

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	9
1. Entstehungsweise und Zweck dieses Buches	9
2. Die Art der Darstellung	11
3. Spiraliger Weg contra Pedanterie: Bezeichnungsschwierigkeiten	12
4. Einheitlichkeit in der Mathematik	15
5. Gliederung des Textes	16
6. Die Übungen	20
7. Danksagungen	21
Einige Vorschläge zum gezielten Lesen	22
Bezeichnungshinweise	23

Teil I

Die Sprache der Mathematik

Kapitel 1. Mengenlehre als Beschreibungshilfsmittel	27
1.1 Der Mengenbegriff	27
1.2 Inklusion	29
1.3 Venn-Diagramme	30
1.4 Gleichheit von Mengen	30
1.5 Die Potenzmengenbildung	32
1.6 Vereinigung und Durchschnitt	33
1.7 Die Komplementbildung	37
1.8 Quantoren	39
Kapitel 2. Funktionen als Beschreibungshilfsmittel	43
2.1 Der Funktionsbegriff	43
2.2 Gleichheit von Funktionen	45
2.3 Das Bild	46
2.4 Injektionen, Surjektionen und Bijektionen	46
2.5 Beispiele	47
2.6 Bezeichnungen und sprachliche Ungenauigkeiten	50
2.7 Zusammensetzung von Funktionen	52
2.8 Zusammensetzung von Injektionen usw.	54
2.9 Der Satz von der Umkehrfunktion	54
2.10 Äquivalente Mengen	59
2.11 Das Zählen	59

Kapitel 3. Das Cartesische Produkt	64
3.1 Paare und Produkte	64
3.2 Algebraische Eigenschaften	66
3.3 Der Graph einer Funktion	68
3.4 Nochmals: Der Funktionsbegriff	69
3.5 Nochmals: Geordnete Paare	71
3.6 Multiplikative Systeme	72
Kapitel 4. Relationen	77
4.1 Was ist eine Relation?	77
4.2 Die Bedingungen RST	78
4.3 Lineare Graphen	78
4.4 Ordnungen	80
4.5 Äquivalenzrelationen	83
4.6 Klasseneinteilungen	87
4.7 Die Quotientenabbildung	88
Kapitel 5. Vollständige Induktion	91
5.1 Unvollständige und vollständige Induktion	91
5.2 Eine Unsitte	93
5.3 Das Verfahren der Induktiven Definition	93

Teil II

Weiteres über Mengen

Kapitel 6. Funktionenmengen	102
6.1 Die Menge B^A	102
6.2 Abbildungen von B^A	104
6.3 Der Fall $\#B = 2$	107
6.4 Variationen, Permutationen und die Menge $I(A, B)$	109
6.5 Kombinationen	112
6.6 Die Menge $S(A, B)$	114
Kapitel 7. Zählen und Transfinite Arithmetik	117
7.1 Das Zählen	117
7.2 Transfinite Arithmetik	119
7.3 Die Ordnungsrelation in der transfiniten Arithmetik	122
7.4 Das Auswahlaxiom	126
Kapitel 8. Mengenalgebra und Aussagenalgebra	133
8.1 Mengenalgebra	133
8.2 B-Algebren	138
8.3 Der Aussagenkalkül	142
8.4 Erweiterung auf allgemeinere Formeln	144
8.5 Implikation und Folgerung	147

Teil III

Arithmetik

Kapitel 9. Kommutative Ringe und Körper	152
9.1 Die ganzen Zahlen als algebraisches System	152
9.2 Ringe	153
9.3 Folgerungen	156
9.4 Unterringe	157
9.5 Kommutative Gruppen	158
9.6 Körper	161
 Kapitel 10. Arithmetik modulo m	 167
10.1 Restklassen und die Ringe \mathbb{Z}_m	167
10.2 Eigenschaften von \mathbb{Z}_m	170
10.3 Die Eulersche ϕ -Funktion	173
10.4 Das Lösen von Kongruenzen	174
 Kapitel 11. Ringe mit ganzzahliger Norm	 178
11.1 Ganzzahlige Normen	178
11.2 Beispiele	179
11.3 Faktorzerlegung in euklidischen Ringen	182
11.4 Ideale	184
11.5 Größte gemeinsame Teiler	187
11.6 Der euklidische Algorithmus	190
11.7 Kleinste gemeinsame Vielfache	193
 Kapitel 12. Zerlegung in Primfaktoren	 196
12.1 Primzahlen	196
12.2 Unzerlegbare Elemente und Primelemente	197
12.3 Existenz und Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung	199
12.4 Faktorzerlegung in $\mathbb{Z}[x]$	202
 Kapitel 13. Anwendungen des größten gemeinsamen Teilers	 206
13.1 Partialbruchzerlegung	206
13.2 Kettenbrüche	210
 Literaturhinweise	 214
 Verzeichnis besonderer Symbole	 216
 Stichwortverzeichnis	 220