INHALTSVERZEICHNIS

B. A. Rosenfeld

Axiome und Grundbegriffe der Geometrie

§ 1. Das Entstehen grundlegender Begriffe der Geometrie

1.1. Die Begriffe der Geometrie als Resultate von Abstraktionen 3
1.2. Die Entstehung der Geometrie in der alten Welt 4

§ 2. Die „Elemente" des EUKLID

2.1. EUKLID und seine Vorgänger 5
2.2. Die „Postulate" EUKLIDS 8
2.3. Der Begriff der Stetigkeit bei EUKLID und seinen Vorgängern 9
2.4. Bewegungen 10

§ 3. Die Herausbildung der axiomatischen Methode

3.1. Die Entstehung der nichteuklidischen Geometrie 11
3.2. Die axiomatische Methode in der Mathematik 12

§ 4. Modelle

4.1. Modelle der euklidischen Ebene 15
4.2. Axiomatische Systeme in der Algebra 20

§ 5. Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit eines Axiomensystems

5.1. Die Widerspruchsfreiheit eines Axiomensystems 21
5.2. Die Vollständigkeit eines Axiomensystems 23

§ 6. Die Axiomatik der Geometrie

6.1. Die Grundbegriffe der euklidischen Geometrie 25
6.2. Die Inzidenzaxiome 26
6.3. Die Axiome der Anordnung 27
6.4. Axiome der Bewegung 30
6.5. Die Stetigkeitsaxiome 30
6.6. Das Parallelenaxiom 33

§ 7. Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit der Axiome der euklidischen Geometrie

7.1. Die Einführung von Koordinaten 34
7.2. Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit der Axiome der euklidischen Ebene 37

§ 8. Die Unabhängigkeit der Axiome

8.1. Die Unabhängigkeit eines Axiomensystems 38
8.2. Über die Unabhängigkeit der Axiome der euklidischen Geometrie 39
8.3. Abschließende Bemerkungen 40

Literatur 42

I. M. Jaglom und L. S. Atanasjan

Geometrische Transformationen

§ 1. Der Begriff der Transformation. Beispiele

1.1. Geometrische Abbildungen 45
1.2. Geometrische Transformationen 47
1.3. Einige Typen geometrischer Transformationen 54

§ 2. Die Anwendung von Transformationen bei der Lösung geometrischer Aufgaben

2.1. Einige Beispiele 57
2.2. Anwendung der Spiegelung 60
2.3. Die Anwendung geometrischer Transformationen auf die „Symmetrisierung" von Figuren 63

§ 3. Die analytische Beschreibung geometrischer Transformationen

3.1. Die Beschreibung geometrischer Transformationen durch Koordinaten 66
3.2. Analytische Methoden zum Studium von Transformationen 68
3.3. Lineare Transformationen 70
3.4. Komplexe Koordinaten der Punkte der geschlossenen Ebene 72
3.5. Birationale Transformationen 73

§ 4. Das Produkt von Abbildungen und Transformationen

4.1. Die Definition des Produktes von Abbildungen. Beispiele 74
4.2. Einige allgemeine Eigenschaften des Produktes von Transformationen 79
4.3. Produkte von Bewegungen. Klassifizierung der Bewegungen 80
4.4. Anwendungen 83
4.5. Weitere Beispiele für Produkte von Transformationen 86

§ 5. Die inverse Transformation

5.1. Die Definition der inversen Transformation 90
5.2. Die Involutionen 91

§ 6. Der allgemeine Begriff der Geometrie. Gruppen von geometrischen Transformationen

6.1. Der Gegenstand der Geometrie 92
6.2. Geometrie und Transformationsgruppen 95
6.3. Verschiedene Geometrien. Die affine Geometrie 97
6.4. Transformationsgruppen in der Physik 102

§ 7. Die Gruppe der projektiven Transformationen

7.1. Die Homologie 104
7.2. Die projektive Ebene 107
7.3. Die Anwendung von Homologien bei der Lösung von Aufgaben 109
7.4. Projektive Transformationen und projektive Geometrie 111
7.5. Koordinaten in der projektiven Ebene 112
7.6. Birationale Transformationen der projektiven Ebene 113

§ 8. Allgemeinere Arten von geometrischen Abbildungen
8.1. Beispiele für allgemeinere geometrische Abbildungen 115
8.2. Allgemeine Transformationen in der Kreisgeometrie 117
8.3. Polaritäten. Das Dualitätsprinzip in der projektiven Geometrie 122
8.4. Die Fußpunkttransformation 127
8.5. Gruppen von allgemeinen Transformationen 130

§ 9. Das Übertragungsprinzip
9.1. Einführung 133
9.2. Das Übertragungsprinzip der Kontraktionen in bezug auf eine Gerade 134
9.3. Das Übertragungsprinzip der Inversion 137
9.4. Das Übertragungsprinzip der Polarität 140
9.5. Das Übertragungsprinzip und Modelle für geometrische Systeme 149

Literatur 151

N. M. Beskin, W. G. Boltjanski, G. G. Maslowa, N. F. Tschetweruchin, I. M. Jaglom

Allgemeine Prinzipien geometrischer Konstruktionen

§ 1. Einige Fragen der praktischen Verwendung geometrischer Konstruktionen
1.1. Einleitung 155
1.2. Instrumente für die praktische Durchführung von geometrischen Konstruktionen 155
1.3. Die Genauigkeit einer Konstruktion 159

§ 2. Über die Lösung von Konstruktionsaufgaben in Abhängigkeit von gebräuchlichen Instrumenten
2.1. Konstruktion mit Lineal, Zirkel, Zeichendreieck und Winkelmesser 162
2.2. Konstruktionen allein mit Hilfe des Zirkels (Konstruktionen von Mohr-Mascheroni) 164
2.3. Konstruktionen allein mit Hilfe des Lineals (Konstruktionen von Poncelet-Steiner) 167
2.4. Über Konstruktionen mit Hilfe anderer Instrumente 171

§ 3. Über Konstruktionen in einem beschränkten Teil der Ebene
3.1. Konstruktionen mit Hilfe eines Lineals beschränkter Länge 173
3.2. Konstruktionen in einem beschränkten Teil der Ebene 175

§ 4. Einige allgemeine Methoden zur Lösung von Konstruktionsaufgaben in der Ebene
4.1. Die Aufspaltung der Bedingungen einer Aufgabe (die Methode der „geometrischen Örter") 178
4.2. Ein allgemeines Lösungsschema für Konstruktionsaufgaben 180
4.3. Die algebraische Methode 181

§ 5. Die Anwendung von geometrischen Transformationen bei der Lösung von Konstruktionsaufgaben in der Ebene
5.1. Allgemeine Bemerkungen 185
5.2. Beispiele 186

§ 6. Näherungsmethoden für geometrische Konstruktionen und ihre Anwendung in der Praxis
6.1. Exakte und angenäherte Lösungen von Konstruktionsaufgaben 189
6.2. Die Rektifizierung eines Kreisbogens 190
6.3. Die graphisch-analytische Methode und die Methode der sukzessiven Approximationen 193

§ 7. Geometrische Konstruktionen im Raum
7.1. Das System der Postulate für Konstruktionen in der Ebene 196
7.2. Ein Postulatensystem für „imaginäre Konstruktionen" im Raum 198
7.3. Ein Beispiel 199
7.4. Abschließende Bemerkung 199

Literatur 201

J. I. Manin

Über die Lösbarkeit von Konstruktionsaufgaben mit Zirkel und Lineal

Einleitung 205

§ 1. Der geometrische Teil der Theorie
1.1. Problemstellung 206
1.2. Konstruktionen mit Zirkel und Lineal 208

§ 2. Die Übertragung der Aufgabe in die Sprache der Algebra
2.1. Ein grundlegendes Lemma 210
2.2. Folgerungen 215
2.3. Algebraische Betrachtungen 216
2.4. Der Fall der Polynome dritten Grades 217
2.5. Der Satz von Gauss 219

§ 3. Klassische Probleme
3.1. Die Verdoppelung eines Würfels 220
3.2. Die Dreiteilung eines Winkels 221
3.3. Die Konstruktion eines Dreiecks aus seinen Winkelhalbierenden 224
3.4. Die Konstruktion von regelmäßigen Vielecken 225
3.5. Die Quadratur des Kreises 226

Literatur 228

N. M. Beskin

Abbildungsverfahren

§ 1. Aufgabenstellung
1.1. Abbildungen des Raumes auf die Ebene 231
1.2. Die Zyklographie 231

1.3. Das Verfahren von Fedorow 232
1.4. Grundforderungen an ein Abbildungsverfahren 233
1.5. Nichteindeutigkeit der inversen Abbildung 234
1.6. Projektive Abbildungsverfahren 235

§ 2. Parallelprojektionen
2.1. Die Eigenschaften der Parallelprojektion 236
2.2. Das Verfahren der Eintafel-Parallelprojektion 238
2.3. Gebundene und freie Bilder 240
2.4. Die Abbildung ebener Figuren 242
2.5. Beispiele 246

§ 3. Schiefe Axonometrie
3.1. Der Satz von Pohlke und Schwarz 250
3.2. Vollständige und unvollständige Bilder 254
3.3. Der Begriff der schiefen Axonometrie 258
3.4. Bedingte Bilder 261
3.5. Beispiele für die Konstruktion axonometrischer Bilder 261
3.6. Allgemeine Konstruktionsmethoden axonometrischer Bilder 264
3.7. Die Axonometrisierung einer Zeichnung 270
3.8. Orthogonale (rechtwinklige) Axonometrie 274

§ 4. Das Verfahren von Monge
4.1. Kombinierte Bilder 279
4.2. Das Wesen des Verfahrens von Monge 279

§ 5. Zentralprojektionen
5.1. Die Eigenschaften der Zentralprojektion 280
5.2. Projektive Koordinaten 283
5.3. Die Verwendung projektiver Koordinaten bei der Konstruktion von Bildern 284
5.4. Der Begriff der zentralen Axonometrie 287

§ 6. Die Konstruktion von Zeichnungen
6.1. Die Konstruktion von Projektionszeichnungen 291
6.2. Beispiele 291

Literatur 294

W. G. Boltjanski und I. M. Jaglom

Vektoren und ihre Anwendungen in der Geometrie

§ 1. Definition des Vektors
1.1. Die Parallelverschiebung 297
1.2. Der Vektor 298
1.3. Antragen eines Vektors an einen Punkt 300
1.4. Vektoren und gerichtete Strecken 301

§ 2. Addition von Vektoren und Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl
2.1. Addition von Vektoren 303
2.2. Entgegengesetzte Vektoren. Der Nullvektor 306
2.3. Eigenschaften der Summe von Vektoren 306
2.4. Subtraktion von Vektoren 309
2.5. Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl 311
2.6. Eigenschaften des Produktes von Vektor und Zahl 313
2.7. „Arithmetik der Figuren“ 314
2.8. Das Teilen einer Strecke im gegebenen Verhältnis 316
2.9. Die Koordinaten eines Vektors 318
2.10. Lineare Abhängigkeit von Vektoren 320
2.11. Beispiele 321

§ 3. Das Skalarprodukt von Vektoren
3.1. Die Projektion eines Vektors auf eine Achse 326
3.2. Eigenschaften der Projektion 327
3.3. Der Zusammenhang zwischen der Projektion und den Koordinaten 328
3.4. Der Zusammenhang mit trigonometrischen Funktionen 329
3.5. Beispiele 331
3.6. Definition und Eigenschaften des Skalarproduktes 335
3.7. Beispiele und Aufgaben 337
3.8. Die Eindeutigkeit des Skalarproduktes 343

§ 4. Das Schiefprodukt von Vektoren der Ebene
4.1. Orientierte Flächeninhalte und das Schiefprodukt von Vektoren 345
4.2. Die Analogie zwischen Schief- und Skalarprodukt 350
4.3. Weitere Eigenschaften des Schiefproduktes 351
4.4. Beispiele und Aufgaben 353
4.5. Über die Eindeutigkeit des Schiefproduktes 357

§ 5. Das Spatprodukt und das Vektorprodukt von Vektoren im Raum
5.1. Orientierte Rauminhalte und das Spatprodukt 359
5.2. Das Vektorprodukt und sein Zusammenhang mit dem Spatprodukt 360
5.3. Die Eigenschaften des Vektorproduktes und des Spatproduktes 363
5.4. Das zweifache Vektorprodukt 368
5.5. Beispiele 369
5.6. Über die Eindeutigkeit des Spat- und des Vektorproduktes 372

§ 6. Anwendung der Vektorrechnung auf die sphärische Geometrie und Trigonometrie
6.1. Untersuchung sphärischer Dreiecke mit Hilfe von Vektoren 374
6.2. Der sphärische Kosinus- und Sinussatz 376

§ 7. Der Begriff des Vektorraumes
7.1. Axiomatische Definition des Vektorraumes 377
7.2. Das arithmetische Modell des Vektorraumes 378
7.3. Die Vollständigkeit des Axiomensystems 380
7.4. Ein Axiomensystem der Elementargeometrie 384
7.5. Einige Typen mehrdimensionaler Räume 385

Literatur 390

W. G. Aschkinuse

Vielecke und Vielflache

§ 1. Die grundlegenden Definitionen. Der EULERsche Satz
1.1. Ebene Vielecke 393
1.2. Vielflache 394
1.3. Der EULERsche Satz 396
1.4. Die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen eines Vielflachs vom Geschlecht größer als Null 401
1.5. Ein anderer Beweis des EULERschen Satzes 404

§ 2. Der kombinatorische (topologische) Typ eines Vielflachs. Der Satz von STEINITZ
2.1. Kombinatorische Eigenschaften der Vielflache. Isomorphie 409
2.2. Das abstrakte Vielflach 411
2.3. Der Satz von STEINITZ 413
2.4. Dualität 417

§ 3. Das Netz eines Vielflachs. Der Satz von CAUCHY
3.1. Das Netz eines Vielflachs. Die Existenz eines Vielflachs mit gegebenem Netz 420
3.2. Der Satz von CAUCHY. Grundlegende Hilfssätze 422
3.3. Der Beweis des CAUCHYschen Satzes 426
3.4. Einige Verallgemeinerungen für gekrümmte Flächen 428

§ 4. Regelmäßige Vielecke und Vielflache und ihre Verallgemeinerungen
4.1. Topologisch regelmäßige Vielflache 430
4.2. Regelmäßige Vielecke und Vielflache 433
4.3. Eckengleiche halbregelmäßige Vielflache 438
4.4. Flächengleiche halbregelmäßige Vielflache 447
4.5. Regelmäßige Vielecke und Vielflache mit Selbstüberschneidungen 450

Literatur 456

I. M. Jaglom

Geometrie der Kreise

Einleitung 459

A. Der Kreis als Punktmenge

§ 1. Verallgemeinerung des Kreisbegriffs
1.1. Die orientierte Strecken- und Winkelmessung 459
1.2. Verschiedene Definitionen des Kreises. Das Berühren von Kreisen 461

§ 2. Potenzlinie und Potenzpunkt
2.1. Die Potenz eines Punktes in bezug auf einen Kreis 464

2.2. Die Potenzlinie zweier Kreise 465
2.3. Der Potenzpunkt dreier Kreise 468

§ 3. Kreisbüschel und Kreisbündel
3.1. Kreisbüschel 471
3.2. Kreisbündel 476

§ 4. Die Inversion
4.1. Definition der Inversion 477
4.2. Eigenschaften der Inversion 480
4.3. Der Satz von PASCAL 484

§ 5. Punktgeometrie der Kreise
5.1. Die Kreisebene 485
5.2. Die Kreistransformationen 487
5.3. Der Begriff der Kreisgeometrie 487

B. Der Kreis als Menge von Geraden

§ 6. Gerichtete Kreise
6.1. Die Analogie zwischen den Eigenschaften der Punkte und der Geraden 488
6.2. Eine neue Ausweitung des Kreisbegriffs 489
6.3. Die Tangentenentfernung zweier Kreise 493

§ 7. Ähnlichkeitspunkt und Ähnlichkeitsachse
7.1. Die Potenz einer Geraden in bezug auf einen Kreis 494
7.2. Der Ähnlichkeitspunkt zweier Kreise 497
7.3. Die Ähnlichkeitsachse dreier Kreise 499

§ 8. Kreisreihen und Kreisnetze
8.1. Kreisreihen 500
8.2. Kreisnetze 502

§ 9. Die Speerinversion
9.1. Definition der Speerinversion 504
9.2. Die entartete Inversion und die spezielle Inversion 505
9.3. Eigenschaften der Speerinversion 508
9.4. Der Satz von BRIANCHON 512

§ 10. Speergeometrie der Kreise
10.1. Speer-Kreistransformationen 513
10.2. Der Begriff der Speer-Kreisgeometrie 517

C. Der Kreis als Menge von Linienelementen

§ 11. Der Kreis unter einem neuen Gesichtspunkt
11.1. Die Ebene als Menge von Linienelementen 517
11.2. Eine neue Definition des Kreises 519

§ 12. Berührungsgeometrie der Kreise
12.1. Berührungs-Kreistransformationen 520

12.2. Die Berührungsaufgabe von Apollonios 522
12.3. Der Begriff der Berührungsgeometrie der Kreise 524

Literatur 526

B. A. Rosenfeld

Die Grundbegriffe der sphärischen Geometrie und Trigonometrie

§ 1. Die Grundbegriffe der sphärischen Geometrie
1.1. Die Entstehung der sphärischen Geometrie 529
1.2. Punkte, Großkreise und Kleinkreise 530
1.3. Die Bewegungen einer Sphäre 532
1.4. Der Gegenstand der sphärischen Geometrie 534
1.5. Das Dualitätsprinzip 536
1.6. Winkel auf der Sphäre 537

§ 2. Sphärische Dreiecke
2.1. Dreiecke und Zweiecke auf der Sphäre 539
2.2. Polardreiecke 540
2.3. Die Kongruenz sphärischer Dreiecke 542
2.4. Der Großkreis als Kürzeste 544
2.5. Der Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks 546

§ 3. Kleinkreise
3.1. Kreise und Winkel auf der Sphäre 549
3.2. Die geodätische Krümmung eines Kleinkreises 551
3.3. Die Gauss-Bonnetsche Formel 553

§ 4. Trigonometrische Beziehungen im sphärischen Dreieck
4.1. Der Seitenkosinussatz 555
4.2. Der Sinussatz 558
4.3. Die Fünf-Elemente-Formeln 559
4.4. Der Winkelkosinussatz 561
4.5. Die Kotangensformeln 562
4.6. Das rechtwinklige sphärische Dreieck 563
4.7. Die Berechnung sphärischer Dreiecke 565

Literatur 569

S. A. Skopez

Kegelschnitte

§ 1. Verschiedene Definitionen der Kegelschnitte
1.1. Kegelschnitte als Schnitte eines geraden Kreiskegels 573
1.2. Die Leitlinieneigenschaft der Kegelschnitte 575
1.3. Die Brennpunkteigenschaften der Ellipsen und Hyperbeln 578

1.4. Kegelschnitte und das Problem des APOLLONIOS 580
1.5. Die analytische Definition der Kegelschnitte 583

§ 2. Die Ellipse
2.1. Die Form der Ellipse 584
2.2. Lagebeziehungen von Ellipse und Gerade. Tangenten an die Ellipse 588
2.3. Eigenschaften der Brennpunkte der Ellipse 590
2.4. Mit der Ellipse verbundene Kreise. Zwei Sätze von PONCELET 592
2.5. Die Ellipse als Bild des Kreises bei einer Stauchung 595

§ 3. Die Hyperbel
3.1. Die Form der Hyperbel 603
3.2. Eigenschaften der Brennpunkte der Hyperbel 606
3.3. Die Gleichung der Hyperbel 607
3.4. Lagebeziehungen von Hyperbel und Gerade. Tangenten an die Hyperbel 609
3.5. Eigenschaften der Asymptoten 612

§ 4. Die Parabel
4.1. Die Form der Parabel. Die Gleichung der Parabel 614
4.2. Lagebeziehungen von Parabel und Gerade. Tangenten an die Parabel 616

§ 5. Gemeinsame Eigenschaften der Kegelschnitte
5.1. Polargleichung der Kegelschnitte 620
5.2. Konfokale Kegelschnitte 622

Literatur 625

Namenverzeichnis 626

Sachverzeichnis 627