

SOMMAIRE

INTRODUCTION

XI

NOTATIONS

XIV

PREMIÈRE PARTIE

ENSEMBLES ET DÉNOMBREMENTS

CHAPITRE I - ENSEMBLES ET APPLICATIONS

DEFINITIONS ET PROPRIETES

5

EXERCICES

	Enoncés	Corrigés
M I 1	13	17
M I 2	13	17
M I 3	13	17
M I 4	13	17
M I 5	14	17
M I 6	14	18
M I 7	14	18
M I 8	15	19
M I 9	15	19
M I 10	15	19
M I 11	16	19
M I 12	16	20
M I 13	16	20

CHAPITRE II - ELEMENTS D'ANALYSE COMBINATOIRE

DEFINITIONS ET PROPRIETES

23

EXERCICES

	Enoncés	Corrigés
M II 1	25	30
M II 2	25	30
M II 3	25	30
M II 4	25	30
M II 5	25	31
M II 6	25	31
M II 7	25	31
M II 8	26	31

		Enoncés	Corrigés
M II 9	}	26	31
M II 10		26	32
M II 11		26	32
M II 12	Triangle de Pascal	26	32
M II 13	Combinaisons (Jeu de cartes)	27	33
M II 14	Combinaisons, probabilités associées	27	33
M II 15	}	27	33
M II 16		27	34
M II 17	Jeu "Master Mind"	27	34
M II 18	Surjections (triangle de Stirling)	28	34
M II 19	Jeu de loto	28	35

DEUXIÈME PARTIE

ESPACES VECTORIELS ET APPLICATIONS LINÉAIRES

CHAPITRE III - ESPACES VECTORIELS

DEFINITIONS ET PROPRIÉTÉS

41

EXERCICES

		Enoncés	Corrigés	
M III 1	Structure d'espace vectoriel	47	51	
M III 2	L'espace vectoriel des carrés magiques	47	51	
M III 3	}	47	51	
M III 4		Sous-espaces vectoriels	47	51
M III 5	}	48	51	
M III 6		Indépendance linéaire de deux ou plusieurs vecteurs	48	52
M III 7	Bases dans \mathbb{R}^2 (base canonique)	48	52	
M III 8	}	48	52	
M III 9		Construction de bases. Dimension d'un espace vectoriel	49	52
M III 10		49	53	
M III 11	Propriété de la dépendance linéaire	49	53	
M III 12	Propriété relative aux bases	49	53	
M III 13	Composantes d'un vecteur dans une base	50	54	
M III 14	}	50	54	
M III 15		Sous-espaces vectoriels supplémentaires	50	54
M III 16	"Somme" de deux sous-espaces vectoriels	50	54	

CHAPITRE IV - APPLICATIONS LINEAIRES

DEFINITIONS ET PROPRIETES

59

EXERCICES

		Enoncés	Corrigés
M IV 1	} Propriétés du noyau et de l'image d'une application linéaire	61	67
M IV 2		61	67
M IV 3	Symétrie par rapport à un plan	61	68
M IV 4	Image d'un ensemble de vecteurs	62	68
M IV 5	Dimension d'un espace vectoriel en fonction des dimensions du noyau et de l'image d'une application linéaire	62	69
M IV 6	Linéarité d'une application	62	69
M IV 7	Construction d'une base à partir d'une application linéaire	63	70
M IV 8	Projecteurs et inverse généralisée	63	71
M IV 9	Projecteurs	64	71
M IV 10	Propriétés du rang de la somme de deux applications linéaires	64	73
M IV 11	Propriétés du rang de la composition de deux applications linéaires	64	73
M IV 12	Composition de deux projecteurs	65	74
M IV 13	Ensemble des applications linéaires de E dans F : $\mathcal{L}(E, F)$	65	75
M IV 14	Espace dual, base duale	65	75
M IV 15	Transposition d'une application linéaire	66	76
M IV 16	Forme linéaire canonique	66	77

CHAPITRE V - MATRICE ASSOCIEE A UNE APPLICATION LINEAIRE

DEFINITIONS ET PROPRIETES

81

EXERCICES

		Enoncés	Corrigés
M V 1	} Opérations sur les matrices à partir des opérations sur les applications linéaires	83	88
M V 2		83	89
M V 3	Application linéaire associée à une matrice : Interprétation géométrique	83	89
M V 4	} Détermination de la matrice associée à une application linéaire	84	89
M V 5		84	89
M V 6	Projection, homothétie, rotation, symétrie	84	90
M V 7	Composition d'une rotation et d'une homothétie	84	90
M V 8	Notion de matrice des variances-covariances	85	91
M V 9	Transformations linéaires d'un nuage de points : réflexion, permutation, dilatation,...	86	91

		Enoncés	Corrigés
M V 10	Construction de l'ensemble des carrés magiques d'ordre 3	86	93
M V 11	Matrice associée à l'application linéaire transposée	87	93

TROISIÈME PARTIE

TECHNIQUES DU CALCUL MATRICIEL

CHAPITRE VI - CALCUL MATRICIEL

DEFINITIONS ET PROPRIÉTÉS

99

EXERCICES

		Enoncés	Corrigés
M VI 1	} Addition, produit de matrices. Transposée et inverse d'une matrice	101	108
M VI 2		101	108
M VI 3			
M VI 4	} Calcul de matrices par récurrence	101	108
M VI 5		101	108
M VI 6	Matrices carrées régulières	102	109
M VI 7	Inverse d'une matrice particulière	102	109
M VI 8	} Termes généraux de matrices particulières	102	109
M VI 9		103	110
M VI 10	Produits de matrices	103	110
M VI 11	} Structure d'espace vectoriel d'un ensemble de matrices	103	110
M VI 12		103	110
M VI 13	Symétrie et antisymétrie	104	111
M VI 14	Introduction à la matrice associée à une distance	104	111
M VI 15	Relations linéaires entre les colonnes d'une matrice	104	111
M VI 16	Calcul de matrices en utilisant des relations de récurrence	104	112
M VI 17	Réduction d'une matrice à sa forme échelonnée	105	113
M VI 18	Calcul d'une matrice de variances-covariances et de son inverse par récurrence sur le nombre d'observations	106	113

CHAPITRE VII - TRACE, DETERMINANT, RANG

DEFINITIONS ET PROPRIETES

117

EXERCICES

Enoncés Corrigés

M VII 1	} Calcul de déterminants	123	129
M VII 2		123	129
M VII 3	Déterminant d'une matrice antisymétrique	123	129
M VII 4	Calcul de déterminants	123	129
M VII 5	Déterminant d'un produit de deux matrices. Vérification du résultat : $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$	124	130
M VII 6	Déterminant de αA (A matrice d'ordre p, α scalaire)	124	130
M VII 7	Démonstration du résultat : $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$	124	130
M VII 8	} Inverse d'une matrice en fonction de son déterminant	124	131
M VII 9		125	131
M VII 10	Calcul du déterminant d'une matrice carrée symétrique : méthode de Doolittle	125	131
M VII 11	Calculs de rangs par réduction d'une matrice à sa forme échelonnée	126	132
M VII 12	} Calculs de rangs	126	132
M VII 13		126	132
M VII 14	Théorème de Cayley-Hamilton	126	133
M VII 15	Calcul d'une matrice de variances-covariances, de son équation caractéristique et de sa trace	127	133
M VII 16	Introduction du critère de discrimination linéaire $\text{tr}(W^{-1}B)$	127	133

CHAPITRE VIII - MATRICES PAR BLOCS

DEFINITIONS ET PROPRIETES

137

EXERCICES

Enoncés Corrigés

M VIII 1	Produits de matrices partagées	139	141
M VIII 2	Déterminant d'une matrice partagée présentant un bloc non diagonal nul	139	141
M VIII 3	Déterminant d'une matrice par blocs	139	142
M VIII 4	Calcul de l'inverse d'une matrice partagée symétrique	140	143
M VIII 5	Calcul de l'inverse et du déterminant d'une matrice en pas à pas	140	143

QUATRIÈME PARTIE

DIAGONALISATION, ESPACES EUCLIDIENS

CHAPITRE IX - VALEURS PROPRES, VECTEURS PROPRES, DIAGONALISATION

DEFINITIONS ET PROPRIETES

149

EXERCICES

		Enoncés	Corrigés	
M IX 1	}	Calcul numérique de valeurs propres et de vecteurs propres d'une matrice	151	161
M IX 2			151	161
M IX 3		Lien entre les valeurs propres de AB et de BA	151	162
M IX 4		Calcul de valeurs propres et vecteurs propres	151	162
M IX 5		Diagonalisation d'une matrice	152	162
M IX 6		Indépendance des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes	152	162
M IX 7		Propriétés de l'opérateur de "centrage"	152	163
M IX 8		Valeurs propres d'une matrice idempotente	152	164
M IX 9		Diagonalisation d'une matrice	153	164
M IX 10		Limite d'une suite récurrente de vecteurs	153	165
M IX 11		Notions utilisées dans l'analyse linéaire discriminante	153	165
M IX 12		Comparaison des éléments propres de V et E'VE	154	166
M IX 13		Propriétés dérivées de l'équation caractéristique	155	167
M IX 14		Propriété des matrices de probabilités : chaîne simple homogène de Markov	155	167
M IX 15		Utilisation des vecteurs propres "à gauche"	156	168
M IX 16		Inverse et déterminant d'une matrice de type $A - xx'$	157	169
M IX 17		Matrices de dispersion "centrée" et "non centrée": comparaison de leurs déterminants et de leurs inverses	157	170
M IX 18		Théorème : toute matrice carrée est triangularisable	158	171
M IX 19	}	Théorème : toute matrice symétrique est diagonalisable	159	171
M IX 20			160	172

CHAPITRE X - CHANGEMENT DE BASE

DEFINITIONS ET PROPRIETES

177

EXERCICES		Enoncés	Corrigés
M X 1	} Matrices associées à une application linéaire de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 par rapport à deux bases différentes	179	183
M X 2		179	183
M X 3		179	184
M X 4	Projection orthogonale sur une droite	179	184
M X 5	Calcul des nouvelles composantes d'un vecteur en fonction des anciennes	180	185
M X 6	Symétrie par rapport à un plan	180	185
M X 7	Théorème : deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles sont de même rang	181	186
M X 8	Changement de base associé à une diagonalisation	182	187

CHAPITRE XI - ESPACES EUCLIDIENS : PRODUITS SCALAIRES ET METRIQUES ASSOCIEES

DEFINITIONS ET PROPRIETES

191

EXERCICES		Enoncés	Corrigés
M XI 1	} Matrices associées à des formes quadratiques	195	202
M XI 2		195	202
M XI 3	Formes quadratiques associées à des matrices particulières	195	202
M XI 4	Détermination d'une métrique de \mathbb{R}^3 à partir de relations entre les vecteurs d'une base	195	202
M XI 5	} Calcul de norme, distance et produit scalaire	195	202
M XI 6		196	203
M XI 7	} Projections orthogonales sur un sous-espace vectoriel	196	203
M XI 8		196	203
M XI 9	Inégalité de Schwarz	197	204
M XI 10	Détermination par projection orthogonale de la composante périodique d'une série chronologique	197	204
M XI 11	Propriétés des matrices symétriques définies positives	197	205
M XI 12	Procédé d'orthogonalisation de Schmidt	198	205
M XI 13	Décomposition d'une matrice symétrique définie positive : méthode de Doolittle-Choleski	198	206
M XI 14	} Réduction d'une forme quadratique à une somme algébrique de carrés : comparaison des matrices associées	199	206
M XI 15		199	207
M XI 16	Transformations d'un nuage de points et leurs effets sur la matrice des variances-covariances (introduction à l'Analyse en Composantes Principales)	200	207

CINQUIÈME PARTIE

APPLICATION A L'ANALYSE DES DONNÉES MULTIDIMENSIONNELLES

CHAPITRE XII - DERIVATION MATRICIELLE ET APPLICATIONS

DEFINITIONS ET PROPRIETES

213

EXERCICES

		Enoncés	Corrigés
M XII 1	Calcul de la dérivée d'une matrice dépendant d'une variable x par rapport à x ; calcul de la dérivée d'une fonction des éléments d'une matrice X par rapport à X	217	222
M XII 2	Calcul de la dérivée de M^{-1} par rapport au terme général de M	217	222
M XII 3	} Dérivée d'une forme linéaire ou quadratique par rapport à un vecteur	217	222
M XII 4		217	223
M XII 5	Calcul de $d[\text{tr}(M\Sigma)]/dM$, $d[\det(M)]/dM$, $d[\text{Log}[\det(M)]]/dM$	218	223
M XII 6	Estimation des paramètres d'un échantillon multinormal (méthode du maximum de vraisemblance)	218	223
M XII 7	Analyse en composantes principales (recherche d'un système d'axes d'élongation maximale d'un nuage de points)	219	224
M XII 8	Régression multiple (méthode des moindres carrés)	219	225
M XII 9	Régression multiple pondérée (méthode du maximum de vraisemblance)	219	225
M XII 10	Analyse des corrélations canoniques	220	225
M XII 11	Analyse discriminante : analyse linéaire discriminante et analyse discriminante quadratique (méthode de Sebestyen)	221	226

CHAPITRE XIII - ANALYSES FACTORIELLES ET DISCRIMINATION

DEFINITIONS ET PROPRIETES

229

EXERCICES

		Enoncés	Corrigés
M XIII 1	Analyse en composantes principales (ACP) : utilisation des opérateurs de Lagrange, changement de métrique	231	253
M XIII 2	Analyse en composantes principales générale	232	254
M XIII 3	Analyse en composantes principales : application numérique (1)	233	255
M XIII 4	Analyse en composante principales : application numérique (2)	234	257

		Enoncés	Corrigés
M XIII 5	Analyse factorielle des correspondances (AFC): méthodologie	234	258
	1ère partie : l'AFC considérée comme une ACP dans \mathbb{R}^p muni de la métrique euclidienne classique $M = I$	234	258
	2ème partie : l'AFC considérée comme une ACP dans \mathbb{R}^p muni de la métrique du χ^2	235	259
M XIII 6	Analyse factorielle des correspondances : parallélisme des analyses dans \mathbb{R}^p et \mathbb{R}^n	236	260
M XIII 7	Analyse factorielle à partir d'une matrice de distances ou analyse du triple (I, d_{ij}, m_i)	237	261
M XIII 8	Reconstitution de l'image euclidienne d'un ensemble de points à partir des distances entre points pris deux à deux	238	262
M XIII 9	Régression linéaire : liaison entre une variable privilégiée y continue et un ensemble de p variables explicatives continues	239	264
	1ère partie : Etude dans \mathbb{R}^n de l'ensemble $\{y, x^1, \dots, x^p\}$	240	264
	2ème partie : Etude dans \mathbb{R}^{p+1} , muni de la métrique $M = I$, de l'ensemble $\{z^i \mid i = 1, \dots, n\}$	240	265
M XIII 10	Analyse factorielle discriminante d'un tableau de données continues	242	266
M XIII 11	Analyse discriminante : fonction linéaire discrimi- nante de Fisher, distance de Mahalanobis	243	267
M XIII 12	Analyse discriminante : comparaison de deux critères (linéaire, quadratique)	244	269
M XIII 13	Analyse factorielle discriminante à partir de données mises sous forme disjonctive complète	245	270
M XIII 14	Analyse discriminante sous l'angle bayésien avec hypothèse de multinormalité dans chacun des k groupes	247	273
M XIII 15	Règle discriminante avec estimation des densités de probabilité dans chacun des k groupes	249	275
	1. Cas de p variables quantitatives (méthode multidimensionnelle des noyaux de Parzen)	249	275
	2. Cas de p variables binaires	250	275
M XIII 16	Utilisation du schéma de dualité dans l'analyse en composantes principales	251	276

CHAPITRE XIV - NOTIONS DE PROXIMITE ET CLASSIFICATION AUTOMATIQUE

DEFINITIONS ET PROPRIETES

281

EXERCICES

		Enoncés	Corrigés
M XIV 1	Construction d'une hiérarchie totale	287	295
M XIV 2	Propriétés des boules ultramétriques	287	295
M XIV 3	Equivalence entre hiérarchie totale indiquée et distance ultramétrique	287	295
M XIV 4	Détermination de l'écart entre deux ordonnances	287	296
M XIV 5	Transformation d'une matrice de distances en matrice de distances ultramétriques suivant la d_{uim}	288	296
M XIV 6	Construction d'arbres hiérarchiques suivant différents critères d'agrégation	288	297
M XIV 7	Construction de l'arbre hiérarchique indicé en utilisant l'algorithme d'agrégation suivant la moyenne. Comparaison d'ordonnances	291	299
M XIV 8	Construction d'un arbre hiérarchique indicé en utilisant l'algorithme de Roux associé à l'ultramétrique inférieure maxima	291	299
M XIV 9	Construction des arbres hiérarchiques indicés en utilisant la d_{um} , une d_{usm} et la distance moyenne. Comparaison entre les ordonnances associées et l'ordonnance de la distance initiale	292	300
M XIV 10	Méthode des nuées dynamiques (détermination d'une partition de E en k parties homogènes et distinctes)	292	301

BIBLIOGRAPHIE

REFERENCES MATHEMATIQUES	303
REFERENCES STATISTIQUES	304

INDEX

307