

# INHALTSVERZEICHNIS

## Erster Abschnitt

### Die vier Grundrechnungsarten

1. Addition . . . . .	1
2. Subtraktion . . . . .	3
3. Gleichungen und Ungleichungen . . . . .	6
4. Multiplikation . . . . .	9
5. Gleichungen und Ungleichungen . . . . .	9
6. Division . . . . .	10
7. Gleichungen und Ungleichungen . . . . .	13

### Das Rechnen mit Brüchen

8. Formänderung der Brüche — Addition und Subtraktion	15
9. Gleichungen . . . . .	18
10. Multiplikation und Division . . . . .	19

### Dezimalbrüche (Zehnerbrüche)

11. Addition und Subtraktion . . . . .	27
12. Multiplikation . . . . .	28
13. Division . . . . .	30

### Addition und Subtraktion von Summen und Differenzen

14. Addition einer Summe . . . . .	34
15. Subtraktion einer Summe . . . . .	35
16. Addition einer Differenz . . . . .	35
17. Subtraktion einer Differenz . . . . .	36
18. Vermischte Aufgaben . . . . .	37

## Zweiter Abschnitt

### Das Rechnen mit rationalen Zahlen

19. Die Null — Rationale Zahlen . . . . .	41
20. Addition und Subtraktion rationaler Zahlen . . . . .	42

### Multiplikation und Division von Klammern, Multiplikation und Division von rationalen Zahlen

21. Multiplikation einer Klammer mit einer Zahl — Multiplikation von rationalen Zahlen . . . . .	46
22. Multiplikation von zwei Klammern — Gleichungen . . . . .	48
23. Division von rationalen Zahlen . . . . .	62
24. Division einer Summe durch eine Summe . . . . .	63

### Brüche mit allgemeinen Zahlen

25. Formänderung der Brüche . . . . .	67
26. Addition und Subtraktion gleichnamiger Brüche . . . . .	69
27. Addition und Subtraktion ungleichnamiger Brüche . . . . .	70
28. Gleichungen . . . . .	71
29. Multiplikation und Division von Brüchen mit einer ganzen Zahl . . . . .	79
30. Multiplikation von Brüchen . . . . .	82
31. Division durch einen Bruch . . . . .	84
32. Gleichungen . . . . .	86
33. Der Begriff „unendlich“ . . . . .	89
34. Verhältnisse — Proportionen — Mittelbildung . . . . .	90
35. Direkte und indirekte Proportionalität . . . . .	101

## Dritter Abschnitt

### Das Potenzieren — Die Potenzrechnung

36. Der Begriff der Potenz. . . . .	113
37. Addition und Subtraktion von Potenzen . . . . .	117
38. Multiplikation von Potenzen mit gleicher Grundzahl . . . . .	118
39. Die Potenzen von Summen (Binome) . . . . .	120
40. Division von Potenzen mit gleicher Grundzahl . . . . .	121
41. Multiplikation und Division von Potenzen mit gleicher Hochzahl. . . . .	122
42. Das Potenzieren von Potenzen . . . . .	124
43. Erste Erweiterung des Potenzbegriffs . . . . .	126

## Vierter Abschnitt

### Das Radizieren — Die Wurzelrechnung

44. Erklärungen . . . . .	132
45. Ausziehen der Quadratwurzel. . . . .	134

46. Addition und Subtraktion von Wurzeln . . . . .	137
47. Multiplikation von Wurzeln . . . . .	137
48. Division von Wurzeln . . . . .	141
49. Rationalmachen des Nenners . . . . .	143
50. Das Radizieren von Potenzen . . . . .	145
51. Das Radizieren von Wurzeln . . . . .	146
52. Gleichungen mit Wurzeln . . . . .	148
53. Wurzeln aus positiven und negativen Zahlen . . . . .	151

### Zweite Erweiterung des Potenzbegriffs

54. Potenzen mit gebrochenen Exponenten . . . . .	152
---	-----

## Fünfter Abschnitt

### Die Logarithmen

55. Erklärungen . . . . .	156
56. Aufschlagen des Logarithmus . . . . .	161
57. Aufschlagen des Numerus (Zahl) . . . . .	161
58. Logarithmische Aufgaben . . . . .	162
59. Logarithmus complementi . . . . .	165

### Der Rechenstab

60. Erklärung . . . . .	167
61. Multiplikation und Division . . . . .	169
62. Multiplikation mit drei und mehreren Zahlen . . . . .	170
63. Vereinigte Multiplikation und Division . . . . .	170

## Sechster Abschnitt

### Gleichungen 1. und 2. Grades

64. Erklärungen . . . . .	180
65. Eingekleidete Gleichungen 1. Grades mit einer Unbekannten . . . . .	180
66. Historische Gleichungen . . . . .	190
67. Gleichungen 1. Grades mit zwei Unbekannten . . . . .	193
68. Eingekleidete Gleichungen 1. Grades mit zwei Unbekannten . . . . .	197
69. Gleichungen 1. Grades mit drei und mehr Unbekannten . . . . .	201
70. Eingekleidete und historische Gleichungen mit mehreren Unbekannten . . . . .	202
71. Determinanten . . . . .	206
72. Gleichungen 2. Grades mit einer Unbekannten . . . . .	207

73. Eingekleidete Gleichungen 2. Grades mit einer Unbekannten . . . . .	208
74. Die vollständige quadratische Gleichung (Normalform). . . . .	212
75. Eingekleidete Gleichungen 2. Grades mit einer Unbekannten . . . . .	214
76. Quadratische Gleichungen mit zwei Unbekannten . . . . .	218
77. Eingekleidete Gleichungen 2. Grades mit zwei Unbekannten . . . . .	219

### Kubische Gleichungen mit einer Unbekannten

78. Sonderfälle . . . . .	221
79. Die allgemeine Gleichung 3. Grades . . . . .	223
80. Eingekleidete Gleichungen 3. Grades . . . . .	225

### Sondergleichungen

81. Symmetrische Gleichungen . . . . .	227
82. Exponentialgleichungen . . . . .	228
83. Die ganze rationale Gleichung $n$ -ten Grades mit einer Unbekannten . . . . .	229

## Siebenter Abschnitt

### Die Funktion und ihre Darstellung

84. Grundlegende Erklärungen . . . . .	232
85. Der Verlauf einer Funktion . . . . .	233
86. Das Bild der ganzen Funktion 1. Grades . . . . .	234
87. Das Bild der ganzen Funktion 2. Grades . . . . .	235
88. Das Bild der ganzen Funktion 3. Grades — Horner'sches Schema . . . . .	236
89. Die allgemeine Potenzfunktion $y = x^n$ . . . . .	238
90. Die gebrochene rationale Funktion . . . . .	239
91. Die transzendenten Funktionen . . . . .	245

### Die graphischen Lösungen von Gleichungen

92. Nullstellen . . . . .	246
93. Bestimmung von Wurzeln durch Annäherung . . . . .	246
94. Gleichungen 1. Grades mit einer Unbekannten . . . . .	247
95. Gleichungen 2. Grades mit einer Unbekannten . . . . .	250
96. Gleichungen 3. Grades mit einer Unbekannten . . . . .	251

97. Gleichungen 1. Grades mit zwei Unbekannten . . . . .	253
98. Gleichungen 2. Grades mit zwei Unbekannten . . . . .	253

## Achter Abschnitt

## Reihen

99. Erklärungen . . . . .	256
100. Arithmetische Reihen 1. Ordnung . . . . .	257
101. Interpolation bei arithmetischen Reihen . . . . .	264
102. Arithmetische Reihen höherer Ordnung . . . . .	264
103. Geometrische Reihen . . . . .	268
104. Zusammengesetzte Reihen . . . . .	275
105. Interpolation bei geometrischen Reihen . . . . .	276
106. Die unendliche geometrische Reihe . . . . .	279

## Zinseszinsrechnung und Anwendung

107. Erklärungen . . . . .	289
108. Zinseszins . . . . .	289
109. Zusammengesetzter Zinseszins . . . . .	295
110. Zwecksparen . . . . .	300

## Neunter Abschnitt

## Elemente der Differentialrechnung

111. Grenzwerte . . . . .	302
112. Stetigkeit . . . . .	307
113. Der Differenzenquotient — Das Steigungsmaß der Sekante einer Kurve . . . . .	310
114. Die Ableitung — Das Steigungsmaß der Tangente einer Kurve . . . . .	312
115. Ableitung — Differential — Differentialquotient . . .	314
116. Die Ableitung der Funktion $y = x^3$ . . . . .	316
117. Die Ableitung der Funktion $y = x^n$ (Potenzfunktion)	317
118. Geometrische Bedeutung des Differentialquotienten .	318
119. Die höheren Ableitungen . . . . .	319
120. Der Differentialquotient der allgemeinen kubischen und Potenzfunktion . . . . .	319
121. Differentialquotienten weiterer Funktionen . . . . .	321
122. Anwendungen des Differentialquotienten . . . . .	322
123. Graphisches Differenzieren . . . . .	323
124. Die Ableitung des Produktes zweier Funktionen . . .	327
125. Die Ableitung der Kehrwertfunktion einer Funktion .	328

126. Die Ableitung des Quotienten zweier Funktionen . . .	331
127. Differentiation einer Funktion und ihrer Umkehrung .	332
128. Differentiation der Funktion einer Funktion (Kettenregel) . . . . .	334
129. Differentiation unentwickelter Funktionen . . . . .	338
130. Differentiation der logarithmischen Funktionen . . .	340
131. Differentiation der Exponentialfunktionen . . . . .	343
132. Differentiation der trigonometrischen Funktionen . .	346
133. Differentiation der zyklometrischen Funktionen . . .	352
134. Zusammenstellung der Ableitungen der Winkelfunktionen . . . . .	354
135. Logarithmisches Differenzieren . . . . .	354
136. Höhere Ableitungen . . . . .	355

### Zehnter Abschnitt

#### Anwendungen der Differentialrechnung

137. Kurvenuntersuchung . . . . .	356
138. Extremwertaufgaben in eingekleideter Form . . . . .	363
139. Bestimmung der Gleichung einer Kurventangente . . .	378
140. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung . . . . .	379
141. Nullstellen von Funktionen . . . . .	379
142. Näherungsrechnung . . . . .	381
143. Fehlerrechnung . . . . .	382
144. Krümmung einer Kurve . . . . .	386
145. Partielle Ableitungen — Extremwerte — Anwendungen	387
146. Ableitung einer Funktion in Parameterdarstellung . .	390
147. Funktionen und Reihen . . . . .	395

#### Unendliche Reihen

148. Erklärung . . . . .	398
149. Konvergenzuntersuchungen — Notwendige und hinreichende Bedingung für Konvergenz — Konvergenz der alternierenden Reihe . . . . .	399
150. Konvergenz einer Potenzreihe . . . . .	402
151. Potenzreihenentwicklung nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten . . . . .	403

#### Potenzreihen

152. Vorbemerkung . . . . .	405
153. Reihe von Maclaurin . . . . .	405

154. Die Binomialreihe . . . . .	409
155. Reihe von Taylor . . . . .	412
156. Das Restglied der Reihen . . . . .	415
157. Herstellung der Grundreihen . . . . .	416
158. Beziehungen zwischen Exponentialfunktionen und Kreisfunktionen . . . . .	423

### Komplexe Zahlen

159. Vorbemerkung . . . . .	424
160. Das Rechnen mit komplexen Zahlen . . . . .	424
161. Reihen für $\pi$ . . . . .	427
162. Potenzen mit komplexen Exponenten. . . . .	427
163. Vieldeutigkeit der Logarithmen reeller und komplexer Zahlen . . . . .	428
164. Graphische Darstellung des Rechnens mit komplexen Zahlen . . . . .	430
165. Einheitswurzeln und Kreisteilung . . . . .	433

### Unbestimmte Werte

166. Berechnung unbestimmter Werte . . . . .	433
--	-----

### Anwendungsbeispiele aus der Physik

167. Differentialformeln der Bewegung . . . . .	434
---	-----

## Elfter Abschnitt

### Integralrechnung

168. Das bestimmte Integral. . . . .	438
169. Beziehungen zwischen Differential- und Integralrech- nung . . . . .	439
170. Graphische Integration . . . . .	443
171. Grundintegrale . . . . .	445
172. Integration durch Substitution . . . . .	447
173. Integration nach Teilen (Partielle Integration) . . . . .	450
174. Integration durch Reihen . . . . .	451
175. Integration gebrochener rationaler Funktionen . . . . .	452
176. Logarithmische Integration . . . . .	453

### Anwendungen der Integralrechnung

177. Flächenberechnung (Quadratur) . . . . .	453
178. Mittlerer Wert einer Funktion . . . . .	456
179. Flächenberechnung in Polarkoordinaten. . . . .	457

180. Berechnung von Bogenlängen (Rektifikation) . . . . .	460
181. Bogenberechnung in Polarkoordinaten . . . . .	461
182. Oberflächen von Rotationskörpern (Komplanation) . . . . .	463
183. Rauminhalte von Rotationskörpern (Kubatur) . . . . .	464
184. Schwerpunkt der Fläche unter einer Kurve . . . . .	467
185. Schwerpunkte von Linien . . . . .	467
186. Schwerpunkte von Flächen . . . . .	468
187. Schwerpunkte von Körpern . . . . .	468
188. Die Guldinschen Regeln . . . . .	468
189. Trägheitsmomente . . . . .	470

### Zwölfter Abschnitt

#### Kombinationslehre

190. Permutationen. . . . .	480
191. Variationen . . . . .	482
192. Kombinationen . . . . .	486
193. Der binomische Lehrsatz — Schluß von $n$ auf $n + 1$ . . . . .	491

### Anhang

Lösungen zur Aufgabensammlung Seiten 1 bis 493 .