2]$. Cet anneau peut-il admettre des diviseurs de zéro ? Exemple indiquant deux diviseurs de zéro 142
- 8) Anneau de Boole tel que $\forall x \in A \quad x^2 = x$. Diverses propriétés d'un anneau de Boole 146
- 9) Soient les ensembles quotients
- $$K = \frac{\mathbb{Z}}{5} = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}\} \text{ entiers modulo } 5$$
- $$A = \frac{\mathbb{Z}}{6} = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}, \dot{5}\} \text{ entiers modulo } 6$$
- Montrer que $K = \mathbb{Z}/5$ est un corps par rapport à 2 lois $\dot{+}$ et $\dot{\times}$ définies dans les entiers modulo k , alors que $A = \mathbb{Z}/6$ est un anneau admettant des diviseurs de zéro.
- 1/ Etude de $y = f(x) = x^5 - x \in K$.
- 2/ Etude de $y = g(x) = x^3 - x \in A$ 149
- 10) Divers exemples d'anneau euclidien.
- a) $z \in \mathbb{Z} - \{0\} \longrightarrow f(z) = |z| \in \mathbb{N}$. anneau euclidien
- b) $A(x) \in \mathfrak{R}(x) \longrightarrow d \circ A(x) = f(a) \in \mathbb{N}$.
anneau euclidien. 154
- 11) Exemple d'une structure de module sur un anneau 157
- (V.4) Exercices corrigés sur les idéaux 159
- 1) • Montrer que l'ensemble des multiples de $p \quad p \in \mathbb{N}$ noté $I = p\mathbb{Z}$ est un idéal de \mathbb{Z} .
- L'ensemble $K = \{xa + yb/x \in \mathbb{Z} \quad y \in \mathbb{Z}\} \quad a \in \mathbb{Z} \quad b \in \mathbb{Z}$ est un idéal de \mathbb{Z} 159
- 2) Dans un anneau A , α un diviseur de zéro, l'ensemble
- $$E = \{x \in A/\alpha x = 0\}$$
- est un idéal de A 160
- 3) Propriétés des éléments inversibles d'un anneau commutatif et unitaire 161

	Pages
(V.6) <i>Exercices corrigés sur les espaces vectoriels</i>	162
1) E_1 et E_2 deux espaces vectoriels sur le corps K , montrer que $F = E_1 \times E_2$ muni de certaines lois est un espace vectoriel sur le corps K	162
2) Un espace vectoriel de base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ est isomorphe à R^n pour les opérations addition et multiplication par un scalaire	164
3) Montrer que dans K^3 avec $K = Z/5$ le trivecteur $\vec{A}(\dot{1}, \dot{2}, \dot{3}) \quad \vec{B}(\dot{3}, \dot{1}, \dot{0}) \quad \vec{C}(\dot{2}, \dot{0}, \dot{1})$ forme une base de K^3	165
4) E et F deux espaces vectoriels sur le corps K . L'ensemble des applications linéaires $\mathcal{L}(E, F)$ de E dans F est un espace vectoriel sur K	165
5) Montrer que — l'ensemble des polynômes de degré au plus égal à n — l'ensemble des fonctions dérivables sont des sous-ensembles qui sont des sous-espaces vectoriels de E	169
6) Expression d'un vecteur \vec{x} d'une certaine base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ dans la base canonique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$	170
7) Un vecteur donné \vec{w} appartient-il à un sous-espace vectoriel donné ? Déterminer 2 paramètres (α, β) de façon qu'un vecteur $\vec{X}(\alpha, \beta, -13, 14)$ appartienne à un sous-espace vectoriel.	171
8) Sous-espace vectoriel des matrices $M = \begin{bmatrix} a & d & d \\ e & b & e \\ f & f & c \end{bmatrix}$ Dimension du sous-espace vectoriel. Générateurs	173
9) Recherche d'une base de l'espace vectoriel P_n des polynômes à une indéterminée de degré au plus égal à n	175
10) Dimension d'un espace vectoriel	176
Chapitre VI : Homomorphismes. Cours résumé	179
1) Homomorphismes. 2) Monomorphismes. 3) Epimorphismes. 4) Isomorphismes. 5) Endomorphismes. 6) Automorphismes	179

	Pages
(VI.1) <i>Exercices corrigés sur les homomorphismes</i>	180
1) – Montrer que le groupe $(C, +)$ des nombres complexes muni de l'addition et le groupe $(A, +)$ des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ munis de l'addition sont isomorphes	180
– De même pour (C_0, \cdot) et (A, \cdot) avec $C_0 = C - \{0\}$..	
2) On considère une application de $(R^2, +)$ dans $(R, +)$ $(x, y) \longrightarrow x$? Est-elle un homomorphisme ? Noyau et image de cet homomorphisme	183
3) Soit $(G, *)$ un groupe avec $a \in G$ fixe l'application h	
$g \in G \xrightarrow{h} a * g * \bar{a} \in G$	
est-elle un automorphisme de $(G, *)$?	184
4) On considère diverses applications du groupe (R_0, \cdot) dans lui-même. S'agit-il d'homomorphismes ?	187
5) L'exponentielle et le logarithme considérés comme homomorphismes de groupes	189
6) Diverses propriétés de l'application $x \longrightarrow x^2$ suivant les ensembles de définitions	191
7) Le groupe des similitudes de centre 0 est isomorphe au groupe (C_0, \cdot) avec $C_0 = C - \{0\}$	192
8) Image homomorphe d'une partie stable. Image réciproque d'un isomorphisme. Noyau d'un homomorphisme. Composé de 2 homomorphismes	192
9) Noyaux de divers homomorphismes, de groupe, d'anneau, d'application linéaire	198
10) Homomorphisme canonique	200
11) Problème général sur les homomorphismes	202
Bibliographie	205