Inhalt

Kapitel 1. Kongruenzen 15

1.1. Einleitung. GAUSS' „*Disquisitiones arithmeticae*" 15
1.2. Einfachste Gesetzmäßigkeiten für Kongruenzen 15
1.3. Potenzreste 16
1.4. Quadratische Reste 18
1.5. Ausblick. Biquadratische Reste 19

Kapitel 2. Quadratische Formen 22

2.1. Einleitung 22
2.2. Zerfallende Formen 22
2.3. Die Äquivalenz von Formen 23
2.4. Primitive Darstellungen 23
2.5. Transformationen, die eine Form in sich überführen 24
2.6. Formen mit negativer Diskriminante 25
2.7. Drei Sätze von EULER 28
2.8. Formen mit positiver Diskriminante 28
2.9. Die Komposition der Formenklassen 29

Kapitel 3. Kreisteilung 30

3.1. Problemstellung 30
3.2. Hilfssätze über Polynome 31
3.3. Definition der Gaußschen Perioden und diesbezügliche Sätze 32
3.4. Lösung des Problems 33
3.5. $p = 17$ 34
3.6. Perioden der Länge $(p - 1)/2$ 35
3.7. Beweis des quadratischen Reziprozitätsgesetzes 35

Kapitel 4. Flächentheorie 38

4.1. Einleitung. GAUSS' „*Disquisitiones generales circa superficies curvas*" 38
4.2. Kurven in der Ebene 38
4.3. Kurven im Raum 39
4.4. Flächen 39
4.5. Geometrische Deutung der Gaußschen Krümmung 40
4.6. EULERS Beitrag zur Flächentheorie 41
4.7. Die innere Geometrie der Flächen 42

Kapitel 5. Harmonische Analyse 44

5.1. Die Gleichung der schwingenden Saite 44
5.2. Formulierung des Dirichletschen Satzes und Beweisansatz 45
5.3. Beweis von Hilfssatz 2 47
5.4. Die Fouriersche Formel 49

5.5. Harmonische Analyse für komplexwertige Funktionen 50
5.6. Anwendung: Berechnung der ζ-Funktion an positiven geraden Stellen 51

Kapitel 6. Primzahlen in arithmetischen Progressionen 54

6.1. Primzahlverteilung 54
6.2. Charaktere endlicher abelscher Gruppen 55
6.3. Dirichletsche L-Reihen 56
6.4. Beweis von Satz 1 57

Kapitel 7. Algebraische Gleichungstheorie 60

7.1. Die Gleichungen dritten und vierten Grades 60
7.2. Lösung von Gleichungen mit Hilfe von Radikalen 61
7.3. Die allgemeine Gleichung n-ten Grades und die Theorie der symmetrischen Funktionen 62
7.4. Das Galoissche Mémoire zur Gleichungstheorie 64
7.5. Der Satz vom primitiven Element 65
7.6. Die Galoissche Gruppe eines Polynoms 66
7.7. Ein Irreduzibilitätskriterium 67
7.8. Irreduzible Gleichungen von Primzahlgrad mit zyklischer Gruppe . 68
7.9. Die Kreisteilungsgleichung 68
7.10. Der Hauptsatz über die Auflösung von Gleichungen mit Hilfe von Radikalen 69
7.11. Permutationsgruppen 70
7.12. Über irreduzible Gleichungen von Primzahlgrad 71
7.13. Gleichungen fünften Grades mit symmetrischer Gruppe 73

Kapitel 8. Die Anfänge der komplexen Funktionentheorie 75

8.1. Einleitung: Aus einem Brief von Gauss an Bessel 75
8.2. Grundbegriffe 76
8.3. Das Linienintegral 77
8.4. Die Cauchyschen Integralformeln 78
8.5. Potenzreihenentwicklung 79
8.6. Koeffizientenabschätzung 80
8.7. Prinzip vom Maximum des Absolutbetrages 81
8.8. Laurent-Entwicklung 81
8.9. Residuen 83
8.10. Der Doppelreihensatz 84
8.11. Analytische Fortsetzung 85

Kapitel 9. Ganze Funktionen 87

9.1. Funktionen mit endlich vielen singulären Stellen 87
9.2. Der Weierstraßsche Produktsatz 87
9.3. Die Γ-Funktion 89
9.4. Die Stirlingsche Formel 91

Kapitel 10. Riemannsche Flächen 94

10.1. Problemstellung der Funktionentheorie im 19. Jahrhundert 94
10.2. Die erweiterte komplexe Ebene 95
10.3. Die n-te Wurzel 96
10.4. Definition der Riemannschen Fläche 98
10.5. Die Riemannsche Fläche einer algebraischen Funktion 100
10.6. Die Topologie geschlossener Riemannscher Flächen 101
10.7. Polygonkomplexe 102
10.8. Klassifikation der orientierbaren geschlossenen Flächen 104

Kapitel 11. Meromorphe Differentiale und Funktionen auf geschlossenen Riemannschen Flächen 108

11.1. Differentiale und Integrale auf Riemannschen Flächen 108
11.2. Der Riemannsche Existenzsatz für Differentiale 109
11.3. Die Riemannschen Periodenrelationen 111
11.4. Meromorphe Funktionen 112
11.5. Riemannsche Flächen vom Geschlecht 0 113
11.6. Der Satz von RIEMANN und ROCH 113
11.7. Der Körper der meromorphen Funktionen auf einer geschlossenen Riemannschen Fläche 116

Kapitel 12. Die Sätze von ABEL und JACOBI 119

12.1. Der Satz von ABEL 119
12.2. Nicht-spezielle Divisoren 121
12.3. Die analytische Natur von ΨA 122
12.4. Der Satz von JACOBI und das Jacobische Umkehrproblem 123

Kapitel 13. Elliptische Funktionen 127

13.1. Die elliptischen Funktionen im Rahmen der Riemannschen Funktionentheorie 127
13.2. Konstruktion der elliptischen Funktionen 129
13.3. Klassifikation der Riemannschen Flächen vom Geschlecht 1 132
13.4. Die elliptische Modulfunktion 133
13.5. Der Picardsche Satz in der Theorie der ganzen Funktionen 136

Kapitel 14. Riemannsche Geometrie 139

14.1. RIEMANNS Habilitationsvortrag 139
14.2. n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeiten 140
14.3. Tangentialvektoren 141
14.4. Geodätische Linien 142
14.5. Riemannsche Normalkoordinaten 144
14.6. Der Riemannsche Krümmungstensor 146
14.7. Tensoren als Multilinearformen 149
14.8. Der Zusammenhang zwischen dem Krümmungstensor und der Form $Q(a, b)$ 149
14.9. Orthonormierte Basen 150
14.10. Die Gaußsche Krümmung 151
14.11. Räume konstanter Krümmung 152
14.12. Konforme Abbildung 155
14.13. Nichteuklidische Geometrie 155

Kapitel 15. Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe 158

15.1. Problemstellung 158
15.2. Die Funktionalgleichung der ζ-Funktion 158
15.3. Über die Nullstellen der ζ-Funktion 160

Kapitel 16. Die Anfänge der Theorie der algebraischen Zahlen 164

16.1. Die Gaußschen Zahlen 164
16.2. Einleitung zu den folgenden Kapiteln 17 bis 21 165

Kapitel 17. Körpertheorie 167

17.1. Körperisomorphismen 167
17.2. Normale Erweiterungen und Galoissche Gruppe 168

17.3. Der Hauptsatz der Galoisschen Theorie 168
17.4. Die Gruppe einer Gleichung 169
17.5. Das Kompositum zweier Körper 170
17.6. Spur, Norm, Differente und Diskriminante 170

Kapitel 18. Die Dedekindsche Idealtheorie 173

18.1. Ganze Elemente 173
18.2. Gitter in endlichen Erweiterungen von P 174
18.3. Die ganzen Zahlen quadratischer Zahlkörper 175
18.4. Die Ideale von O_K 176
18.5. Der Hauptsatz der Idealtheorie 178
18.6. Folgerungen aus dem Hauptsatz 180
18.7. Die Norm eines Ideals 180
18.8. Kongruenzen 182
18.9. Die Primidealzerlegung in quadratischen Zahlkörpern 183

Kapitel 19. Idealklassengruppe und Einheitengruppe 185

19.1. Die Endlichkeit der Klassenzahl 185
19.2. Einheiten in quadratischen Zahlkörpern 186
19.3. Die Struktur der Einheitengruppe in Ordnungen algebraischer Zahlkörper 186
19.4. Die logarithmischen Komponenten 187
19.5. Der Kern von $\boldsymbol{l}$ 187
19.6. Das Bild von $\boldsymbol{l}$ 188
19.7. Der Rang von $\boldsymbol{l}(E)$ 188
19.8. Der Dirichletsche Einheitensatz als Aussage über Diophantische Gleichungen 191

Kapitel 20. Die Dedekindsche ζ-Funktion 193

20.1. Definition der Dedekindschen ζ-Funktion 193
20.2. Ansatz zum Beweis von Satz 1 194
20.3. Reduktion auf eine Volumenberechnung 194
20.4. Volumenberechnung 195
20.5. Beweis von Satz 2 197
20.6. Anwendung 198

Kapitel 21. Quadratische Formen und quadratische Zahlkörper 200

21.1. Moduln in quadratischen Zahlkörpern 200
21.2. Vergleich mit der Idealgruppe 202
21.3. Formen und Moduln 204

Kapitel 22. Differente und Diskriminante 206

22.1. Relative Erweiterungen 206
22.2. Komplementärmoduln 207
22.3. Der zweite Dedekindsche Hauptsatz 209

Kapitel 23. Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen 212

23.1. Algebraische Funktionenkörper 212
23.2. Die Riemannsche Fläche 212
23.3. Die Ordnung einer Funktion in einem Punkt 214
23.4. Normalbasen 215
23.5. Der einem Divisor zugeordnete Funktionenraum 217
23.6. Differentiale 217
23.7. Der Satz von Riemann und Roch 220

Kapitel 24. Die Geometrie der Zahlen 222

24.1. Der Gitterpunktsatz 222
24.2. Anwendung auf die Ideale eines algebraischen Zahlkörpers 223

Kapitel 25. Normale Erweiterungen von algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern 227

25.1. Normale Erweiterungen 227
25.2. Beweis des Dedekindschen Differentensatzes 230
25.3. Kreisteilungskörper 231
25.4. Die ζ-Funktion der Kreisteilungskörper 233
25.5. Der Satz von KRONECKER und WEBER 234

Kapitel 26. Ganze Funktionen endlicher Wachstumsordnung 239

26.1. Problemstellung 239
26.2. Ganze Funktionen endlicher Ordnung 239
26.3. Anwendung auf die Riemannsche ζ-Funktion 244

Kapitel 27. Beweis des Primzahlsatzes 246

27.1. HADAMARD und DE LA VALLÉE POUSSIN 246
27.2. Die Tschebyschewsche Funktion 246
27.3. Die Methode der komplexen Integration 248
27.4. Ansatz zum Beweis von Satz 3 251
27.5. Über die Nullstellen der ζ-Funktion 252

Kapitel 28. Kombinatorische Topologie 257

28.1. Polyeder im R^n 257
28.2. Topologische Polyeder 258
28.3. Die Homologiegruppen eines Polyeders 259
28.4. Berechnung der Homologiegruppen in einfachen Fällen 261
28.5. Betti-Zahlen und Eulersche Charakteristik 263
28.6. Die Fundamentalgruppe 263
28.7. Die Kantenwegegruppe eines Polygonkomplexes 264
28.8. Beschreibung der Kantenwegegruppe durch Erzeugende und Relationen 265
28.9. Überlagerungsräume 267
28.10. Decktransformationen 268
28.11. Faktorräume 269

Kapitel 29. Die Idee der Riemannschen Fläche 270

29.1. Der Begriff der reellen n-dimensionalen Mannigfaltigkeit 270
29.2. Definition der Riemannschen Fläche 271
39.3. Orientierbarkeit der Riemannschen Flächen 272
29.4. Meromorphe Differentiale 272
29.5. Das Dirichletsche Integral auf einer Riemannschen Fläche 273
29.6. Das Dirichletsche Prinzip 275
29.7. Das Poissonsche Integral 276
29.8. Das Dirichletsche Prinzip für den Kreis 277
29.9. Der Glättungsprozeß 279
29.10. Ansatz zum Beweis des Existenzsatzes für Differentiale 282
29.11. Beweis des Dirichletschen Prinzips 283
29.12. Beweis des Riemannschen Existenzsatzes für Differentiale auf geschlossenen Riemannschen Flächen 288

Kapitel 30. Uniformisierung 291

30.1. Der Begriff der Uniformisierung 291
30.2. Der Riemannsche Abbildungssatz 291

30.3. Die Automorphismen der einfach zusammenhängenden Riemannschen Flächen 295
30.4. Normalform einer Riemannschen Fläche 295

Anhang 1. Ringe 298

A 1.1. Grundbegriffe über Ringe 298
A 1.2. Euklidische Ringe 299
A 1.3. Die Charakteristik eines Ringes 300
A 1.4. Moduln über euklidischen Ringen 300
A 1.5. Körperkonstruktion 303
A 1.6. Polynome über Körpern 304

Anhang 2. Mengentheoretische Topologie 306

A 2.1. Definition des topologischen Raumes 306
A 2.2. Kompakte Räume 307

Anhang 3. Die Gaußsche Integralformel 308

Anhang 4. Euklidische Vektor- und Punkträume 310

Anhang 5. Projektive Räume 314

Literaturverzeichnis 316

Verwendete und weiterführende neuere Literatur 318

Namenverzeichnis 319

Sachverzeichnis 321