

# INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort .....	XI
---------------	----

## ERSTER ABSCHNITT: GRUNDLAGEN

### I. Zahlen und Zahlenrechnen

#### A. Reelle Zahlen, ungenaue Zahlen

1. Reelle Zahlen, Zahlgerade .....	3
2. Dekadisches Positionssystem. Dezimalbrüche .....	5
3. Dyadisches Zahlensystem .....	8
4. Intervallschachtelung. Stetigkeit der Zahlgeraden .....	11
5. Die Grundgesetze der Arithmetik .....	13
6. Absolute Beträge. Ungleichungen .....	20

#### B. Das Rechnen mit ungenauen Zahlen

7. Ungenaue Zahlen .....	24
8. Summe und Differenz ungenauer Zahlen .....	28
9. Produkt zweier ungenauer Zahlen .....	29
10. Quotient zweier ungenauer Zahlen .....	30
11. Abgekürzte Multiplikation .....	32
12. Abgekürzte Division .....	34
13. Quadratwurzel aus einer ungenauen Zahl .....	36
14. Iterationsverfahren zur Berechnung der Quadratwurzel .....	37
15. Das Verfahren der Wurzelziehung von L. COLLATZ .....	39
16. Das Rechnen mit sehr kleinen Größen .....	41
17. Einige Beispiele zum Rechnen mit sehr kleinen Größen .....	44
18. Rechenmaschinen .....	46

#### C. Elementare Fehlerrechnung

19. Mittlerer Fehler der Messungen einer Meßreihe .....	53
20. Ausgleichung einer Meßreihe nach GAUSSENS Methode der kleinen Quadrate ..	55
21. Bestimmung des mittleren Fehlers $m$ der Einzelmessungen einer Meßreihe ..	57
22. Das Additionstheorem der Mittelwerte und der mittleren Fehler. GAUSSSES Fehlerfortpflanzungsgesetz .....	60
23. Mittlerer Fehler des Bestwertes einer Meßreihe .....	64
24. Ausgleichung von Messungen ungleicher Genauigkeit .....	65

## D. Elementare Zahlentheorie

25. Teilbarkeit von ganzen Zahlen. EUKLIDischer Algorithmus (Kettendivision) ..	71
26. DIOPHANTische Gleichungen 1. Ordnung .....	73
27. Kettenbrüche .....	77
28. Anwendungen (Zeitrechnung, Saroszyklus, BALMERSche Serienformel) .....	81
29. Unendliche Kettenbrüche irrationaler Zahlen .....	85
30. Periodische Kettenbrüche .....	88
31. Zahlenkongruenzen .....	92
32. Anwendung auf Teilbarkeitsregeln und Rechenproben .....	95
33. Restklassen nach einem Primzahlmodul $p$ .....	99
34. Die multiplikative Gruppe der Restklassen nach einem Primzahlmodul. Gruppeneigenschaften .....	100
35. Der Satz von FERMAT .....	107
36. Der Satz von WILSON .....	110
37. Darstellung einer Primzahl der Form $p = 4n + 1$ als Summe zweier Quadrate	113
38. Zerspaltung großer Zahlen $m = 4n + 1$ in Primfaktoren .....	118
39. Elemente der Kombinatorik. Der binomische Satz .....	120
40. Permutationsgruppen .....	127
41. Decktransformationen der regulären (PLATONischen) Körper. Raumgruppen ..	131

## II. Elementare algebraische Funktionen

## E. Lineare und quadratische Funktion. Komplexe Zahlen

42. Funktionsbegriff. Schaubild einer Funktion .....	135
43. Die lineare Funktion $y = ax + b$ . Analytische Geometrie der geraden Linie ..	142
44. Die quadratische Funktion. Wertevorrat, Nullstellen, Zerspaltung in Linear- faktoren .....	147
45. Einführung der komplexen Zahlen .....	150
46. Quadratische Gleichungen. Fundamentalsatz der Algebra. Zerlegung reeller Polynome in lineare und quadratische Faktoren .....	155
47. Bogenmaß eines Winkels .....	162
48. GAUSSsche Darstellung der komplexen Zahlen durch die Punkte einer Ebene	164
49. Konstruktion von Summe, Differenz, Produkt und Quotient zweier komplexer Zahlen in der GAUSSschen Zahlenebene. MOIVRESche Formeln .....	166

## F. Geometrische Anwendungen

50. Die Darstellung der Ähnlichkeiten und Bewegungen der Ebene durch komplexe lineare Transformationen .....	179
51. Transformationsgruppen .....	183
52. Die Gruppe der GALILEISchen Transformationen .....	184
53. Bemerkung über die axiomatischen Begründungen der Geometrie. EUKLIDische Geometrie und Nicht-EUKLIDische Geometrien .....	185
54. FELIX KLEINS gruppentheoretische Auffassung der Geometrie .....	187
55. Ein Beispiel einer Geometrie im KLEINSchen Sinne. Geometrie der isotropen Ebene .....	189
56. Parabelkonstruktionen .....	194

## G. Ebene Vektorrechnung

57. Vektoren .....	198
58. Innenprodukt und Außenprodukt zweier Vektoren der Ebene .....	203

59. Anwendung auf die ebene Statik .....	208
60. Anwendungen der Vektorrechnung auf die ebene analytische Geometrie .....	211
61. Determinanten 2. Ordnung. CRAMERSche Regel .....	219

### H. Polynome und algebraische Gleichungen

62. Die ganzen Funktionen (Polynome) $n$ -ter Ordnung .....	222
63. Das HORNERSche Verfahren und seine Anwendungen .....	225
64. Die zeichnerische Durchführung des HORNERSchen Verfahrens .....	232
65. Die LILLSche Darstellung von Polynomen und ihrer Division. Die LILLSche Bestimmung der Wurzeln algebraischer Gleichungen .....	233
66. Die Bestimmung rationaler Nullstellen einer ganzzahligen algebraischen Gleichung .....	237
67. Geometrische Konstruktionen. Winkeldrittung .....	238
68. Lösung der allgemeinen kubischen Gleichung durch Winkeldrittung. CARDANOSche Formel .....	245
69. Die trigonometrische Lösung von kubischen Gleichungen .....	252
70. Lösung der biquadratischen Gleichung durch eine kubische Resolvente .....	254
71. Bemerkung zur allgemeinen Lösung der algebraischen Gleichungen 2., 3. und 4. Ordnung durch Wurzelausdrücke .....	260
72. Das GRAEFFESche Verfahren der quadrierten Wurzeln .....	266
73. Das GRAEFFESche Verfahren bei komplexen Wurzeln und bei Wurzeln mit gleichen absoluten Beträgen .....	271
74. Ausbau des GRAEFFESchen Verfahrens nach BRODETSKY und SMEAL .....	279
75. Satz von SCHUR über die HURWITZschen Gleichungen mit negativem Realteil der Wurzeln .....	283

### I. Interpolation

76. Die Interpolationsformel von LAGRANGE .....	293
77. Die NEWTONSche Interpolationsformel. Steigungen .....	294
78. Die zeichnerische Durchführung der Interpolation $n$ -ter Ordnung .....	301
79. Interpolation bei äquidistanten Argumenten .....	304
80. Prüfung und Berichtigung einer Funktionstafel mittels des Differenzenspiegels .....	307
81. Einige Anwendungen der NEWTONSchen Interpolationsformel .....	310
82. Die Interpolationsformeln von GAUSS und STIRLING .....	315
83. Die BESSELSche Interpolationsformel .....	321

### J. Rationale und algebraische Funktionen

84. Allgemeines über rationale Funktionen .....	324
85. Teilbruchzerlegung rationaler Funktionen .....	330
86. Allgemeines über algebraische Funktionen. Algebraische Kurven .....	336
87. Parameterdarstellung einer Funktion oder Kurve .....	343
88. Kegelschnitte. Elementare Definitionen und Eigenschaften .....	347
89. Die Kurven 2. Ordnung, ihre metrische Klassifikation und Hauptachsentransformation .....	361
90. Beispiele algebraischer Kurven 3. und 4. Ordnung .....	373
91. Schleifkurbelgetriebe .....	381
92. Kurbelgetriebe. WATTSche Kurven .....	383

### K. Affine und projektive Geometrie der Ebene

93. Metrische Eigenschaften ebener Kurven .....	390
94. Parallel- und Zentralprojektion als geometrische Verwandtschaften .....	391

95. Parallelprojektion und perspektive Affinität .....	393
96. Allgemeine ebene Affinitäten .....	397
97. Die affine Gruppe der Ebene .....	401
98. Besondere Affinitäten .....	402
99. Affine Geometrie der Ebene. Affine Einteilung der Kegelschnitte nach LAGRANGE .....	405
100. Affine Eigenschaften der Ellipse, Hyperbel und Parabel .....	410
101. Zentralprojektion. Perspektiv Kollineation .....	419
102. Projektive Transformationen (Kollineationen) der Ebene .....	427
103. Ebene projektive Geometrie .....	430
104. Projektive Invarianten. Doppelverhältnis. Fundamentalsatz der projektiven Geometrie .....	433
105. Charakteristisches Doppelverhältnis einer Projektivität der Geraden. Involutorische Projektivitäten (Involutionen) .....	439
106. Vollständiges Viereck und Vierseit .....	443
107. Dualitätsprinzip .....	444
108. Projektive Erzeugung der Kegelschnitte nach JACOB STEINER. Die Sätze von PASCAL und BRIANCHON .....	448
109. Das Polarsystem der Kurven 2. Ordnung .....	454

### III. Grenzwerte. Unendliche Reihen

#### L. Grenzwerte

110. Grenzwertbegriff und höhere Mathematik .....	465
111. Unendliche Zahlenfolgen .....	467
112. Häufungswerte .....	470
113. Untere und obere Grenze .....	473
114. Zahlenmengen .....	476
115. Punktmengen .....	478
116. Konvergente Zahlenfolgen. Grenzwert einer konvergenten Zahlenfolge .....	482
117. Konvergenz und Summenformel der unendlichen geometrischen Reihe .....	488
118. Das Rechnen mit Grenzwerten .....	492
119. Konvergenz beschränkter monotoner Folgen (Monotoniesatz) .....	493
120. Die Zahl $e$ .....	494
121. Eine weitere Definition der Zahl $e$ .....	497
122. Drittes Konvergenzkriterium (Satz von der Intervallschachtelung) .....	498
123. Das allgemeine CAUCHYSche Konvergenzkriterium .....	505

#### M. Unendliche Reihen

124. Konvergente unendliche Reihen .....	508
125. Summenproblem. Reihenrest .....	511
126. Summe und Differenz zweier konvergenter unendlicher Reihen .....	514
127. Konvergenzkriterien für unendliche Reihen .....	516
128. Alternierende Reihen .....	519
129. Reihen mit positiven Gliedern .....	521
130. ABELSche Summierung. Konvergenzsätze von ABEL und DIRICHLET .....	524
131. Absolute, unbedingte und bedingte Konvergenz von unendlichen Reihen .....	527
132. Multiplikation von absolut konvergenten Reihen .....	534
133. Großer Umordnungssatz (CAUCHYScher Doppelreihensatz) .....	538
134. Hinreichende Kriterien für absolute Konvergenz von Reihen .....	542
135. Die Kriterien von KUMMER und DINI, von RAABE und GAUSS .....	549

136. Potenzreihen .....	552
137. Das Rechnen mit Potenzreihen .....	556
138. Dreiecksungleichung. Folgen komplexer Zahlen .....	561
139. Häufungspunkte und Grenzwerte beschränkter Folgen komplexer Zahlen. Konvergenzkriterien .....	564
140. Unendliche Reihen mit komplexen Gliedern. Komplexe Potenzreihen .....	572

#### IV. Elementare transzendente Funktionen. Stetige Funktionen. Umkehrfunktionen

##### N. Exponentialfunktion, Kreisfunktionen und Hyperbelfunktionen

141. Definition der Exponentialfunktion für irrationale Exponenten .....	577
142. Zeichnerische Darstellung der Exponentialfunktion $y = a^x$ .....	579
143. Trigonometrische Funktionen oder Kreisfunktionen .....	582
144. Hyperbelfunktionen oder hyperbolische Funktionen .....	590
145. Anwendungen der Kreisfunktionen auf ebene Trigonometrie .....	595
146. Harmonische Sinusschwingungen .....	605
147. Überlagerung harmonischer Schwingungen verschiedener Frequenzen .....	609
148. Elliptische Schwingungen, LISSAJOUSsche Kurven .....	615
149. Radlinien auf gerader Bahn. Zykloiden .....	618
150. Radlinien auf kreisförmiger Bahn. Epizykloiden und Hypozykloiden .....	622
151. Kegelschnitte in Polarkoordinaten .....	630
152. Die Gruppe der LORENTZ-Transformationen. Das relativistische Additions- gesetz der Geschwindigkeiten .....	634
153. Die Relativität der Raum- und Zeitmessung .....	639
154. Potenzreihenentwicklung der natürlichen Exponentialfunktion .....	641
155. Exponentialfunktion für komplexe Argumente. Potenzreihen von $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ . EULERSche Formel. MOIVRESche Formel .....	645
156. Potenzreihe für $\mathcal{C}ofz$ und $\mathcal{C}in z$ . Zusammenhang der Kreis- und Hyperbelfunk- tionen .....	651

##### O. Stetige Funktionen

157. Grenzwert einer Funktion $y = f(x)$ an der Stelle $x_0$ . Konvergenzkriterien ..	654
158. Die Grenzwertformel $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .....	661
159. Das Rechnen mit Grenzwerten von Funktionen .....	664
160. Links- und rechtsseitiger Grenzwert. Uneigentliche Grenzwerte einer Funk- tion .....	668
161. Grenzwert der Funktion $y = f(x)$ für unbeschränkt wachsendes oder abneh- mendes $x$ .....	675
162. Stetigkeit und Unstetigkeit einer Funktion $y = f(x)$ .....	682
163. BOLZANOSches Stetigkeitskriterium. Eigenschaften und Beispiele stetiger Funktionen .....	687
164. Sätze über stetige Funktionen. Zusammengesetzte Funktionen .....	695
165. Weitere Eigenschaften stetiger Funktionen .....	699
166. Anwendungen auf Gleichungen .....	704
167. Näherungsweise Lösung von Gleichungen. Regula falsi .....	707
168. Gleichmäßige Stetigkeit einer stetigen Funktion .....	710
169. Gleichmäßige Konvergenz einer unendlichen Reihe mit veränderlichen Gliedern .....	713
170. Kriterien von WEIERSTRASS, ABEL und DIRICHLET für gleichmäßige Konver- genz von Reihen .....	720

171. Eigenschaften gleichmäßig konvergenter Reihen  $\sum u_n(x)$ , deren Glieder  $u_n(x)$  stetige Funktionen sind. Gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen . . . . . 723

### P. Umkehrfunktionen

172. Allgemeines . . . . . 728  
 173. Die Kreisbogen- und Arcusfunktionen (zyklometrischen Funktionen) . . . . . 732  
 174. Logarithmen . . . . . 740  
 175. Natürlicher Logarithmus (Logarithmus naturalis). Additions- und Subtraktionslogarithmen . . . . . 747  
 176. Die Areafunktionen . . . . . 752  
 177. Die Logarithmen negativer und komplexer Zahlen . . . . . 757  
 178. Zusammenhang der Arcusfunktionen mit dem Logarithmus . . . . . 761  
 179. Die allgemeine Potenz  $z^r = (x + iy)^{\xi + i\eta}$  . . . . . 762

### Q. Der logarithmische Rechenstab. Logarithmische Funktionspapiere

180. Funktionsleitern. Quadratische und projektive Leiter. Volumenskalibrierung (Faßmessung mit der Rute) . . . . . 766  
 181. Lineare Interpolation in Funktionsleitern . . . . . 771  
 182. Die logarithmische Leiter. Logarithmischer Rechenstab . . . . . 773  
 183. Die quadratische und kubische Leiter des logarithmischen Rechenstabs . . . . . 774  
 184. Lineare Interpolation und Ablesegenauigkeit . . . . . 776  
 185. Multiplikation und Division, Sondermarken . . . . . 778  
 186. Proportionen. Regeldetri . . . . . 781  
 187. Die gegenläufige oder reziproke Leiter  $R$  . . . . . 783  
 188. Die logarithmische Sinusleiter . . . . . 786  
 189. Die pythagoreische oder log cos-Leiter . . . . . 788  
 190. Die logarithmische Tangensleiter . . . . . 790  
 191. Die gleichförmige Leiter . . . . . 791  
 192. Die log log-Leiter oder Exponentialleiter . . . . . 791  
 193. Verschiedene weitere Anwendungen des logarithmischen Rechenstabes . . . . . 794  
 194. Anwendungen des Rechenschiebers auf verschiedene Probleme, insbesondere auf die Lösung quadratischer und kubischer Gleichungen . . . . . 797  
 195. Funktionspapiere . . . . . 800  
 196. Doppeltlogarithmisches Papier (Potenzpapier) . . . . . 801  
 197. Einfachlogarithmisches oder Exponentialpapier . . . . . 807  
 Namen- und Sachverzeichnis . . . . . 815

Verweise: **24.** verweist auf die Nummer 24 und (24.12) bedeutet Formel 12 in Nummer 24 des Buches. (73. Beispiel 2) verweist auf Beispiel 2 in Nummer 73. Ebenso bezeichnet (11. Bemerkung 3) die Bemerkung 3 in Nummer 11, ähnlich (31. Regel C) die Regel C in Nummer 31. Schließlich weist (Tafel 196.2) auf die Zahlentafel 2 in Nummer 196 hin.

Die Nummern und ihre Überschriften findet man am Kopf der ungeraden Seiten wiederholt.

Die wichtigsten Stichwörter und alle genannten Namen (mit Seitenzahlen) enthält der Namen- und Sachweiser auf Seite 812 ff.