

INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort	XV
---------------	----

ZWEITER ABSCHNITT:
Differentialrechnung für
Funktionen einer reellen Veränderlichen

A. Begriff der Ableitung einer Funktion $f(x)$. Ableitungsregeln

1. Das Tangentenproblem. Die Ableitung einer Funktion $f(x)$ als Grenzwert ihres Differenzenquotienten	3
2. Ableitung der Potenzfunktion $y = x^n$ für positive ganze und rationale Exponenten n	10
3. Ableitung der Funktionen $A \cdot \sin(\omega x + \alpha)$ und $A \cdot \cos(\omega x + \alpha)$, insbesondere von $\sin x$ und $\cos x$	14
4. Ableitung der logarithmischen Funktion ${}^a \log x$	16
5. Ableitung der Exponentialfunktion $A \cdot a^{\lambda x}$	19
6. Das Geschwindigkeitsproblem. Geschwindigkeit einer geradlinigen Bewegung	23
7. Verallgemeinerung. Änderungsgeschwindigkeit eines zeitlichen Vorgangs	28
8. Verschiedene andere Deutungen der Ableitung	33
9. Das LANDAUSCHE Symbol o	40
10. Das LANDAUSCHE Symbol O	43
11. Stetigkeit und Differenzierbarkeit einer Funktion	48
12. Zerlegungssatz von J. L. LAGRANGE	53

**B. Differential und Differentialquotient einer Funktion $y(x)$.
Weitere Differentialregeln**

13. Differential und Differentialquotient einer Funktion $y(x)$	59
14. Geometrische Deutung und praktische Bedeutung der Differentiale ..	62
15. Anwendungen des Differentials. Geschichtliche Bemerkungen	67
16. Linksseitige und rechtsseitige Ableitung einer Funktion $f(x)$	74
17. Uneigentliche (unendliche) Ableitungen	79

18. Ableitung von Summe, Differenz, Produkt und Quotient zweier differenzierbarer Funktionen	86
19. Beispiele und Anwendungen der Summenregel und der Produktregel ..	89
20. Beispiele zur Quotientenregel. Ableitung von $\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{ctg} x$. Anwendungen	94
21. Feststellung mehrfacher (reeller oder komplexer) Wurzeln einer reellen algebraischen Gleichung	97
22. Befreiung einer reellen algebraischen Gleichung von mehrfachen (reellen oder komplexen) Nullstellen. Kettendivision	100
23. Ableitung der Hyperbelfunktionen	103
24. Zusammenfassung einiger weiterer Regeln der Differentialrechnung .	105
25. Berührungsgrößen von Kurven in cartesischen Koordinaten	106

C. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Kettenregel. Anwendung auf weitere Differentiationsregeln

26. Der Satz von ROLLE	109
27. Einige Anwendungen des Satzes von ROLLE	111
28. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung	115
29. Verallgemeinerter Mittelwertsatz	121
30. Anwendungen des Mittelwertsatzes. Der Eindeutigkeitsatz der Differentialrechnung	123
31. Einige weitere Anwendungen des Mittelwertsatzes. Satz von DARBOUX über die Zwischenwerte der Ableitung	128
32. Ableitung zusammengesetzter oder mittelbarer Funktionen. Kettenregel der Differentialrechnung	130
33. Weitere Anwendungen der Kettenregel. Logarithmische Ableitung	139
34. Das logarithmische Differential. Anwendung auf Fehlerrechnung ...	145
35. Einige Beispiele zur Fehlerrechnung	149
36. Die Ableitung der Umkehrfunktion	153
37. Die Ableitungen der Arcusfunktionen	157
38. Die Ableitungen der Areafunktionen	160
39. Erste Verallgemeinerung der Kettenregel	161

D. Zweite Verallgemeinerung der Kettenregel. Ableitung impliziter Funktionen

40. Einführende Bemerkungen über stetige Funktionen von zwei und mehr unabhängigen Veränderlichen	166
41. Partielle Ableitungen	168
42. Zweite Verallgemeinerung der Kettenregel	171
43. Ableitung der durch die Gleichung $f(x, y) = 0$ implizit definierten Funktion $y = y(x)$	174

44. Beispiele zur Tangentenbestimmung algebraischer und transzendenter Kurven	180
45. Allgemeine Bemerkungen über elementare Funktionen und ihre Ableitungen	186

E. Differentiation von Funktionen, die durch konvergente unendliche Reihen definiert sind. Anwendungen

46. Die als Summen von konvergenten Potenzreihen $f(x) = \sum a_n x^n$ definierten analytischen Funktionen	192
47. Die Ableitung der durch konvergente Potenzreihen definierten analytischen Funktionen	198
48. Die Ableitung der Summenfunktion $F(x)$ einer konvergenten Reihe $F(x) = \sum u_n(x)$ mit differenzierbaren Gliedern $u_n(x)$	202
49. Ableitung und Stammfunktion einer analytischen Funktion. Integration einer Potenzreihe	207
50. Die Potenzreihenentwicklung der Funktion $\ln(1+x)$. Berechnung einiger Logarithmen	210
51. Die systematische Berechnung der Logarithmen ${}^a \log x$	215
52. Die systematische Berechnung der Logarithmen zusammengesetzter Zahlen. Lineare Interpolation in Logarithmentafeln	221
53. Die Potenzreihenentwicklung der Funktion $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$, Berechnung der Zahl π . EULERSche Reihentransformation	225
54. Genauere Berechnung der Zahl π	231

F. Stetige, nirgends differenzierbare Funktionen

55. Einige Beispiele von stetigen aber nirgends differenzierbaren Funktionen	236
56. Die überall stetigen aber nirgends eigentlich differenzierbaren Funktionen von B. BOLZANO und T. TAKAGI	246
57. Einige weitere Eigenschaften der TAKAGISchen Kurve	256

G. Ableitungen und Differentiale höherer Ordnung

58. Ableitungen höherer Ordnung	262
59. Einige Anwendungen der höheren Ableitungen. Erste Verallgemeinerung des Satzes von ROLLE	266
60. TAYLORSche Entwicklung eines Polynoms $P(x)$ an einer Stelle x_0	268
61. Mehrfache Nullstellen einer Funktion $f(x)$. Zweite Verallgemeinerung des Satzes von ROLLE	271
62. Differentiale höherer Ordnung. Höhere Differentialquotienten	273
63. Allgemeine Regeln über Ableitungen und Differentiale höherer Ordnung. Beispiele	276
64. Die physikalische Bedeutung der zweiten Ableitung. Beschleunigung	281

65. Explizite Darstellung der höheren Ableitungen von $\arcsin x$ und $\arctg x$	284
66. Höhere Ableitungen einer zusammengesetzten Funktion	288

H. Monotone und konvexe Funktionen

67. Die Bedeutung des Vorzeichens der ersten Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$	296
68. Anwendungen und Beispiele	301
69. Konvexe Funktionen	306
70. Weitere Beispiele und Anwendungen von konvexen Funktionen	310
71. Nach oben beschränkte konvexe Funktionen. Ihre Stetigkeit und einseitige Differenzierbarkeit	315
72. Verallgemeinerung der Eigenschaften von konvexen Funktionen ...	317
73. Weitere Kennzeichnungen der konvexen Funktionen	322
74. Beispiele und Anwendungen. Die Ungleichungen von CAUCHY, HÖLDER und MINKOWSKI	327
75. Geometrische Bedeutung des Vorzeichens der zweiten Ableitung	332
76. Anwendungen auf die Diskussion von Kurven $y = f(x)$	337

I. Elementare Theorie der Extrema

77. Absolute und relative Maxima und Minima (Extrema) einer Funktion	343
78. Die elementare Theorie der relativen Extrema nach A. CAUCHY	348
79. Die elementare Theorie der relativen Extrema nach LEIBNIZ	357
80. Elementare Beispiele zur Bestimmung relativer Extrema	365
81. Weitere einfache Extremalaufgaben	369
82. Einige weitere Extremalaufgaben	376
83. Einige physikalische Extremalaufgaben	381
84. Randextrema	390

J. Bestimmung von Grenzwerten (Theorie der unbestimmten Formen)

85. Ein Sonderfall der Regel von DE L'HOSPITAL	397
86. Die Regel von DE L'HOSPITAL zur Bestimmung von Grenzwerten ...	402
87. Beispiele und Anwendungen	406
88. Erweiterungen der Regel von DE L'HOSPITAL	412
89. Wiederholte Anwendung der Regel von DE L'HOSPITAL	417
90. Zwei weitere Grenzwertprobleme. (Unbestimmte Formen der Gestalt $0 \cdot \infty$ und $\infty - \infty$)	424
91. Beispiele und Anwendungen	430

92. Grenzwerte von Ausdrücken der Gestalt $[\varphi(x)]^{p(x)}$. (Unbestimmte Formen der Gestalt 0^0 , ∞^0 und 1^∞).	436
93. Allgemeine Bemerkungen über Grenzwertbestimmungen	441
94. Die verschiedenen Ordnungen des Unendlichklein-Werdens und Unendlichgroß-Werdens von Funktionen	448
95. Das Rechnen mit Größen, die unendlich klein oder unendlich groß werden	455

K. Die TAYLORSche Formel

96. Zusammenhang zwischen den höheren Steigungen und höheren Ableitungen einer Funktion. CAUCHYScher Mittelwertsatz für höhere Steigungen und Differenzenquotienten	462
97. Beweis des Mittelwertsatzes von CAUCHY für die höheren Steigungen einer Funktion $f(x)$. Anwendung auf das Restglied der NEWTONSchen Interpolationsformel	467
98. Bestimmung des HERMITESchen Interpolationspolynoms $P(x)$ durch Funktionswerte und Ableitungen an mehreren Stützstellen	470
99. Ermittlung des HERMITESchen Interpolationspolynoms mit Hilfe des Steigungsspiegels	474
100. Das Restglied der HERMITESchen Interpolationsformel	479
101. Die Formel von TAYLOR und ihre Restglieder nach LAGRANGE, CAUCHY, ROCHE und SCHLÖMILCH	481
102. Die Schmiegeparabeln höherer Ordnung einer Kurve $y = f(x)$	486
103. Anwendung auf die Parabeln dritter und vierter Ordnung	489
104. Verschiedene andere Gestalten der TAYLORSchen Formel und ihres Restgliedes. Die Formel von MACLAURIN	493
105. Allgemeine Theorie der relativen Extrema einer Funktion $f(x)$	496
106. Verschiedene Beispiele	499

L. TAYLORSche Entwicklung einer Funktion $f(x)$. Anwendungen auf elementare Funktionen

107. Berechnung einer Funktion $f(x)$ mittels der TAYLORSchen Formel. Entwicklung einer Funktion $f(x)$ in eine TAYLORSche Reihe	504
108. Hinreichende Bedingungen für die Darstellbarkeit einer Funktion $f(x)$ durch ihre TAYLORSche Reihe. Satz von N. S. BERNSTEIN	510
109. Die TAYLORSche Reihe als Potenzreihe	516
110. Die MACLAURINSchen Entwicklungen der Funktionen e^x und e^{-x}	517
111. Die MACLAURINSchen Entwicklungen der Funktionen $\cos x$, $\sin x$ und $\cos x$, $\sin x$	521
112. Die logarithmische Reihe	525
113. Die MACLAURINSchen Entwicklungen der Funktionen $\arctg x$ und $\arcsin x$	531

114. Die binomische Reihe (Binomialreihe)	536
115. Das Verhalten der Binomialreihe an den Stellen $x = +1$ und $x = -1$	540
116. Beispiele und Anwendungen der Binomialreihe	544
117. Die BERNOULLISCHEN Zahlen	550
118. Die MACLAURINSCHEN Entwicklungen der Funktionen $\operatorname{tg} x$, $x \cdot \operatorname{ctg} x$, $\mathfrak{E}g x$, $x \cdot \mathfrak{C}tg x$	553
119. Teilbruchzerlegungen der Funktionen $\pi x \cdot \operatorname{ctg} \pi x$ und $\pi \cdot \operatorname{tg} (\pi x/2)$, $\pi/\sin \pi x$ und $\pi/\cos \pi x$	555
120. Anwendungen	561
121. TAYLORSCHER Entwicklung von $1/\cos x$. EULERSCHER Zahlen	564
122. Herleitung neuer Potenzreihenentwicklungen durch Differentiation oder Integration bekannter Entwicklungen	566
123. Anwendungen auf die Berechnung von Grenzwerten	570
124. Anwendung auf Näherungsformeln	573

M. Graphische, instrumentelle und numerische Differentiation

125. Konstruktion der abgeleiteten Kurve $y' = y'(x)$ einer stetig differen- zierbaren Funktion $y = y(x)$	576
126. Ein globales Verfahren zur angenäherten graphischen Differentiation	581
127. Graphische Ermittlung der Tangenten und Normalen einer Kurve ...	585
128. Instrumentelle Ermittlung der Tangenten und Normalen einer Kurve (Derivatoren, Derivimeter)	590
129. Numerische Differentiation	593
130. Vorbemerkungen zum Sonderfall äquidistanter Argumente. Die Differenzenoperatoren Δ und E sowie ∇ und H	599
131. Numerische Differentiation bei äquidistanten Argumenten. NEWTON- sche Ableitungsformeln bei absteigenden Differenzen	603
132. Numerische Differentiation mittels der NEWTONSCHEN Formeln mit aufsteigenden Differenzen	608
133. Numerische Differentiation nach STIRLING und BESSEL	612

N. Numerische Lösung von Gleichungen

134. Die Regula falsi	617
135. Weitere Betrachtungen zur Regula falsi. Satz von FOURIER	621
136. Ein Beispiel zur Regula falsi	624
137. Das Iterationsverfahren von GREGORY zur Lösung von Gleichungen	626
138. Das Iterationsverfahren von GREGORY zur Lösung von Gleichungen (Fortsetzung)	634
139. Anwendungen und Beispiele zum Iterationsverfahren von GREGORY	635
140. Konvergenz erster und höherer Ordnung eines Iterationsverfahrens	641

141. Das NEWTONSche Verfahren	646
142. Beispiele zum NEWTONSchen Verfahren	652
143. Algebraische Gleichungen. Ihre Befreiung von mehrfachen Wurzeln ..	658
144. Einschränkung der reellen Wurzeln einer reellen algebraischen Gleichung nach MACLAURIN und LAGRANGE	660
145. Die Verfahren von NEWTON und LAGUERRE zur Einschränkung der reellen Wurzeln einer reellen algebraischen Gleichung	663
146. Einschränkung der reellen Wurzeln einer reellen algebraischen Gleichung nach CAUCHY	666
147. Der Satz von STURM	670
148. Anwendungen und Beispiele zum Satz von STURM	674
149. Der Satz von BUDAN-FOURIER	679
150. Die Cartesische Zeichenregel	681
151. Die Ungleichungen von EULER und DE GUA	685

O. Ebene Kurven

152. Stetige ebene Kurven	689
153. Die Konstruktion einer PEANOSchen Kurve	692
154. Weitere Bemerkungen über die nach HILBERT erzeugte PEANOSche Kurve	697
155. Rechnerische Behandlung der HILBERTSchen Abbildung	702
156. JORDANSche Kurven	710
157. Glatte Kurven	712
158. Anwendungen und Beispiele	716
159. Parameteränderung	723
160. Parameterinvarianz des Tangentendifferentials. Bogendifferential und Bogenlänge	725
161. Differentiation der Vektorprodukte	729
162. Gerade und krumme Linien	733
163. Mehrpunktig (von höherer Ordnung) berührende Tangenten	734
164. Berührung höherer Ordnung zweier Kurven $y = f(x)$ und $y = g(x)$..	737
165. Berührung höherer Ordnung der Kurven $\xi = \xi(t)$ und $f(x, y) = 0$...	743
166. Schmieggreis einer ebenen Kurve. Evolute	747
167. Einige Beispiele	753
168. Schmieggreise der Kurven $y = y(x)$	761
169. Schmieggreise der Kurven $y^2 = f(x)$	768
170. Asymptoten ebener Kurven	773
171. Geradlinige (vertikale) Asymptoten ebener Kurven	777
172. Geradlinige (nicht vertikale) Asymptoten ebener Kurven	783

Schrifttum	792
Namen- und Sachverzeichnis	795