

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS	VII
CHAPITRE PREMIER. — <i>Éléments de théorie des ensembles</i>	1
§ 1. <i>Généralités. Relations logiques</i>	1
§ 2. <i>Relations d'appartenance et d'inclusion. Complémentaire d'un ensemble</i>	4
1. Ensembles et éléments. Ensemble vide	4
2. Relation d'inclusion. Parties d'un ensemble	5
3. Complémentaire d'un ensemble	7
§ 3. <i>Réunion et intersection de deux ensembles</i>	7
§ 4. <i>Produit cartésien d'ensembles</i>	9
1. Couples	9
2. Produit cartésien de deux ensembles	10
3. Produit cartésien de n ensembles	10
§ 5. <i>Fonctions</i>	11
1. Définitions, notations et terminologie	11
2. Image d'un ensemble par une application	13
3. Image réciproque d'un ensemble par une application	14
4. Fonctions composées	15
5. Restriction et prolongement d'une fonction	16
6. Fonctions de n arguments	17
7. Fonctions à valeurs dans un ensemble produit	18
§ 6. <i>Familles d'éléments d'un ensemble</i>	19
1. Définitions et notations	19
2. Suites d'éléments d'un ensemble	20
§ 7. <i>Familles d'ensembles</i>	21
1. Réunion et intersection d'une famille d'ensembles	21
2. Produit d'une famille d'ensembles	23
§ 8. <i>Ensemble des parties d'un ensemble</i>	25
§ 9. <i>Ensembles dénombrables</i>	27

§ 10. <i>Relations entre éléments d'un ensemble. Ensemble quotient. Ensembles ordonnés</i>	32
1. Relations d'équivalence dans un ensemble. Ensemble quotient	33
2. Relations d'ordre dans un ensemble. Ensemble ordonné	34
3. Applications dans un ensemble ordonné	37
4. Applications d'un ensemble ordonné dans un ensemble ordonné	38
§ 11. <i>Paradoxes de l'ancienne théorie des ensembles. Relations collectivisantes</i>	39
CHAPITRE II. — <i>Nombres réels. Nombres complexes. Espace numérique \mathbf{R}^n</i>	43
§ 1. <i>Nombres réels. Droite numérique</i>	43
1. Propriétés fondamentales des nombres réels	44
2. Le corps \mathbf{R} (conséquences des propriétés 1 à 10)	47
3. Le corps ordonné \mathbf{R} (conséquences des propriétés 11 à 16)	52
Valeur absolue sur \mathbf{R}	54
Distance sur \mathbf{R} . Intervalles	55
Partie positive et partie négative d'un nombre réel	57
Immersion de \mathbf{N} dans \mathbf{R} . Nombres entiers rationnels	57
Exposants négatifs	59
Nombres rationnels	59
4. Bornes supérieure et inférieure (conséquences de RQ. 17 et RQ. 18)	60
5. Racine n -ième. Exposants rationnels	64
6. La droite numérique achevée $\overline{\mathbf{R}}$	66
§ 2. <i>Espace numérique à n dimensions</i>	69
1. Définitions et propriétés générales	69
2. Distance euclidienne sur \mathbf{R}^n	71
3. Norme euclidienne sur \mathbf{R}^n	73
4. Produit scalaire dans \mathbf{R}^n	74
5. Translations. Vecteurs libres. Droites. Segments	75
6. Pavés dans \mathbf{R}^n	78
7. Ensembles convexes dans \mathbf{R}^n . Ensembles étoilés	79
§ 3. <i>Nombres complexes</i>	81
1. Le corps des nombres complexes	81
2. L'espace \mathbf{C}^n	85
CHAPITRE III. — <i>Convergence dans \mathbf{R}^n et \mathbf{C}^n. Suites. Séries. Familles sommables</i>	87
§ 1. <i>Suites convergentes. Suites de Cauchy</i>	87
1. Suites convergentes dans \mathbf{R} , \mathbf{R}^n , \mathbf{C} , \mathbf{C}^n	87
Opérations sur les suites convergentes (passage à la limite)	89
Passage à la limite dans les inégalités	93
2. Suites de Cauchy dans \mathbf{R} , \mathbf{R}^n et \mathbf{C} . Critère de Cauchy	93
3. Convergence dans $\overline{\mathbf{R}}$. Limites infinies	95
4. Point à l'infini de \mathbf{R}^n , \mathbf{C}^n et \mathbf{C} . Limites infinies	98

§ 2. Valeurs d'adhérence d'une suite. Limites supérieure et inférieure	99
1. Valeurs d'adhérence d'une suite dans \mathbf{R}^n , \mathbf{C}^n et $\overline{\mathbf{R}}$ ($n \geq 1$)	99
2. Limite supérieure et limite inférieure d'une suite dans $\overline{\mathbf{R}}$	102
§ 3. Séries et familles sommables dans \mathbf{R}^n et \mathbf{C}^n . Séries numériques	103
1. Séries convergentes. Critère de Cauchy	103
2. Séries absolument convergentes. Familles sommables	108
3. Séries de nombres réels positifs. Critères de convergence	117
4. Séries entières d'une variable complexe	123
CHAPITRE IV. — <i>Notions de topologie générale. Les espaces topologiques</i> \mathbf{R}^n , \mathbf{C}^n , $\mathbf{R}^n \cup \{\infty\}$, $\mathbf{C}^n \cup \{\infty\}$, $\overline{\mathbf{R}}$	127
§ 1. Voisinages d'un point	127
1. Boules ouvertes et boules fermées dans \mathbf{R}^n et \mathbf{C}^n	127
2. Voisinages d'un point dans \mathbf{R}^n , $\overline{\mathbf{R}}$, $\mathbf{R}^n \cup \{\infty\}$, $\mathbf{C}^n \cup \{\infty\}$ ($n \geq 1$)	129
§ 2. Adhérence et intérieur d'un ensemble. Ensembles ouvert et fermé	132
1. Point adhérent à un ensemble. Adhérence d'un ensemble	132
2. Point intérieur à un ensemble. Intérieur d'un ensemble	133
3. Ensemble ouvert. Ensemble fermé	134
4. Frontière d'un ensemble	139
5. Ensemble partout dense	140
6. Point d'accumulation. Point isolé. Ensemble dérivé	141
§ 3. Espaces et ensembles compacts	141
1. Définitions et propriétés générales	141
2. Ensembles compacts dans \mathbf{R}^n et \mathbf{C}^n ($n \geq 1$)	145
3. Compactifications de \mathbf{R}^n , \mathbf{C}^n et \mathbf{R}	148
4. Espaces localement compacts	148
§ 4. Connexion	150
1. Ensembles connexes et espaces connexes	150
2. Composantes connexes d'un ensemble	156
3. Espaces localement connexes	157
§ 5. Les espaces produits \mathbf{R}^n et \mathbf{C}^n . Résumé des propriétés	158
§ 6. Filtrés et bases de filtré	160
1. Convergence d'une base de filtré et d'un filtré	160
2. Point adhérent à une base de filtré	163
3. Familles d'éléments de \mathbf{R}^n , \mathbf{C}^n ($n \geq 1$), $\overline{\mathbf{R}}$, $\mathbf{R}^n \cup \{\infty\}$. Limites suivant un filtré	165
CHAPITRE V. — <i>Fonctions. Fonctions numériques</i>	169
§ 1. Opérations sur les fonctions numériques ou complexes	169
§ 2. Bornes des fonctions numériques	171
<i>Application aux limites supérieures et inférieures</i>	177

§ 3. <i>Limite d'une fonction en un point</i>	178
1. Définitions et propriétés fondamentales. Critère de Cauchy	178
2. Relations entre fonctions. Passage à la limite	183
3. Convergence d'une famille d'éléments	187
§ 4. <i>Fonctions continues</i>	188
1. Définitions et propriétés fondamentales	188
2. Relations entre fonctions continues	191
3. Propriétés globales d'une fonction continue	194
§ 5. <i>Fonctions uniformément continues</i>	197
§ 6. <i>Prolongement par continuité</i>	199
§ 7. <i>Fonctions d'une variable réelle</i>	202
1. Limite et continuité à droite ou à gauche	202
2. Fonctions monotones	204
CHAPITRE VI. — <i>Structures fondamentales</i>	207
§ 1. <i>Structures algébriques</i>	207
1. Lois de composition internes	207
2. Groupes	208
Caractérisation des sous-groupes	209
3. Anneaux	210
Caractérisation des sous-anneaux	211
4. Corps	211
5. Groupes, anneaux et corps ordonnés	212
6. Espaces vectoriels	213
Sous-espaces vectoriels	216
7. Algèbres sur un corps	217
8. Produits de structures algébriques homologues	219
Produit de groupes	219
Produit d'anneaux	219
Produit d'espaces vectoriels	220
Produit d'algèbres	221
9. Structures algébriques quotients	221
Groupe quotient d'un groupe abélien	221
Espace vectoriel quotient	222
10. Homomorphismes et isomorphismes	223
Applications linéaires	223
§ 2. <i>Structures topologiques</i>	224
1. Espaces topologiques	224
Autres méthodes de définition d'un espace topologique	229
Comparaison des topologies	230

2. Sous-espaces topologiques	231
3. Espaces topologiques produits	234
Produit d'une famille quelconque d'espaces topologiques	239
4. Espace topologique quotient	240
§ 3. <i>Espaces métriques</i>	241
1. Topologie d'un espace métrique	241
2. Structure uniforme d'un espace métrique	245
Suites de Cauchy. Espaces complets	245
Compacité et précompacité dans les espaces métriques	247
Continuité uniforme	249
§ 4. <i>Structures uniformes</i>	251
1. Famille d'écarts sur un ensemble	251
2. Topologie définie par une famille d'écarts	253
3. Structure uniforme. Familles d'écarts équivalentes	255
Topologie déduite d'une structure uniforme	257
Fonctions uniformément continues	258
Isomorphisme d'espaces uniformes	259
4. Suites de Cauchy. Filtrés de Cauchy. Espaces complets	260
Sous-espaces uniformes complets	262
Prolongement par continuité	263
Compacité et précompacité	263
5. Comparaison des structures uniformes	264
§ 5. <i>Superposition d'une structure algébrique et d'une topologie</i>	265
1. Groupes topologiques	265
2. Anneaux topologiques	266
3. Corps topologiques	267
4. Espaces vectoriels topologiques	267
§ 6. <i>Espaces normés</i>	268
Algèbres normées	272
Séries et familles absolument sommables	273
CHAPITRE VII. — <i>Espaces vectoriels topologiques. Espaces localement convexes</i>	275
§ 1. <i>Espaces vectoriels</i>	275
1. Ensembles convexes, équilibrés et absorbants	275
2. Semi-normes sur un espace vectoriel complexe	278
3. Ensemble filtrant de semi-normes	281
§ 2. <i>Espaces vectoriels topologiques</i>	281
1. Propriétés fondamentales. Voisinages de l'origine	281
2. Ensembles bornés	286
3. Ensembles compacts	287
4. Semi-normes continues	289
5. Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel topologique	290

§ 3. <i>Espaces localement convexes</i>	290
1. Définition d'un espace localement convexe	290
2. Espace localement convexe défini par des semi-normes	291
3. Structure uniforme d'un espace localement convexe	295
4. Espace localement convexe métrisable	298
5. Ensembles équicontinus	301
§ 4. <i>Espace vectoriel topologique produit</i>	304
L'espace localement convexe produit F^X	306
§ 5. <i>Espace vectoriel topologique quotient</i>	306
Factorisation canonique d'une application linéaire	307
Espace localement convexe quotient	309
Espace séparé associé	310
§ 6. <i>Le théorème de Banach-Schauder</i>	311
§ 7. <i>Espaces tonnelés. Espaces de Montel. Le théorème de Banach-Steinhaus</i>	
1. Tonneaux et espaces tonnelés	315
2. Espaces de Montel	318
3. Le théorème de Banach-Steinhaus	318
CHAPITRE VIII. — <i>Espaces de fonctions</i>	319
§ 1. <i>Limites de fonctions</i>	319
1. Convergence simple. Convergence uniforme	319
2. Convergences des séries	323
3. Convergences d'une famille de fonctions	324
4. Critères de convergence de Cauchy	326
§ 2. <i>Opérations entre fonctions. Passage à la limite</i>	328
1. Propriétés de la convergence simple	329
2. Propriétés de la convergence uniforme	330
§ 3. <i>Espaces de fonctions continues</i>	334
§ 4. <i>Le théorème de Stone-Weierstrass</i>	338
§ 5. <i>Structure uniforme de la \mathfrak{C}-convergence</i>	343
1. L'espace uniforme $\mathcal{F}_{\mathfrak{C}}(X, F)$	343
Parties équicontinues de $\mathcal{F}(X, F)$	347
2. L'espace uniforme $\mathcal{C}_{\mathfrak{C}}(X, F)$	348
3. Sous-espaces localement convexes de $\mathcal{F}_{\mathfrak{C}}(X, F)$	350
4. Le théorème d'Ascoli	352
§ 6. <i>Espaces de fonctions différentiables</i>	355
1. Les espaces localement convexes $\mathcal{E}^m(\Omega)$ et $\mathcal{E}(\Omega)$	355
2. Les espaces localement convexes $\mathcal{D}^m(K)$ et $\mathcal{D}(K)$	360
3. Pseudo-topologie des espaces $\mathcal{D}^m(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega)$	362
4. Définition des distributions	363

CHAPITRE IX. — <i>Dérivées et opérateurs différentiels</i>	365
§ 1. <i>Dérivées des fonctions d'une variable réelle</i>	365
1. Dérivée première d'une fonction réelle ou complexe	365
Tangentes et demi-tangentes	369
2. Opérations entre fonctions. Règles de dérivation	371
3. Formule des accroissements finis. Applications	376
4. Dérivées d'ordre supérieur	380
5. Application des dérivées au calcul des limites	384
6. Formule de Taylor	390
7. Dérivées des fonctions à valeurs dans \mathbf{R}^n	393
§ 2. <i>Dérivation des fonctions de plusieurs variables</i>	395
1. Dérivées partielles premières	395
2. Fonctions différentiables	400
3. Différentielles premières	406
4. Dérivées partielles d'ordre supérieur	409
5. Différentielles d'ordre supérieur	414
6. Formule de Taylor	415
7. Extréma des fonctions de plusieurs variables	416
§ 3. <i>Dérivation terme à terme des suites et des séries</i>	417
§ 4. <i>Espaces vectoriels de fonctions différentiables</i>	422
1. Fonctions indéfiniment différentiables	422
2. Espaces de fonctions continûment différentiables	423
3. Opérateurs différentiels linéaires	425
§ 5. <i>Dérivées par rapport à une variable complexe</i>	426
CHAPITRE X. — <i>Fonctions implicites. Changements de variables</i>	431
§ 1. <i>Fonctions implicites</i>	431
1. Théorèmes d'existence	431
2. Dérivation des fonctions implicites	435
3. Fonctions implicites p fois continûment différentiables	438
§ 2. <i>Jacobiens. Changements de variables</i>	441
1. Propriétés des matrices jacobiniennes	441
2. Changements de variables	447
Changement de variable dans \mathbf{R}	450
3. Quelques changements de variables particuliers	451
Coordonnées polaires dans \mathbf{R}^2	451
Coordonnées polaires dans \mathbf{R}^3	453
Coordonnées polaires dans \mathbf{R}^n	455

CHAPITRE XI. — <i>Fonctions élémentaires</i>	459
§ 1. <i>Fonctions puissances</i>	459
1. Puissance entière	459
Dérivée par rapport à $z \in \mathbf{C}$	460
Formule du binôme (I. Newton)	460
2. Puissance d'exposant $1/n$ ($n \in \mathbf{N}^*$)	461
§ 2. <i>Fonctions exponentielles</i>	461
1. Exposants rationnels	461
2. Propriétés de $(a^x - 1)/x$ pour $x \in \mathbf{Q}^*$	462
3. Fonctions exponentielles	463
4. Propriétés de $x \mapsto (a^x - 1)/x$ ($x \in \mathbf{R}^*$)	466
§ 3. <i>Logarithmes</i>	466
1. Logarithme de base $a > 0$	466
2. Le nombre e . Logarithme népérien	468
3. Dérivées des fonctions $x \mapsto a^x$ et $x \mapsto \log_a x$	470
§ 4. <i>Fonction puissance</i>	470
1. La fonction $x \mapsto x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbf{R}$)	470
2. Dérivées de $x \mapsto x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbf{R}$)	472
3. La fonction $(x, y) \mapsto x^y$	473
4. Développements de $(1+x)^\alpha$ et de $\text{Log}(1+x)$	474
§ 5. <i>Fonctions hyperboliques</i>	476
1. Fonctions hyperboliques directes	476
2. Fonctions hyperboliques inverses	478
Dérivées des fonctions hyperboliques inverses	480
3. Développements de e^x , $\text{sh } x$ et $\text{ch } x$ ($x \in \mathbf{R}$)	481
§ 6. <i>Exponentielle de la variable complexe. Le nombre π</i>	482
1. La fonction $z \mapsto e^z$ ($z \in \mathbf{C}$)	482
2. Étude de la fonction $x \mapsto e^{ix}$ ($x \in \mathbf{R}$). Le nombre π	483
3. La fonction $z \mapsto a^z$ ($a \in \mathbf{R}_+^*$, $z \in \mathbf{C}$)	487
4. La fonction $x \mapsto x^\alpha$ ($x \in \mathbf{R}_+^*$, $\alpha \in \mathbf{C}$)	487
§ 7. <i>Mesure des angles</i>	488
1. Rotations dans \mathbf{R}^2	488
2. Angles de demi-droites	490
3. Addition des angles de demi-droites	491
4. Mesure des angles	493
§ 8. <i>Fonctions trigonométriques</i>	495
1. Sinus, cosinus et tangente d'un angle	495
2. Fonctions circulaires	497
§ 9. <i>Fonctions circulaires réciproques</i>	500
Développements de $\text{Arc sin } x$ et de $\text{Arc tg } x$	503

§ 10. <i>Forme trigonométrique de $z \in \mathbf{C}^*$. Coordonnées polaires</i>	504
1. Définitions et opérations dans \mathbf{C}^*	504
2. Équation binôme $z^m = z_0$. Racines de l'unité	506
3. Coordonnées polaires	506
4. Longueur d'un arc de cercle	508
§ 11. <i>Fonctions circulaires et hyperboliques complexes</i>	509
§ 12. <i>Polynômes d'une variable complexe</i>	510
1. Définitions et propriétés élémentaires	510
2. Théorème fondamental de l'algèbre (d'Alembert-Gauss)	512
3. Zéros des polynômes de $z \in \mathbf{C}$	513
§ 13. <i>Fractions rationnelles</i>	514
§ 14. <i>Quelques limites élémentaires</i>	515
APPENDICE I. — <i>Espaces métriques</i>	517
§ 1. <i>Ensembles bornés. Distance de deux ensembles</i>	517
<i>Prolongement des fonctions numériques continues</i>	523
§ 2. <i>Recouvrements ouverts. Partitions de l'unité</i>	525
1. Espaces métriques séparables	525
2. Propriétés des recouvrements ouverts	526
3. Partitions de l'unité subordonnées à un recouvrement	529
§ 3. <i>Compléments sur les espaces métriques complets</i>	532
Théorème de Baire	532
Méthode des approximations successives	533
APPENDICE II. — <i>Nombres rationnels. Nombres réels</i>	535
§ 1. <i>Nombres entiers rationnels</i>	535
1. Relation d'équivalence dans $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$. Définition de \mathbf{Z}	535
2. Immersion de \mathbf{N} dans \mathbf{Z}	537
3. Addition dans \mathbf{Z}	537
4. Multiplication dans \mathbf{Z}	539
5. Relation d'ordre dans \mathbf{Z}	540
§ 2. <i>Nombres rationnels</i>	541
1. Relation d'équivalence dans $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$. Définition de \mathbf{Q}	542
2. Immersion de \mathbf{Z} dans \mathbf{Q}	543
3. Addition dans \mathbf{Q}	543
4. Multiplication dans \mathbf{Q}	544
5. Relation d'ordre dans \mathbf{Q}	545
6. Valeur absolue dans \mathbf{Q}	547
7. Suites convergentes dans \mathbf{Q}	548
8. Suites de Cauchy dans \mathbf{Q}	549

§ 3. <i>Nombres réels</i>	551
1. Relation d'équivalence dans l'ensemble des suites de Cauchy de nombres rationnels. Définition de \mathbf{R}	552
2. Immersion de \mathbf{Q} dans \mathbf{R}	553
3. Addition dans \mathbf{R}	554
4. Multiplication dans \mathbf{R}	554
5. Relation d'ordre dans \mathbf{R}	556
6. Propriétés de \mathbf{R} par rapport à \mathbf{Q}	558
BIBLIOGRAPHIE	561
INDEX des axiomes et des définitions	563
Index des notations	565
Index terminologique	573