

# INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort .....	XIII
---------------	------

## VIERTER ABSCHNITT

### Grundzüge der linearen Algebra

#### A. Vektorrechnung des dreidimensionalen Raumes

1. Vektoren und Parallelkoordinaten des dreidimensionalen Raumes. Linearer Raum.....	3
2. Lineare Vektorräume $\mathfrak{R}^k$ der Dimensionen $k = 1, 2, 3$ .....	11
3. Das Außenprodukt $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ dreier Vektoren des $R^3$ .....	16
4. Berechnung des Außenprodukts $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ als Determinante dritter Ordnung $A =  a_{ik} $ .....	22
5. Determinantenregeln.....	27
6. Das Außenprodukt dreier Vektoren als Spatvolumen .....	29
7. Zerlegung eines Vektors in Komponenten. Cramersche Regel .....	36
8. Das Innenprodukt $(p, q)$ zweier Vektoren des euklidischen Raumes $R^3$ . Räumliche Metrik (Längen und Winkel).....	40
9. Allgemeine (affine) Gestalt des Innenprodukts zweier Vektoren des reellen euklidischen $R^3$ .....	51
10. Definition und Eigenschaften von metrischen Räumen nach <i>M. Fréchet</i> .....	58
11. Lineare normierte Räume.....	64
12. Analytische Geometrie der Ebenen des euklidischen Raumes $R^3$ ....	66
13. Orientierte Ebenen des euklidischen $R^3$ . Ihre Hessesche Gleichung .....	73
14. Außenprodukt von zwei Vektoren des $R^3$ . Bivektoren .....	82
15. Vektorprodukt (vektorielles Produkt) von zwei Vektoren des euklidischen $R^3$ .....	89
16. Produkte von drei Vektoren (Tripelprodukte) .....	93
17. Produkte von vier Vektoren (Quadrupelprodukte).....	97
18. Multiplikation zweier Spatprodukte. Gramsche Determinante.....	103
19. Sphärische Dreiecke und Kugelgeometrie .....	107
20. Polare Kugeldreiecke. Sphärische Trigonometrie .....	111
21. Anwendungen auf die Analytische Geometrie des Raumes $R^3$ .....	120
22. Anwendungen auf Mechanik.....	127

23. Anwendung der Vektorrechnung auf die Drehbewegung des $R^3$ . Drehvektor von <i>Euler</i> .....	134
24. Quaternionen von <i>Hamilton</i> .....	138
25. Darstellung der Drehungen des $R^3$ durch Hamiltonsche Quaternionen .....	144
<b>B. Vektorrechnung des <math>n</math>-dimensionalen Raumes</b>	
26. Der $n$ -dimensionale affine Raum $R^n$ .....	149
27. Das Außenprodukt von $n$ Vektoren des $R^n$ und die Determinante $n$ . Ordnung .....	155
28. Entwicklung der Determinanten nach <i>P.S. Laplace</i> .....	158
29. Beispiele (Determinanten, Zerlegungssatz von <i>Laplace</i> ) .....	163
30. Cramersche Regel. Lineare Unabhängigkeit von $n$ Vektoren des $R^n$	171
31. Volumen (Rauminhalt) eines $n$ -dimensionalen Spates $S_n$ .....	178
<b>C. Lineare Gleichungssysteme</b>	
32. Homogene lineare Gleichungssysteme .....	182
33. Einige Beispiele und Anwendungen zur Theorie der Systeme homogener linearer Gleichungen .....	192
34. Inhomogene lineare Gleichungssysteme .....	200
35. Einige Beispiele und Anwendungen linearer inhomogener Gleichungssysteme .....	205
36. Das Verfahren von <i>Gauß</i> zur Lösung linearer homogener Gleichungssysteme .....	210
<b>D. Matrizenrechnung</b>	
37. Multiplikation von Determinanten gleicher Ordnung .....	218
38. Das Rechnen mit Matrizen .....	222
39. Anwendung auf lineare Gleichungssysteme. Inverse Matrix .....	233
40. Der verkettete Gaußsche Algorithmus .....	240
<b>E. Lineare Transformationen</b>	
41. Orthogonale lineare Transformationen .....	245
42. Eulersche Winkel .....	251
43. Homogene affine Transformationen des $R^n$ .....	257
44. Die geometrischen Eigenschaften der reellen affinen Abbildungen ..	264
45. Eigenvektoren und Normalformen von linearen homogenen Transformationen. Beispiele .....	268
46. Kongruente Transformationen (Bewegungen und Umlegungen des euklidischen $R^n$ ) .....	276
47. Die Drehungen der euklidischen Räume $R^2$ , $R^3$ und $R^4$ um den Nullpunkt $O$ .....	280

**F. Quadratische Formen. Quadriken**

48. Quadratische Formen .....	286
49. Hauptachsentransformation der quadratischen Formen .....	291
50. Quadriken (Flächen 2. Ordnung) des euklidischen $R^3$ . Ihre Invarianten bei Bewegungen des $R^3$ .....	296
51. Quadriken mit Mittelpunkt .....	301
52. Paraboloidoide als Quadriken ohne Mittelpunkt .....	310
53. Quadratische Zylinder und Ebenenpaare als singuläre Quadriken $Q(x, x)$ .....	316
54. Einige Beispiele .....	325

**FÜNFTER ABSCHNITT****Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher****G. Mengen. Verbände. Metrische Räume. Fixpunktsatz von Banach**

55. Punktmengen $\mathfrak{M}$ des $n$ -dimensionalen Raumes $R^n$ .....	333
56. Mengenalgebra. Verbände. Algebraische Strukturen .....	336
57. Der Boolesche Verband der klassischen Aussagenlogik .....	340
58. Offene und abgeschlossene Mengen eines metrischen Raumes. Innere Punkte, Berührungspunkte und Randpunkte einer Menge ..	346
59. Häufungspunkte und Grenzpunkte einer Menge $\mathfrak{M}$ . Der Satz von <i>Bolzano-Weierstraß</i> .....	553
60. Cauchyfolgen. Vollständige metrische Räume. Fixpunktsatz von <i>Banach</i> .....	358
61. Kompakte Punktmengen $\mathfrak{M}$ in metrischen Räumen $R$ (insbesondere in euklidischen Räumen $R^n$ ) .....	364

**H. Funktionen mehrerer Veränderlicher. Nomographie**

62. Funktionen von mehreren Veränderlichen .....	369
63. Flächen zweiter Ordnung (Quadriken) .....	376
64. Drehflächen, Schraubflächen, Konoide .....	383
65. Nomographie, Netztafeln .....	390
66. Fluchttafeln .....	395
67. Fluchttafeln mit krummen Leitern .....	405
68. Fluchttafeln für Gleichungen mit vier, fünf und sechs Veränderlichen .....	412

**I. Stetigkeit der Funktionen von mehreren Veränderlichen**

69. Die Funktionen von zwei Veränderlichen .....	421
--	-----

70. Stetigkeit der Funktionen von zwei und mehr Veränderlichen . . . . .	424
71. Einige Grundeigenschaften der stetigen Funktionen mehrerer Veränderlichen . . . . .	428
72. Weitere Eigenschaften stetiger Funktionen von mehreren Veränderlichen . . . . .	430
73. Einige Beispiele von stetigen Abbildungen. . . . .	434

## J. Differentialrechnung in $n$ Veränderlichen

74. Partielle Ableitungen. . . . .	439
75. Vollständige Differenzierbarkeit und vollständige Differenziale . . . . .	442
76. Ableitung der mittelbaren Funktionen . . . . .	450
77. Satz von <i>Euler</i> über homogene Funktionen. . . . .	455
78. Richtungsableitung und Gradient einer skalaren Ortsfunktion. Berührungsebenen . . . . .	457
79. Einige Anwendungen und Beispiele . . . . .	464
80. Weitere Beispiele und Anwendungen . . . . .	468
81. Partielle Ableitungen höherer Ordnung. Der Satz von <i>H. A. Schwarz</i> . . . . .	473
82. Differenziale höherer Ordnung. . . . .	480
83. Der Mittelwertsatz für Funktionen von mehreren Veränderlichen. .	484
84. Die Taylorsche Formel . . . . .	486
85. Singuläre Punkte von ebenen Kurven. . . . .	493
86. Das Newtonsche Näherungsverfahren zur Lösung von Gleichungen . . . . .	500
87. Das Iterationsverfahren zur Lösung von Gleichungssystemen von $n$ Gleichungen mit $n$ Unbekannten . . . . .	502
88. Das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz. . . . .	508

## K. Theorie der Extrema bei Funktionen von $n$ Veränderlichen

89. Relative oder lokale Extrema (Maxima und Minima) der Funktion $z = z(x, y)$ . . . . .	512
90. Anwendungen und Beispiele. . . . .	518
91. Lokale (relative) Extrema einer Funktion $f = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ von $n$ Veränderlichen. . . . .	527
92. Extrema mit Nebenbedingungen . . . . .	532
93. Weitere Extrema mit Nebenbedingungen . . . . .	541
94. Verschiedene Beispiele. . . . .	547

## L. Fouriersche Reihen

95. Die Approximation einer Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ durch eine Funktion $\phi(x)$ einfacherer Gestalt . . . . .	552
96. Fouriersche Reihe einer $2\pi$ -periodischen Funktion $f(x)$ . . . . .	560

97. Beispiele von Fourierreihen .....	565
<b>M. Implizite Funktionen</b>	
98. Der Hauptsatz über implizite Funktionen .....	573
99. Allgemeine Form des Hauptsatzes über implizite Funktionen bei mehreren Veränderlichen .....	577
<b>N. Koordinatentransformation. Abbildungen</b>	
100. Der Übergang zu neuen Koordinaten. ....	587
101. Ebene Abbildungen (Transformationen der Ebene) .....	596
102. Inversion (Spiegelung) am Kreis .....	602
103. Die allgemeine gleichsinnige Kreisverwandtschaft .....	608
104. Stetigkeit und Differenzierbarkeit einer Funktion $f(z)$ einer komplexen Veränderlichen $z$ . Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen. Konforme Abbildungen .....	613
<b>O. Kurvenintegrale. Vektoranalysis</b>	
105. Kurvenintegrale .....	622
106. Der Hauptsatz über Kurvenintegrale .....	628
107. Stationäre ebene Strömungen. ....	638
108. Verhalten eines Teilchens im Strömungsfeld. Divergenz eines Vektorfeldes .....	643
109. Rotor und Divergenz als Wirbeldichte und Queldichte .....	647
110. Stromfunktion und Potentialfunktion. Quell- und wirbelfreie Strömungen .....	652
111. Räumliche Vektoranalysis. ....	655
112. Operatoren zweiter Ordnung der Vektoranalysis. ....	663
113. Produktformeln der Vektoranalysis. ....	668

## SECHSTER ABSCHNITT

### Integralrechnung mehrerer Veränderlicher

<b>P. Doppelintegrale und mehrfache Integrale. Integralsätze von Gauß und Stokes</b>	
114. Doppelintegrale über Rechtecksbereichen .....	677
115. Berechnung des Doppelintegrals. Zerlegung der doppelten Integration in zwei einfache Integrationen .....	680
116. Doppelintegrale mit beliebigen (normalen) Integrations- bereichen .....	686

117. Berechnung des Doppelintegrals für Normalbereiche durch Zerlegung der doppelten Integration in zwei einfache Integrationen .....	690
118. Inhalt der Oberfläche eines krummen Flächenstücks $z = f(x, y)$ ...	698
119. Mittelwertsatz für Doppelintegrale. Gebietsdifferentiation und Dichten .....	701
120. Der Gaußsche Integralsatz in der Ebene .....	703
121. Einführung neuer Veränderlicher in ein Doppelintegral.....	710
122. Einige Anwendungen und Beispiele.....	715
123. Gaußsche Darstellung einer Fläche. Flächenmetrik .....	723
124. Einige Beispiele.....	728
125. Der Begriff des dreifachen Integrals .....	736
126. Die praktische Berechnung der dreifachen Integrale über Normalbereiche $\mathfrak{R}$ .....	737
127. Die Einführung neuer Veränderlicher.....	743
128. Mehrfache ( $n$ -fache) Integrale mit $n > 3$ .....	750
129. Einige Anwendungen auf mechanische Fragen .....	754
130. Der Gaußsche Integralsatz im Raum .....	760
131. Der Integralsatz von <i>Stokes</i> im Raum .....	768
132. Einige Anwendungen der Integralformeln .....	772
133. Verschiedene weitere Anwendungen der Vektoranalysis.....	780
134. Einige Anwendungen der Integralsätze von <i>Gauß</i> und <i>Stokes</i> .....	785
135. Das Newtonsche Gravitationspotential .....	788
136. Die Newtonschen Potentiale der einfach belegten Kugel­fläche, der Hohlkugel und der Vollkugel .....	794
137. Die Poissonsche Gleichung des Körperpotentials.....	802