

# INHALTSVERZEICHNIS

|               |      |
|---------------|------|
| Vorwort ..... | XIII |
|---------------|------|

## VIERTER ABSCHNITT

### Grundzüge der linearen Algebra

#### A. Vektorrechnung des dreidimensionalen Raumes

|  |     |
|--|-----|
| 1. Vektoren und Parallelkoordinaten des dreidimensionalen Raumes. Linearer Raum.....                                   | 3   |
| 2. Lineare Vektorräume $\mathfrak{R}^k$ der Dimensionen $k = 1, 2, 3$ .....  | 11  |
| 3. Das Außenprodukt $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ dreier Vektoren des $R^3$ .....                                   | 16  |
| 4. Berechnung des Außenprodukts $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ als Determinante dritter Ordnung $A =  a_{ik} $ ..... | 22  |
| 5. Determinantenregeln.....  | 27  |
| 6. Das Außenprodukt dreier Vektoren als Spatvolumen .....  | 29  |
| 7. Zerlegung eines Vektors in Komponenten. Cramersche Regel .....  | 36  |
| 8. Das Innenprodukt $(p, q)$ zweier Vektoren des euklidischen Raumes $R^3$ . Räumliche Metrik (Längen und Winkel)..... | 40  |
| 9. Allgemeine (affine) Gestalt des Innenprodukts zweier Vektoren des reellen euklidischen $R^3$ .....                  | 51  |
| 10. Definition und Eigenschaften von metrischen Räumen nach <i>M. Fréchet</i> .....                                    | 58  |
| 11. Lineare normierte Räume.....   | 64  |
| 12. Analytische Geometrie der Ebenen des euklidischen Raumes $R^3$ .....   | 66  |
| 13. Orientierte Ebenen des euklidischen $R^3$ . Ihre Hessesche Gleichung .....   | 73  |
| 14. Außenprodukt von zwei Vektoren des $R^3$ . Bivektoren .....  | 82  |
| 15. Vektorprodukt (vektorielles Produkt) von zwei Vektoren des euklidischen $R^3$ .....                                | 89  |
| 16. Produkte von drei Vektoren (Tripelprodukte) .....  | 93  |
| 17. Produkte von vier Vektoren (Quadrupelprodukte).....  | 97  |
| 18. Multiplikation zweier Spatprodukte. Gramsche Determinante.....   | 103 |
| 19. Sphärische Dreiecke und Kugelgeometrie .....   | 107 |
| 20. Polare Kugeldreiecke. Sphärische Trigonometrie .....   | 111 |
| 21. Anwendungen auf die Analytische Geometrie des Raumes $R^3$ .....   | 120 |
| 22. Anwendungen auf Mechanik.....  | 127 |

|  |     |
|--|-----|
| 23. Anwendung der Vektorrechnung auf die Drehbewegung des $R^3$ .<br>Drehvektor von <i>Euler</i> ..... | 134 |
| 24. Quaternionen von <i>Hamilton</i> .....   | 138 |
| 25. Darstellung der Drehungen des $R^3$ durch Hamiltonsche<br>Quaternionen .....                       | 144 |
| <b>B. Vektorrechnung des <math>n</math>-dimensionalen Raumes</b>                                       |     |
| 26. Der $n$ -dimensionale affine Raum $R^n$ .....  | 149 |
| 27. Das Außenprodukt von $n$ Vektoren des $R^n$ und die<br>Determinante $n$ . Ordnung .....            | 155 |
| 28. Entwicklung der Determinanten nach <i>P.S. Laplace</i> .....                                       | 158 |
| 29. Beispiele (Determinanten, Zerlegungssatz von <i>Laplace</i> ) .....                                | 163 |
| 30. Cramersche Regel. Lineare Unabhängigkeit von $n$ Vektoren des $R^n$                                | 171 |
| 31. Volumen (Rauminhalt) eines $n$ -dimensionalen Spates $S_n$ .....                                   | 178 |
| <b>C. Lineare Gleichungssysteme</b>  |     |
| 32. Homogene lineare Gleichungssysteme .....   | 182 |
| 33. Einige Beispiele und Anwendungen zur Theorie der Systeme<br>homogener linearer Gleichungen .....   | 192 |
| 34. Inhomogene lineare Gleichungssysteme .....   | 200 |
| 35. Einige Beispiele und Anwendungen linearer inhomogener<br>Gleichungssysteme .....                   | 205 |
| 36. Das Verfahren von <i>Gauß</i> zur Lösung linearer homogener<br>Gleichungssysteme .....             | 210 |
| <b>D. Matrizenrechnung</b>   |     |
| 37. Multiplikation von Determinanten gleicher Ordnung .....  | 218 |
| 38. Das Rechnen mit Matrizen .....   | 222 |
| 39. Anwendung auf lineare Gleichungssysteme. Inverse Matrix .....                                      | 233 |
| 40. Der verkettete Gaußsche Algorithmus .....  | 240 |
| <b>E. Lineare Transformationen</b>   |     |
| 41. Orthogonale lineare Transformationen .....   | 245 |
| 42. Eulersche Winkel .....   | 251 |
| 43. Homogene affine Transformationen des $R^n$ .....   | 257 |
| 44. Die geometrischen Eigenschaften der reellen affinen Abbildungen ..                                 | 264 |
| 45. Eigenvektoren und Normalformen von linearen homogenen<br>Transformationen. Beispiele .....         | 268 |
| 46. Kongruente Transformationen (Bewegungen und Umlegungen<br>des euklidischen $R^n$ ) .....           | 276 |
| 47. Die Drehungen der euklidischen Räume $R^2$ , $R^3$ und $R^4$<br>um den Nullpunkt $O$ .....         | 280 |

**F. Quadratische Formen. Quadriken**

|  |     |
|--|-----|
| 48. Quadratische Formen .....  | 286 |
| 49. Hauptachsentransformation der quadratischen Formen .....   | 291 |
| 50. Quadriken (Flächen 2. Ordnung) des euklidischen $R^3$ .<br>Ihre Invarianten bei Bewegungen des $R^3$ ..... | 296 |
| 51. Quadriken mit Mittelpunkt .....  | 301 |
| 52. Paraboloidoide als Quadriken ohne Mittelpunkt .....  | 310 |
| 53. Quadratische Zylinder und Ebenenpaare als singuläre<br>Quadriken $Q(x, x)$ .....                           | 316 |
| 54. Einige Beispiele .....   | 325 |

**FÜNFTER ABSCHNITT****Differentialrechnung mehrerer Veränderlicher****G. Mengen. Verbände. Metrische Räume. Fixpunktsatz von Banach**

|  |     |
|--|-----|
| 55. Punktmengen $\mathfrak{M}$ des $n$ -dimensionalen Raumes $R^n$ .....   | 333 |
| 56. Mengenalgebra. Verbände. Algebraische Strukturen .....   | 336 |
| 57. Der Boolesche Verband der klassischen Aussagenlogik .....  | 340 |
| 58. Offene und abgeschlossene Mengen eines metrischen Raumes.<br>Innere Punkte, Berührungspunkte und Randpunkte einer Menge .. | 346 |
| 59. Häufungspunkte und Grenzpunkte einer Menge $\mathfrak{M}$ .<br>Der Satz von <i>Bolzano-Weierstraß</i> .....                | 553 |
| 60. Cauchyfolgen. Vollständige metrische Räume.<br>Fixpunktsatz von <i>Banach</i> .....  | 358 |
| 61. Kompakte Punktmengen $\mathfrak{M}$ in metrischen Räumen $R$<br>(insbesondere in euklidischen Räumen $R^n$ ) .....         | 364 |

**H. Funktionen mehrerer Veränderlicher. Nomographie**

|   |     |
|---|-----|
| 62. Funktionen von mehreren Veränderlichen .....                                  | 369 |
| 63. Flächen zweiter Ordnung (Quadriken) .....                                     | 376 |
| 64. Drehflächen, Schraubflächen, Konoide .....                                    | 383 |
| 65. Nomographie, Netztafeln .....   | 390 |
| 66. Fluchttafeln .....  | 395 |
| 67. Fluchttafeln mit krummen Leitern .....  | 405 |
| 68. Fluchttafeln für Gleichungen mit vier, fünf und<br>sechs Veränderlichen ..... | 412 |

**I. Stetigkeit der Funktionen von mehreren Veränderlichen**

|  |     |
|--|-----|
| 69. Die Funktionen von zwei Veränderlichen ..... | 421 |
|--|-----|

|  |     |
|--|-----|
| 70. Stetigkeit der Funktionen von zwei und mehr Veränderlichen . . . . .                   | 424 |
| 71. Einige Grundeigenschaften der stetigen Funktionen mehrerer<br>Veränderlichen . . . . . | 428 |
| 72. Weitere Eigenschaften stetiger Funktionen von mehreren<br>Veränderlichen . . . . .     | 430 |
| 73. Einige Beispiele von stetigen Abbildungen. . . . .                                     | 434 |

## J. Differentialrechnung in $n$ Veränderlichen

|  |     |
|--|-----|
| 74. Partielle Ableitungen. . . . .   | 439 |
| 75. Vollständige Differenzierbarkeit und vollständige<br>Differenziale . . . . .                                   | 442 |
| 76. Ableitung der mittelbaren Funktionen . . . . .   | 450 |
| 77. Satz von <i>Euler</i> über homogene Funktionen. . . . .  | 455 |
| 78. Richtungsableitung und Gradient einer skalaren Ortsfunktion.<br>Berührungsebenen . . . . .                     | 457 |
| 79. Einige Anwendungen und Beispiele . . . . .   | 464 |
| 80. Weitere Beispiele und Anwendungen . . . . .  | 468 |
| 81. Partielle Ableitungen höherer Ordnung.<br>Der Satz von <i>H. A. Schwarz</i> . . . . .                          | 473 |
| 82. Differenziale höherer Ordnung. . . . .   | 480 |
| 83. Der Mittelwertsatz für Funktionen von mehreren Veränderlichen. .   | 484 |
| 84. Die Taylorsche Formel . . . . .  | 486 |
| 85. Singuläre Punkte von ebenen Kurven. . . . .  | 493 |
| 86. Das Newtonsche Näherungsverfahren zur Lösung von<br>Gleichungen . . . . .                                      | 500 |
| 87. Das Iterationsverfahren zur Lösung von Gleichungssystemen<br>von $n$ Gleichungen mit $n$ Unbekannten . . . . . | 502 |
| 88. Das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz. . . . .   | 508 |

## K. Theorie der Extrema bei Funktionen von $n$ Veränderlichen

|   |     |
|---|-----|
| 89. Relative oder lokale Extrema (Maxima und Minima)<br>der Funktion $z = z(x, y)$ . . . . .                                  | 512 |
| 90. Anwendungen und Beispiele. . . . .  | 518 |
| 91. Lokale (relative) Extrema einer Funktion $f = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$<br>von $n$ Veränderlichen. . . . . | 527 |
| 92. Extrema mit Nebenbedingungen . . . . .  | 532 |
| 93. Weitere Extrema mit Nebenbedingungen . . . . .  | 541 |
| 94. Verschiedene Beispiele. . . . .   | 547 |

## L. Fouriersche Reihen

|  |     |
|--|-----|
| 95. Die Approximation einer Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$<br>durch eine Funktion $\phi(x)$ einfacherer Gestalt . . . . . | 552 |
| 96. Fouriersche Reihe einer $2\pi$ -periodischen Funktion $f(x)$ . . . . .   | 560 |

|   |     |
|---|-----|
| 97. Beispiele von Fourierreihen .....   | 565 |
| <b>M. Implizite Funktionen</b>  |     |
| 98. Der Hauptsatz über implizite Funktionen .....   | 573 |
| 99. Allgemeine Form des Hauptsatzes über implizite Funktionen<br>bei mehreren Veränderlichen .....  | 577 |
| <b>N. Koordinatentransformation. Abbildungen</b>  |     |
| 100. Der Übergang zu neuen Koordinaten. ....  | 587 |
| 101. Ebene Abbildungen (Transformationen der Ebene) .....   | 596 |
| 102. Inversion (Spiegelung) am Kreis .....  | 602 |
| 103. Die allgemeine gleichsinnige Kreisverwandtschaft .....   | 608 |
| 104. Stetigkeit und Differenzierbarkeit einer Funktion $f(z)$<br>einer komplexen Veränderlichen $z$ . Cauchy-Riemannsche<br>Differentialgleichungen. Konforme Abbildungen ..... | 613 |
| <b>O. Kurvenintegrale. Vektoranalysis</b>   |     |
| 105. Kurvenintegrale .....  | 622 |
| 106. Der Hauptsatz über Kurvenintegrale .....   | 628 |
| 107. Stationäre ebene Strömungen. ....  | 638 |
| 108. Verhalten eines Teilchens im Strömungsfeld.<br>Divergenz eines Vektorfeldes .....  | 643 |
| 109. Rotor und Divergenz als Wirbeldichte und Queldichte .....  | 647 |
| 110. Stromfunktion und Potentialfunktion. Quell- und<br>wirbelfreie Strömungen .....  | 652 |
| 111. Räumliche Vektoranalysis. ....   | 655 |
| 112. Operatoren zweiter Ordnung der Vektoranalysis. ....  | 663 |
| 113. Produktformeln der Vektoranalysis. ....  | 668 |

## SECHSTER ABSCHNITT

### Integralrechnung mehrerer Veränderlicher

|  |     |
|--|-----|
| <b>P. Doppelintegrale und mehrfache Integrale. Integralsätze<br/>von Gauß und Stokes</b>                         |     |
| 114. Doppelintegrale über Rechtecksbereichen .....   | 677 |
| 115. Berechnung des Doppelintegrals. Zerlegung der doppelten<br>Integration in zwei einfache Integrationen ..... | 680 |
| 116. Doppelintegrale mit beliebigen (normalen) Integrations-<br>bereichen .....                                  | 686 |

|   |     |
|---|-----|
| 117. Berechnung des Doppelintegrals für Normalbereiche durch Zerlegung der doppelten Integration in zwei einfache Integrationen ..... | 690 |
| 118. Inhalt der Oberfläche eines krummen Flächenstücks $z = f(x, y)$ ...  | 698 |
| 119. Mittelwertsatz für Doppelintegrale. Gebietsdifferentiation und Dichten .....   | 701 |
| 120. Der Gaußsche Integralsatz in der Ebene .....   | 703 |
| 121. Einführung neuer Veränderlicher in ein Doppelintegral.....   | 710 |
| 122. Einige Anwendungen und Beispiele.....  | 715 |
| 123. Gaußsche Darstellung einer Fläche. Flächenmetrik .....   | 723 |
| 124. Einige Beispiele.....  | 728 |
| 125. Der Begriff des dreifachen Integrals .....   | 736 |
| 126. Die praktische Berechnung der dreifachen Integrale über Normalbereiche $\mathfrak{R}$ .....                                      | 737 |
| 127. Die Einführung neuer Veränderlicher.....   | 743 |
| 128. Mehrfache ( $n$ -fache) Integrale mit $n > 3$ .....  | 750 |
| 129. Einige Anwendungen auf mechanische Fragen .....  | 754 |
| 130. Der Gaußsche Integralsatz im Raum .....  | 760 |
| 131. Der Integralsatz von <i>Stokes</i> im Raum .....   | 768 |
| 132. Einige Anwendungen der Integralformeln .....   | 772 |
| 133. Verschiedene weitere Anwendungen der Vektoranalysis.....   | 780 |
| 134. Einige Anwendungen der Integralsätze von <i>Gauß</i> und <i>Stokes</i> .....   | 785 |
| 135. Das Newtonsche Gravitationspotential .....   | 788 |
| 136. Die Newtonschen Potentiale der einfach belegten Kugel­fläche, der Hohlkugel und der Vollkugel .....                              | 794 |
| 137. Die Poissonsche Gleichung des Körperpotentials.....  | 802 |