

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER

Opérations sur les ensembles. Fonctions. Équivalence. Ordre.

Première Partie

Opérations sur les ensembles	1
1. — Expressions, symboles, premières définitions	1
2. — Parties d'un ensemble, complémentaire, partie vide	2
3. — Réunion	3
4. — Intersection	4
5. — Produit	4
6. — Propriétés des opérations sur les ensembles	5

Deuxième Partie

Fonctions ou applications	5
1. — Premières définitions	5
2. — Applications dans, applications sur, application biunivoque .	7
3. — Extension d'une fonction aux ensembles de parties	8
4. — Application réciproque	9
5. — Application composée	11
6. — Suites	11
7. — Opérations sur des familles d'ensembles	13

Troisième Partie

Équivalence	14
Relations binaires	15

Quatrième Partie

Ordre	18
-------------	----

CHAPITRE II

Lois algébriques.

Première Partie

Lois de compositions internes	22
1. — Définition et notation d'une loi de composition interne	22

2. — Associativité.....	23
3. — Commutativité	23
4. — Éléments réguliers.	24
5. — Élément neutre	24
6. — Éléments symétriques	24
7. — Notion d'isomorphisme de deux lois internes	26
8. — Distributivité d'une loi par rapport à une autre	27
<i>Deuxième Partie</i>	
Lois de composition internes particulières : Groupes, anneaux, corps.....	28
1. — Groupes.....	28
2. — Anneaux	31
3. — Corps	32
4. — Relation d'équivalence sur un groupe abélien. Groupe quotient.....	34
5. — Relations d'équivalence sur un anneau commutatif. Idéaux....	35
6. — Groupes ordonnés. Groupes de Riesz	36
<i>Troisième Partie</i>	
Ensemble symétrisé d'un ensemble muni d'une loi associative et commutative. Corps des fractions d'un anneau sans diviseur de zéro	42
1. — Premier problème. Ensemble symétrisé.....	43
2. — Entiers rationnels, nombres rationnels positifs	46
3. — Multiplication sur l'ensemble des entiers rationnels, addition sur l'ensemble des nombres rationnels positifs.....	47
4. — Deuxième problème. Corps des fractions d'un anneau sans diviseur de zéro	48
<i>Quatrième Partie</i>	
Lois externes. Espaces vectoriels	50
1. — Généralités	50
2. — Espace vectoriel sur un corps	51
3. — Constructions d'espaces vectoriels. Exemples.....	54
<i>Cinquième Partie</i>	
Lois et relations sur un ensemble de fonctions.....	58
CHAPITRE III	
Algèbre linéaire.	
<i>Première Partie</i>	
Espaces vectoriels	61
1. — Éléments linéairement indépendants. Bases.....	61
2. — Espace vectoriel de dimension finie	63
3. — Algèbres sur un corps	65

Deuxième Partie

Applications linéaires. Formes linéaires	68
1. — Définitions	68
2. — Opérations sur les applications linéaires	69
3. — Propriétés des applications linéaires	70
4. — Cas des espaces vectoriels de dimension finie	73
5. — Somme directe. Espace quotient	75
6. — Rang d'une application linéaire	77
7. — Formes linéaires. Dual	79
8. — Transposée d'une application linéaire	81
9. — Équations linéaires	83

Troisième Partie

Matrices sur un corps	89
1. — Définition des matrices rectangulaires	89
2. — Opérations algébriques sur les matrices	91
3. — Représentation d'une application linéaire par un produit de matrices	94
4. — Matrices carrées	94
5. — Rang d'une matrice. Transposée d'une matrice	96
6. — Application des matrices aux équations linéaires.....	97

CHAPITRE IV

Algèbre multilinéaire.*Première Partie*

Applications bilinéaires. Produit tensoriel	98
1. — Applications bilinéaires	98
2. — Produit tensoriel de deux espaces vectoriels	100
3. — Généralisations	103

Deuxième Partie

Puissance extérieure d'un espace vectoriel. Produit extérieur d'éléments .	104
1. — Puissance extérieure d'ordre 2	104
2. — Généralisations	108

Troisième Partie

Puissances extérieures d'une application linéaire. Déterminants	111
1. — Puissances extérieures d'une application linéaire	111
2. — Déterminants	112
3. — Déterminants de matrices, déterminants de vecteurs	113
4. — Calcul des déterminants. Résolution des équations linéaires. Matrices inversibles	115

CHAPITRE V

Topologie.

Première Partie

Familles fondamentales	118
1. — Définition. Exemples	118
2. — Propriétés	120
3. — Comparaison de familles fondamentales	122

Deuxième Partie

Espaces topologiques	123
1. — Définition d'un espace topologique. Base de voisinages ouverts. Base de topologie	123
2. — Comparaison et constructions de topologies	130
3. — Topologies définies par des familles dénombrables	134

Troisième Partie

Espaces séparés, compacts, localement compacts, connexes	136
1. — Espaces séparés, espaces réguliers	136
2. — Espaces compacts	138
3. — Espaces localement compacts	142
4. — Espaces connexes	146

Quatrième Partie

Limites, convergence	147
1. — Notion de filtre	148
2. — Limites dans les espaces topologiques	151
3. — Limites dans un espace séparé, dans un espace compact, dans un espace à base dénombrable	157

Cinquième Partie

Continuité	160
1. — Définitions et propriétés générales	160
2. — Homéomorphisme	162
3. — Fonctions continues, espaces compacts, espaces connexes ..	164

CHAPITRE VI

Les nombres réels.

Première Partie

L'ensemble des nombres rationnels	166
1. — L'ensemble Z des entiers rationnels	166

2. — Rappel de définitions et propriétés de l'ensemble Q des nombres rationnels	167
3. — Topologie sur Q	168

Deuxième Partie

Construction de R et propriétés fondamentales	172
1. — Définition de R	172
2. — Addition, ordre, valeur absolue sur R	173
3. — Le corps R	175
4. — Topologie sur R . Les deux propriétés fondamentales	176

Troisième Partie

La droite numérique	179
1. — Éléments fondamentaux de la topologie de R	180
2. — Parties compactes, parties connexes de R	183
3. — Propriétés d'une fonction numérique continue. Homéomorphisme sur R . La droite achevée \bar{R}	188

Quatrième Partie

Fonctions numériques sur un ensemble	192
1. — Bornes, enveloppes, limites supérieures et inférieures	192
2. — Fonctions numériques sur un ensemble dénombrable. Sommes infinies. Séries	201

CHAPITRE VII

Espaces métriques. Espaces vectoriels normés. Espaces de Banach. Espaces de Hilbert.*Première Partie*

Espaces métriques	213
1. — Distance	213
2. — Topologie d'un espace métrique	215
3. — Espaces métriques compacts	223
4. — Espaces métriques connexes	224
5. — Espaces métriques complets. Complétion d'un espace métrique	224
6. — Espaces semi-métriques et espaces métriques associés	231
7. — Applications d'un espace métrique dans un espace métrique. Continuité, continuité uniforme, prolongement par continuité	232

Deuxième Partie

Groupes, espaces vectoriels métriques. Espaces de Banach, de Hilbert ..	235
1. — Groupes métriques. Groupes de Riesz normés	237
2. — Espaces vectoriels métriques. Espaces normés. Espaces de Banach	243
3. — Espaces de Hilbert	253

CHAPITRE VIII

**Fonctions à valeurs dans un espace métrique. Fonctions en escaliers.
Fonctions numériques continues et semi-continues.**

Première Partie

Notion d'espace fonctionnel	261
1. — Convergence simple d'une famille de fonctions.....	261
2. — Topologie sur un ensemble de fonctions à valeurs dans un espace métrique.....	262

Deuxième Partie

Fonctions en escalier. Approximation par des fonctions en escalier	268
1. — Fonctions en escalier.....	268
2. — Approximation uniforme par des fonctions en escalier....	272

Troisième Partie

Fonctions numériques continues sur un espace compact	275
1. — Le théorème de Dini.....	276
2. — Le théorème de Weierstrass.....	278

Quatrième Partie

Fonctions semi-continues	285
1. — Définitions et propriétés générales.....	285
2. — Fonctions semi-continues sur un espace localement compact ou métrique complet.....	290
3. — Enveloppes de fonctions semi-continues.....	292
4. — Les fonctions semi-continues enveloppes de fonctions continues. Le théorème d'Urysohn	294

CHAPITRE IX

Espaces vectoriels topologiques et applications linéaires.

Première Partie

Espaces vectoriels métriques complets. Les théorèmes de Banach ...	301
--	-----

Deuxième Partie

Espaces semi-normés et normés	307
1. — Le théorème de Hahn-Banach	308
2. — Applications linéaires continues.....	309
3. — Le théorème de Banach-Steinhaus	315
4. — Exemples.....	317

CHAPITRE X

Intégration.

Première Partie

Mesures numériques sur un espace de Riesz	331
1. — Introduction et recherche des hypothèses initiales	331
2. — Mesure positive sur un espace de Riesz de fonctions numériques. Axiome (J)	333
3. — Mesure positive sur un espace de fonctions en escalier...	335
4. — Mesure de Radon positive.....	339
5. — Généralisation de la notion de mesure.....	342

Deuxième Partie

Construction de l'espace \mathfrak{L}	345
1. — Ensembles négligeables. Nouvelle forme de l'axiome (J) ..	346
2. — Constructions de \mathfrak{L} et L	349
3. — Le théorème de l'intégration	352

Troisième Partie

Propriétés de \mathfrak{L}	354
1. — Fonctions négligeables	354
2. — Suites de Cauchy dans \mathfrak{L}	355
3. — Intégration d'une suite de fonctions de \mathfrak{L}	357

Quatrième Partie

Ensembles mesurables	363
1. — Définitions générales	363
2. — Cas d'une mesure sur un clan	366
3. — Cas d'une mesure de Radon.....	368

Cinquième Partie

Les espaces \mathfrak{L}^p	370
1. — Les inégalités de Hölder et de Minkowski	370
2. — Constructions et propriétés de \mathfrak{L}^p ($1 \leq p < +\infty$)	373
3. — Relations entre les espaces \mathfrak{L}^p ($1 \leq p < +\infty$)	376
4. — Les espaces \mathfrak{L}^∞ et L^∞	380

Sixième Partie

Le théorème de Lebesgue-Nikodym. Décomposition d'une mesure.	
Formes linéaires continues sur \mathfrak{L}^p	383
1. — Le théorème de Lebesgue-Nikodym	384
2. — Décomposition d'une mesure	387
3. — Formes linéaires continues sur les espaces \mathfrak{L}^p	389

Septième Partie

Le théorème de Lebesgue-Fubini	392
1. — Produit de deux clans	392
2. — Mesure produit	394
3. — Théorème de Lebesgue-Fubini	395

Huitième Partie

Mesures sur la droite numérique	398
1. — Fonctions monotones, fonctions à variation bornée	399
2. — Définitions des mesures sur la droite numérique	403
3. — Dérivées des fonctions monotones	407
4. — Étude de $\int_a^x f(t)dt$, où f est intégrable	417
5. — Fonctions absolument continues et décomposition canonique d'une fonction monotone	421
6. — Primitives. Intégration par parties. Changement de va- riable	427
BIBLIOGRAPHIE	431
INDEX	433