

INHALTSVERZEICHNIS

Vorwort.....	XIII
--------------	------

DRITTER ABSCHNITT

Integralrechnung für Funktionen einer reellen Veränderlichen

A. Bestimmtes Integral der Funktionen einer Veränderlichen

1. Das Problem des Flächeninhalts. Elementare Fälle	3
2. Der Flächeninhalt ebener Polygone und seine Grundeigenschaften	7
3. Die Quadratur der quadratischen Parabel nach <i>Archimedes</i>	14
4. Die Quadratur der kubischen und biquadratischen Parabel nach <i>B. Cavalieri</i>	18
5. Die Quadratur der Funktionen $y = x^m$ für reelle m nach <i>P. Fermat</i>	20
6. Die Quadratur der Parabel m -ter Ordnung bei beliebiger Intervall- teilung nach <i>A. Pringsheim</i>	29
7. Unteres und oberes <i>Darboux</i> sches Integral einer beschränkten Funktion $f(x)$	31
8. Innerer und äußerer <i>Jordanscher</i> Inhalt einer linearen Punktmenge \mathfrak{M} ..	38
9. Verfeinerung der Zerlegung Z des Grundintervalls $[a, b]$	42
10. Das <i>Darboux</i> sche Integral	48
11. Einige Rechenregeln für <i>Darboux</i> sche Integrale	53
12. Definition des <i>Darboux</i> schen Integrals bei abzählbaren Zerlegungen Z des Grundintervalls $[a, b]$	54
13. Integrierbarkeitskriterium von <i>G. Darboux</i> . Integrierbarkeit von Summe, Differenz, Produkt und Quotient	56
14. Die Integrierbarkeit der monotonen und der stetigen Funktionen.....	61
15. Das Integrierbarkeitskriterium von <i>B. Riemann</i> . Anwendungen	65
16. Weitere Sätze über integrierbare Funktionen	69
17. Die Definition des bestimmten Integrals nach <i>A. Cauchy</i>	71
18. Die Definition des bestimmten Integrals nach <i>B. Riemann</i>	74
19. Anwendung auf die Sätze von <i>G. A. Bliss</i> und <i>J. M. C. Duhamel</i>	77
20. Einige Beispiele zur <i>Riemann</i> schen Definition des bestimmten Integrals ..	81
21. Mittlere Schwankung und Integrierbarkeit einer beschränkten Funktion.	86
22. Anwendungen. Erstes Integrierbarkeitskriterium von <i>H. Lebesgue</i>	90
23. Lokale Schwankung $\sigma(x)$ einer Funktion $f(x)$ in einem Punkt x	94

24. Zweites Integrierbarkeitskriterium von <i>H. Lebesgue</i>	98
25. Das Beispiel von <i>B. Riemann</i>	101
26. Mengen vom Maß Null (Nullmengen). Integrierbarkeitskriterium von <i>Riemann</i> und <i>Lebesgue</i>	105
27. Funktionen von beschränkter Variation	110
28. Eigenschaften der Funktionen von beschränkter Variation	114
29. <i>Jordanscher Inhalt</i> (<i>Jordansches Maß</i>) einer reellen Punktmenge \mathfrak{M}	118
30. Weitere Rechenregeln für bestimmte Integrale	125
31. Einige Anwendungen der <i>Riemannschen</i> Integraldefinition. Sektorformel von <i>Leibniz</i>	133
32. Einige weitere Anwendungen	144
33. Die <i>Keplersche</i> Faßregel	154
34. Anwendungen der <i>Keplerschen</i> Faßregel	158

B. Mittelwertsätze und Hauptsatz der Integralrechnung

35. Erster Mittelwertsatz der Integralrechnung	164
36. Verallgemeinerung des ersten Mittelwertsatzes der Integralrechnung	168
37. Die Ungleichung von <i>H. A. Schwarz</i> . Anwendungen der <i>Schwarzschen</i> Ungleichung	170
38. Einige Anwendungen des ersten Mittelwertsatzes der Integralrechnung	175
39. Zweiter Mittelwertsatz der Integralrechnung	178
40. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	184
41. Stammfunktion (Primitive Funktion)	188
42. Der Hauptsatz der Integralrechnung	192
43. Das unbestimmte Integral einer stetigen Funktion $f(x)$	197

C. Allgemeine Integrationsverfahren (Systematische Integration)

Integration der rationalen Funktionen

44. Grundintegrale	204
45. Partielle Integration (Produktintegration, Integration nach Teilen)	207
46. Weitere Beispiele zur partiellen Integration	215
47. Neue Beweise für den <i>Bonnetschen</i> Mittelwertsatz und für den <i>Taylorschen</i> Satz	223
48. Einführung einer neuen Integrationsvariablen (Integration durch Substitution)	226
49. Beispiele zur Substitutionsregel	232
50. Einige Anwendungen der Substitutionsregel auf bestimmte Integrale	237
51. Die Integrale rationaler Funktionen	240
52. Integration rationaler Funktionen mit einfachen komplexen Nullstellen des Nenners	245
53. Integration rationaler Funktionen mit mehrfachen reellen Nullstellen des Nenners	251

54. Integration rationaler Funktionen bei mehrfachen komplexen Nullstellen des Nenners	254
55. Der <i>Hermitesche Ansatz</i>	261
56. Integrale, die sich auf rationale Integrale zurückführen lassen	266
D. Integration algebraischer Funktionen (Abelsche Integrale)	
57. Integration algebraischer Funktionen. <i>Abelsche Integrale</i>	274
58. <i>Abelsche Integrale</i> der Kegelschnitte $y^2 = ax^2 + 2bx + c$	282
59. Ein Beispiel eines <i>Abelschen</i> Integrals	285
60. Direkte Behandlung der <i>Abelschen Integrale</i> der Kegelschnitte	291
61. Fortsetzung der direkten Behandlung der <i>Abelschen Integrale</i> der Kegelschnitte	297
62. Die Berechnung der <i>Abelschen Integrale</i> $\int \frac{Q_{s-1}(x)}{L_s(x)} \cdot \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}}$	300
63. Die Berechnung der Grundintegrale J_{III}	302
64. Die Berechnung der sechs Normintegrale J_1 bis J_6	305
65. Weitere auf rationale Integrale zurückführbare <i>Abelsche Integrale</i>	309
66. Die Integration der binomischen Differentiale	313
E. Integration transzendenter Funktionen	
67. Die Integrale $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$ mit rationalen Exponenten m und n	322
68. Weitere Bemerkungen über die Integration trigonometrischer Ausdrücke	326
69. Die Integration rationaler Ausdrücke von Exponentialfunktionen oder Hyperbelfunktionen	330
70. Weitere geschlossen integrierbare transzendente Funktionen	335
71. Verschiedene Beispiele	338
72. Verschiedene weitere Beispiele	342
F. Integration von unendlichen Reihen	
73. Elementar nicht auswertbare Integrale	346
74. Die Integration von unendlichen Reihen	348
75. Gliedweise Integrierbarkeit der Reihen	353
76. Anwendung auf Potenzreihen	361
77. Beispiele zur Berechnung nicht elementarer Integrale	364
G. Uneigentliche Integrale	
78. Allgemeines über uneigentliche Integrale	371
79. Uneigentliche Integrale 1. Art (mit nicht beschränktem Integranden)	378
80. Verschiedene Beispiele	383
81. Kriterien für die Konvergenz von uneigentlichen Integralen 1. Art	388
82. Weitere Kriterien für die Konvergenz von uneigentlichen Integralen 1. Art	392

83. Weitere Beispiele von uneigentlichen Integralen 1. Art	399
84. Rechenregeln bei uneigentlichen Integralen 1. Art	404
85. Absolute und bedingte Konvergenz von uneigentlichen Integralen 1. Art .	414
86. Uneigentliche Integrale 2. Art (mit unendlichem Integrationsintervall) ...	424
87. Konvergenzkriterien für uneigentliche Integrale 2. Art	431
88. Einige Beispiele	437
89. Weitere Konvergenzkriterien für uneigentliche Integrale 2. Art	442
90. Einige Beispiele und Bemerkungen	447
91. Absolute und bedingte Konvergenz von uneigentlichen Integralen 2. Art	454
92. Die partielle Integration bei uneigentlichen Integralen 2. Art	464
93. Die Regel für die Einführung einer neuen Veränderlichen	470
94. Weitere Beispiele	478
95. Gemischte uneigentliche Integrale	483
96. Integralkriterium für die Konvergenz von Reihen	489
97. Gleichmäßige Konvergenz von uneigentlichen Integralen	494

H. Definition von Funktionen durch bestimmte Integrale

98. Die Definition von Funktionen durch bestimmte Integrale	501
99. Anwendung auf elliptische Integrale	507
100. <i>Jacobische</i> elliptische Funktionen	514
101. Berechnung der elliptischen Integrale $F(\phi, k)$ und $F(\pi/2, k)$ nach <i>Gauss</i> .	521
102. Der Integrallogarithmus	529
103. Durch Parameterintegrale dargestellte Funktionen (Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Regel von <i>Leibniz</i>)	532
104. Verschiedene Beispiele	537
105. Die Integration von Parameterintegralen. Zweifache Integrale	541
106. Gleichheit iterierter Grenzwerte bei gleichmäßiger Konvergenz	550
107. Eigenschaften der uneigentlichen Parameterintegrale	553
108. Einige Beispiele von uneigentlichen zweifachen Integralen	557
109. Die Differentiation eines uneigentlichen Parameterintegrals	561
110. Uneigentliche Integration eines uneigentlichen Parameterintegrals	567

I. Numerische Integration

111. Die Sehnentrapezformel	572
112. Verbesserung der Sehnentrapezformel	576
113. Die Bitangentenformel	582
114. Die Tangententrapezformel	586
115. Die <i>Keplersche</i> Faßregel	589
116. Die randverbesserte <i>Keplersche</i> Faßregel	591
117. Die <i>Newtonsche</i> Dreiachtelregel	594

118. Zwei neue numerische Quadraturformeln	597
119. Parabolische Quadratur	601
120. Einige Beispiele zur parabolischen Quadratur	605
121. Steigerung der Genauigkeit der parabolischen Quadraturformeln	611
122. Die Formeln von <i>Simpson</i> und <i>Weddle</i>	616
123. Integration der Interpolationsformeln von <i>Newton</i> , <i>Bessel</i> und <i>Stirling</i>	623
124. Das Integrationsverfahren von <i>W. Romberg</i>	633
125. <i>Gaußsche</i> Quadraturformeln	643
126. Die Quadraturformeln von <i>Tschebyscheff</i>	651
127. Die <i>Bernoullischen</i> Polynome	654
128. Die <i>Eulersche</i> Summenformel	664
129. Die <i>Stirlingsche</i> Formel	670

J. Anwendungen der Integralrechnung auf Geometrie und Mechanik

130. Bogenlänge einer ebenen Kurve	675
131. Die Berechnung der Bogenlänge s einer rektifizierbaren Kurve	681
132. Einige Beispiele von Bogenlängen ebener Kurven	688
133. Bogenlänge in Polarkoordinaten. Beispiele	699
134. Krümmung einer ebenen Kurve. Evolute, Evolventen	708
135. Die Hüllkurve (Einhüllende) einer Kurvenschar	718
136. Krümmung und Evolute in Polarkoordinaten	731
137. Oberflächeninhalt einer Drehfläche	736
138. Schwerpunkt einer homogen mit Masse belegten Kurve	739
139. Schwerpunkt eines homogen mit Masse belegten Flächenstücks	744

K. Graphische und mechanische Integration

140. Graphische Integration	748
141. Integratoren	754
142. Integraphen	754
143. Integrimeter	759
144. Planimeter	762
145. Linearplanimeter und Polarplanimeter	765
146. Das Radialplanimeter	770
147. Das Beilplanimeter	771

L. Anmerkungen zur Geschichte der Integralrechnung

148. Anmerkungen zur geschichtlichen Entwicklung der Integralrechnung	775
Schrifttum	792
Namen- und Sachverzeichnis	797