

INHALTSVERZEICHNIS

B. A. Rosenfeld

Axiome und Grundbegriffe der Geometrie

§ 1. Das Entstehen grundlegender Begriffe der Geometrie	
1.1. Die Begriffe der Geometrie als Resultate von Abstraktionen	3
1.2. Die Entstehung der Geometrie in der alten Welt	4
§ 2. Die „Elemente“ des EUKLID	
2.1. EUKLID und seine Vorgänger	5
2.2. Die „Postulate“ EUKLIDS	8
2.3. Der Begriff der Stetigkeit bei EUKLID und seinen Vorgängern	9
2.4. Bewegungen	10
§ 3. Die Herausbildung der axiomatischen Methode	
3.1. Die Entstehung der nichteuklidischen Geometrie	11
3.2. Die axiomatische Methode in der Mathematik	12
§ 4. Modelle	
4.1. Modelle der euklidischen Ebene	15
4.2. Axiomatische Systeme in der Algebra	20
§ 5. Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit eines Axiomensystems	
5.1. Die Widerspruchsfreiheit eines Axiomensystems	21
5.2. Die Vollständigkeit eines Axiomensystems	23
§ 6. Die Axiomatik der Geometrie	
6.1. Die Grundbegriffe der euklidischen Geometrie	25
6.2. Die Inzidenzaxiome	26
6.3. Die Axiome der Anordnung	27
6.4. Axiome der Bewegung	30
6.5. Die Stetigkeitsaxiome	30
6.6. Das Parallelenaxiom	33
§ 7. Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit der Axiome der euklidischen Geometrie	
7.1. Die Einführung von Koordinaten	34
7.2. Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit der Axiome der euklidischen Ebene	37
§ 8. Die Unabhängigkeit der Axiome	
8.1. Die Unabhängigkeit eines Axiomensystems	38
8.2. Über die Unabhängigkeit der Axiome der euklidischen Geometrie	39
8.3. Abschließende Bemerkungen	40
Literatur	42

I. M. Jaglom und L. S. Atanasjan

Geometrische Transformationen

§ 1. Der Begriff der Transformation. Beispiele	
1.1. Geometrische Abbildungen	45
1.2. Geometrische Transformationen	47
1.3. Einige Typen geometrischer Transformationen	54
§ 2. Die Anwendung von Transformationen bei der Lösung geometrischer Aufgaben	
2.1. Einige Beispiele	57
2.2. Anwendung der Spiegelung	60
2.3. Die Anwendung geometrischer Transformationen auf die „Symmetrisierung“ von Figuren	63
§ 3. Die analytische Beschreibung geometrischer Transformationen	
3.1. Die Beschreibung geometrischer Transformationen durch Koordinaten	66
3.2. Analytische Methoden zum Studium von Transformationen	68
3.3. Lineare Transformationen	70
3.4. Komplexe Koordinaten der Punkte der geschlossenen Ebene	72
3.5. Birationale Transformationen	73
§ 4. Das Produkt von Abbildungen und Transformationen	
4.1. Die Definition des Produktes von Abbildungen. Beispiele	74
4.2. Einige allgemeine Eigenschaften des Produktes von Transformationen	79
4.3. Produkte von Bewegungen. Klassifizierung der Bewegungen	80
4.4. Anwendungen	83
4.5. Weitere Beispiele für Produkte von Transformationen	86
§ 5. Die inverse Transformation	
5.1. Die Definition der inversen Transformation	90
5.2. Die Involutionen	91
§ 6. Der allgemeine Begriff der Geometrie. Gruppen von geometrischen Transformationen	
6.1. Der Gegenstand der Geometrie	92
6.2. Geometrie und Transformationsgruppen	95
6.3. Verschiedene Geometrien. Die affine Geometrie	97
6.4. Transformationsgruppen in der Physik	102
§ 7. Die Gruppe der projektiven Transformationen	
7.1. Die Homologie	104
7.2. Die projektive Ebene	107
7.3. Die Anwendung von Homologien bei der Lösung von Aufgaben	109
7.4. Projektive Transformationen und projektive Geometrie	111
7.5. Koordinaten in der projektiven Ebene	112
7.6. Birationale Transformationen der projektiven Ebene	113

§ 8. Allgemeinere Arten von geometrischen Abbildungen	
8.1. Beispiele für allgemeinere geometrische Abbildungen	115
8.2. Allgemeine Transformationen in der Kreisgeometrie	117
8.3. Polaritäten. Das Dualitätsprinzip in der projektiven Geometrie	122
8.4. Die Fußpunkttransformation	127
8.5. Gruppen von allgemeinen Transformationen	130
§ 9. Das Übertragungsprinzip	
9.1. Einführung	133
9.2. Das Übertragungsprinzip der Kontraktionen in bezug auf eine Gerade	134
9.3. Das Übertragungsprinzip der Inversion	137
9.4. Das Übertragungsprinzip der Polarität	140
9.5. Das Übertragungsprinzip und Modelle für geometrische Systeme	149
Literatur	151

N. M. Beskin, W. G. Boltjanski, G. G. Maslowa, N. F. Tschetweruchin,
I. M. Jaglom

Allgemeine Prinzipien geometrischer Konstruktionen

§ 1. Einige Fragen der praktischen Verwendung geometrischer Konstruktionen	
1.1. Einleitung	155
1.2. Instrumente für die praktische Durchführung von geometrischen Konstruktionen	155
1.3. Die Genauigkeit einer Konstruktion	159
§ 2. Über die Lösung von Konstruktionsaufgaben in Abhängigkeit von gebräuchlichen Instrumenten	
2.1. Konstruktion mit Lineal, Zirkel, Zeichendreieck und Winkelmesser	162
2.2. Konstruktionen allein mit Hilfe des Zirkels (Konstruktionen von MOHR-MASCHERONI)	164
2.3. Konstruktionen allein mit Hilfe des Lineals (Konstruktionen von PONCELET-STEINER)	167
2.4. Über Konstruktionen mit Hilfe anderer Instrumente	171
§ 3. Über Konstruktionen in einem beschränkten Teil der Ebene	
3.1. Konstruktionen mit Hilfe eines Lineals beschränkter Länge	173
3.2. Konstruktionen in einem beschränkten Teil der Ebene	175
§ 4. Einige allgemeine Methoden zur Lösung von Konstruktionsaufgaben in der Ebene	
4.1. Die Aufspaltung der Bedingungen einer Aufgabe (die Methode der „geometrischen Örter“)	178
4.2. Ein allgemeines Lösungsschema für Konstruktionsaufgaben	180
4.3. Die algebraische Methode	181
§ 5. Die Anwendung von geometrischen Transformationen bei der Lösung von Konstruktionsaufgaben in der Ebene	
5.1. Allgemeine Bemerkungen	185
5.2. Beispiele	186

§ 6. Näherungsmethoden für geometrische Konstruktionen und ihre Anwendung in der Praxis	
6.1. Exakte und angenäherte Lösungen von Konstruktionsaufgaben	189
6.2. Die Rektifizierung eines Kreisbogens	190
6.3. Die graphisch-analytische Methode und die Methode der sukzessiven Approximationen	193
§ 7. Geometrische Konstruktionen im Raum	
7.1. Das System der Postulate für Konstruktionen in der Ebene	196
7.2. Ein Postulatensystem für „imaginäre Konstruktionen“ im Raum	198
7.3. Ein Beispiel	199
7.4. Abschließende Bemerkung	199
Literatur	201

J. I. Manin

Über die Lösbarkeit von Konstruktionsaufgaben mit Zirkel und Lineal

Einleitung	205
§ 1. Der geometrische Teil der Theorie	
1.1. Problemstellung	206
1.2. Konstruktionen mit Zirkel und Lineal	208
§ 2. Die Übertragung der Aufgabe in die Sprache der Algebra	
2.1. Ein grundlegendes Lemma	210
2.2. Folgerungen	215
2.3. Algebraische Betrachtungen	216
2.4. Der Fall der Polynome dritten Grades	217
2.5. Der Satz von GAUSS	219
§ 3. Klassische Probleme	
3.1. Die Verdoppelung eines Würfels	220
3.2. Die Dreiteilung eines Winkels	221
3.3. Die Konstruktion eines Dreiecks aus seinen Winkelhalbierenden	224
3.4. Die Konstruktion von regelmäßigen Vielecken	225
3.5. Die Quadratur des Kreises	226
Literatur	228

N. M. Beskin

Abbildungsverfahren

§ 1. Aufgabenstellung	
1.1. Abbildungen des Raumes auf die Ebene	231
1.2. Die Zyklographie	231

1.3. Das Verfahren von FEDOROW	232
1.4. Grundforderungen an ein Abbildungsverfahren	233
1.5. Nichteindeutigkeit der inversen Abbildung	234
1.6. Projektive Abbildungsverfahren	235
§ 2. Parallelprojektionen	
2.1. Die Eigenschaften der Parallelprojektion	236
2.2. Das Verfahren der Eintafel-Parallelprojektion	238
2.3. Gebundene und freie Bilder	240
2.4. Die Abbildung ebener Figuren	242
2.5. Beispiele	246
§ 3. Schiefe Axonometrie	
3.1. Der Satz von POHLKE und SCHWARZ	250
3.2. Vollständige und unvollständige Bilder	254
3.3. Der Begriff der schiefen Axonometrie	258
3.4. Bedingte Bilder	261
3.5. Beispiele für die Konstruktion axonometrischer Bilder	261
3.6. Allgemeine Konstruktionsmethoden axonometrischer Bilder	264
3.7. Die Axonometrisierung einer Zeichnung	270
3.8. Orthogonale (rechtwinklige) Axonometrie	274
§ 4. Das Verfahren von MONGE	
4.1. Kombinierte Bilder	279
4.2. Das Wesen des Verfahrens von MONGE	279
§ 5. Zentralprojektionen	
5.1. Die Eigenschaften der Zentralprojektion	280
5.2. Projektive Koordinaten	283
5.3. Die Verwendung projektiver Koordinaten bei der Konstruktion von Bildern	284
5.4. Der Begriff der zentralen Axonometrie	287
§ 6. Die Konstruktion von Zeichnungen	
6.1. Die Konstruktion von Projektionszeichnungen	291
6.2. Beispiele	291
Literatur	294

W. G. Boltjanski und I. M. Jaglom

Vektoren und ihre Anwendungen in der Geometrie

§ 1. Definition des Vektors	
1.1. Die Parallelverschiebung	297
1.2. Der Vektor	298
1.3. Antragen eines Vektors an einen Punkt	300
1.4. Vektoren und gerichtete Strecken	301

§ 2. Addition von Vektoren und Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl	
2.1. Addition von Vektoren	303
2.2. Entgegengesetzte Vektoren. Der Nullvektor	306
2.3. Eigenschaften der Summe von Vektoren	306
2.4. Subtraktion von Vektoren	309
2.5. Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl	311
2.6. Eigenschaften des Produktes von Vektor und Zahl	313
2.7. „Arithmetik der Figuren“	314
2.8. Das Teilen einer Strecke im gegebenen Verhältnis	316
2.9. Die Koordinaten eines Vektors	318
2.10. Lineare Abhängigkeit von Vektoren	320
2.11. Beispiele	321
§ 3. Das Skalarprodukt von Vektoren	
3.1. Die Projektion eines Vektors auf eine Achse	326
3.2. Eigenschaften der Projektion	327
3.3. Der Zusammenhang zwischen der Projektion und den Koordinaten	328
3.4. Der Zusammenhang mit trigonometrischen Funktionen	329
3.5. Beispiele	331
3.6. Definition und Eigenschaften des Skalarproduktes	335
3.7. Beispiele und Aufgaben	337
3.8. Die Eindeutigkeit des Skalarproduktes	343
§ 4. Das Schiefprodukt von Vektoren der Ebene	
4.1. Orientierte Flächeninhalte und das Schiefprodukt von Vektoren	345
4.2. Die Analogie zwischen Schief- und Skalarprodukt	350
4.3. Weitere Eigenschaften des Schiefproduktes	351
4.4. Beispiele und Aufgaben	353
4.5. Über die Eindeutigkeit des Schiefproduktes	357
§ 5. Das Spatprodukt und das Vektorprodukt von Vektoren im Raum	
5.1. Orientierte Rauminhalte und das Spatprodukt	359
5.2. Das Vektorprodukt und sein Zusammenhang mit dem Spatprodukt	360
5.3. Die Eigenschaften des Vektorproduktes und des Spatproduktes	363
5.4. Das zweifache Vektorprodukt	368
5.5. Beispiele	369
5.6. Über die Eindeutigkeit des Spat- und des Vektorproduktes	372
§ 6. Anwendung der Vektorrechnung auf die sphärische Geometrie und Trigonometrie	
6.1. Untersuchung sphärischer Dreiecke mit Hilfe von Vektoren	374
6.2. Der sphärische Kosinus- und Sinussatz	376
§ 7. Der Begriff des Vektorraumes	
7.1. Axiomatische Definition des Vektorraumes	377
7.2. Das arithmetische Modell des Vektorraumes	378
7.3. Die Vollständigkeit des Axiomensystems	380
7.4. Ein Axiomensystem der Elementargeometrie	384
7.5. Einige Typen mehrdimensionaler Räume	385
Literatur	390

W. G. Aschkinuse
Vielecke und Vielfache

§ 1. Die grundlegenden Definitionen. Der EULERSche Satz	393
1.1. Ebene Vielecke	394
1.2. Vielfache	396
1.3. Der EULERSche Satz	401
1.4. Die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen eines Vielfachs vom Geschlecht größer als Null	404
1.5. Ein anderer Beweis des EULERSchen Satzes	404
§ 2. Der kombinatorische (topologische) Typ eines Vielfachs. Der Satz von STEINITZ	
2.1. Kombinatorische Eigenschaften der Vielfache. Isomorphie	409
2.2. Das abstrakte Vielfach	411
2.3. Der Satz von STEINITZ	413
2.4. Dualität	417
§ 3. Das Netz eines Vielfachs. Der Satz von CAUCHY	
3.1. Das Netz eines Vielfachs. Die Existenz eines Vielfachs mit gegebenem Netz	420
3.2. Der Satz von CAUCHY. Grundlegende Hilfssätze	422
3.3. Der Beweis des CAUCHYSchen Satzes	426
3.4. Einige Verallgemeinerungen für gekrümmte Flächen	428
§ 4. Regelmäßige Vielecke und Vielfache und ihre Verallgemeinerungen	
4.1. Topologisch regelmäßige Vielfache	430
4.2. Regelmäßige Vielecke und Vielfache	433
4.3. Eckengleiche halbregelmäßige Vielfache	438
4.4. Flächengleiche halbregelmäßige Vielfache	447
4.5. Regelmäßige Vielecke und Vielfache mit Selbstüberschneidungen	450
Literatur	456

I. M. Jaglom
Geometrie der Kreise

Einleitung	459
------------	-----

A. Der Kreis als Punktmenge

§ 1. Verallgemeinerung des Kreisbegriffs	
1.1. Die orientierte Strecken- und Winkelmessung	459
1.2. Verschiedene Definitionen des Kreises. Das Berühren von Kreisen	461
§ 2. Potenzlinie und Potenzpunkt	
2.1. Die Potenz eines Punktes in bezug auf einen Kreis	464

2.2. Die Potenzlinie zweier Kreise	465
2.3. Der Potenzpunkt dreier Kreise	468
§ 3. Kreisbüschel und Kreisbündel	
3.1. Kreisbüschel	471
3.2. Kreisbündel	476
§ 4. Die Inversion	
4.1. Definition der Inversion	477
4.2. Eigenschaften der Inversion	480
4.3. Der Satz von PASCAL	484
§ 5. Punktgeometrie der Kreise	
5.1. Die Kreisebene	485
5.2. Die Kreistransformationen	487
5.3. Der Begriff der Kreisgeometrie	487
B. Der Kreis als Menge von Geraden	
§ 6. Gerichtete Kreise	
6.1. Die Analogie zwischen den Eigenschaften der Punkte und der Geraden	488
6.2. Eine neue Ausweitung des Kreisbegriffs	489
6.3. Die Tangentenentfernung zweier Kreise	493
§ 7. Ähnlichkeitspunkt und Ähnlichkeitsachse	
7.1. Die Potenz einer Geraden in bezug auf einen Kreis	494
7.2. Der Ähnlichkeitspunkt zweier Kreise	497
7.3. Die Ähnlichkeitsachse dreier Kreise	499
§ 8. Kreisreihen und Kreisnetze	
8.1. Kreisreihen	500
8.2. Kreisnetze	502
§ 9. Die Speerinversion	
9.1. Definition der Speerinversion	504
9.2. Die entartete Inversion und die spezielle Inversion	505
9.3. Eigenschaften der Speerinversion	508
9.4. Der Satz von BRIANCHON	512
§ 10. Speergeometrie der Kreise	
10.1. Speer-Kreistransformationen	513
10.2. Der Begriff der Speer-Kreisgeometrie	517
C. Der Kreis als Menge von Linienelementen	
§ 11. Der Kreis unter einem neuen Gesichtspunkt	
11.1. Die Ebene als Menge von Linienelementen	517
11.2. Eine neue Definition des Kreises	519
§ 12. Berührungsgeometrie der Kreise	
12.1. Berührungs-Kreistransformationen	520

12.2. Die Berührungsaufgabe von APOLLONIOS	522
12.3. Der Begriff der Berührungsgeometrie der Kreise	524
Literatur	526

B. A. Rosenfeld

Die Grundbegriffe der sphärischen Geometrie und Trigonometrie

§ 1. Die Grundbegriffe der sphärischen Geometrie	
1.1. Die Entstehung der sphärischen Geometrie	529
1.2. Punkte, Großkreise und Kleinkreise	530
1.3. Die Bewegungen einer Sphäre	532
1.4. Der Gegenstand der sphärischen Geometrie	534
1.5. Das Dualitätsprinzip	536
1.6. Winkel auf der Sphäre	537
§ 2. Sphärische Dreiecke	
2.1. Dreiecke und Zweiecke auf der Sphäre	539
2.2. Polardreiecke	540
2.3. Die Kongruenz sphärischer Dreiecke	542
2.4. Der Großkreis als Kürzeste	544
2.5. Der Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks	546
§ 3. Kleinkreise	
3.1. Kreise und Winkel auf der Sphäre	549
3.2. Die geodätische Krümmung eines Kleinkreises	551
3.3. Die GAUSS-BONNETsche Formel	553
§ 4. Trigonometrische Beziehungen im sphärischen Dreieck	
4.1. Der Seitenkosinussatz	555
4.2. Der Sinussatz	558
4.3. Die Fünf-Elemente-Formeln	559
4.4. Der Winkelkosinussatz	561
4.5. Die Kotangensformeln	562
4.6. Das rechtwinklige sphärische Dreieck	563
4.7. Die Berechnung sphärischer Dreiecke	565
Literatur	569

S. A. Skopez

Kegelschnitte

§ 1. Verschiedene Definitionen der Kegelschnitte	
1.1. Kegelschnitte als Schnitte eines geraden Kreiskegels	573
1.2. Die Leitlinieneigenschaft der Kegelschnitte	575
1.3. Die Brennpunkteigenschaften der Ellipsen und Hyperbeln	578

1.4. Kegelschnitte und das Problem des APOLLONIOS	580
1.5. Die analytische Definition der Kegelschnitte	583
§ 2. Die Ellipse	
2.1. Die Form der Ellipse	584
2.2. Lagebeziehungen von Ellipse und Gerade. Tangenten an die Ellipse	588
2.3. Eigenschaften der Brennpunkte der Ellipse	590
2.4. Mit der Ellipse verbundene Kreise. Zwei Sätze von PONCELET	592
2.5. Die Ellipse als Bild des Kreises bei einer Stauchung	595
§ 3. Die Hyperbel	
3.1. Die Form der Hyperbel	603
3.2. Eigenschaften der Brennpunkte der Hyperbel	606
3.3. Die Gleichung der Hyperbel	607
3.4. Lagebeziehungen von Hyperbel und Gerade. Tangenten an die Hyperbel ...	609
3.5. Eigenschaften der Asymptoten	612
§ 4. Die Parabel	
4.1. Die Form der Parabel. Die Gleichung der Parabel	614
4.2. Lagebeziehungen von Parabel und Gerade. Tangenten an die Parabel	616
§ 5. Gemeinsame Eigenschaften der Kegelschnitte	
5.1. Polargleichung der Kegelschnitte	620
5.2. Konfokale Kegelschnitte	622
Literatur	625
Namenverzeichnis	626
Sachverzeichnis	627