

# INHALTSVERZEICHNIS

W. A. Rochlin

## Flächen- und Rauminhalt

§ 1. Einleitung: Was ist Flächeninhalt?	
1.1. Grundeigenschaften des Flächeninhalts	3
1.2. Quadrierbare Figuren	4
1.3. Axiomatische Definition des Flächeninhalts	5
1.4. Das Problem der Existenz des Flächeninhalts	6
1.5. Konstruktive Definitionen des Flächeninhalts	7
1.6. Vergleich der Definition des Flächeninhalts mit der der elementaren Funktionen einer reellen Veränderlichen	8
1.7. Zusammenfassung	9
§ 2. Die Klasse der Vielecke	
2.1. Innere Punkte, äußere Punkte und Randpunkte	9
2.2. Offene und abgeschlossene Mengen	11
2.3. Konvexe Vielecke	12
2.4. Vieleckige Figuren	13
2.5. Operationen in der Klasse der vieleckigen Figuren	14
§ 3. Der Flächeninhalt auf der Klasse der vieleckigen Figuren	
3.1. Definition des Flächeninhalts	16
3.2. Einfachste Folgerungen aus der Definition	16
3.3. Berechnung des Inhalts eines Rechtecks	17
3.4. Berechnung des Inhalts eines Dreiecks und eines Trapezes	18
3.5. Berechnung des Inhalts einer beliebigen vieleckigen Figur	19
3.6. Strenge Monotonie	19
3.7. Beweis der Existenz und Einzigkeit des Flächeninhalts auf der Klasse der vieleckigen Figuren	19
3.8. Transformation des Flächeninhalts bei Ähnlichkeitsabbildungen	23
3.9. Transformation des Flächeninhalts bei Parallelprojektionen	24
3.10. Transformation des Flächeninhalts bei affinen Abbildungen	25
§ 4. Die Klasse der quadrierbaren Figuren	
4.1. Definition der quadrierbaren Figur	27
4.2. Bemerkung zur Wahl der Figuren $P$ und $Q$	27
4.3. Nullmengen	28
4.4. Ein Lemma über Begrenzungspunkte	29
4.5. Ein Quadrierbarkeitskriterium	29
4.6. Operationen in der Klasse der quadrierbaren Figuren	30

4.7. Kurven .....	30
4.8. Quadrierbarkeit klassischer Figuren .....	34
4.9. Der Kreis .....	34
4.10. Beispiele nicht quadrierbarer Mengen .....	35
§ 5. Der Flächeninhalt quadrierbarer Figuren	
5.1. Definition des Flächeninhalts .....	37
5.2. Einfache Folgerungen aus der Definition des Flächeninhalts .....	38
5.3. Der Flächeninhalt als obere bzw. untere Grenze .....	38
5.4. Der Flächeninhalt als Grenzwert .....	39
5.5. Satz über die Existenz und Einzigkeit des Flächeninhalts auf der Klasse der quadrierbaren Figuren .....	40
5.6. Nullmengen .....	41
5.7. Vollständigkeit der Klasse der quadrierbaren Figuren .....	41
5.8. Transformation des Flächeninhalts bei affinen Abbildungen .....	42
5.9. Berechnung von Flächeninhalten .....	42
5.10. Der Flächeninhalt auf der Klasse der quadrierbaren abgeschlossenen Bereiche	46
§ 6. Ein anderer Aufbau der Theorie des Flächeninhalts	
6.1. Einleitung .....	48
6.2. Der Flächeninhalt bezüglich eines Netzes .....	48
6.3. Quadrierbarkeitskriterien .....	50
6.4. Operationen in der Klasse der quadrierbaren Mengen .....	52
6.5. Die Grundeigenschaften des Flächeninhalts .....	53
6.6. Einzigkeitssatz .....	54
6.7. Die Invarianz des Flächeninhalts .....	55
6.8. Äquivalenz der beiden Definitionen des Flächeninhalts .....	55
§ 7. Rauminhalt	
7.1. Einleitung .....	56
7.2. Die Klasse der vieleckigen Körper .....	58
7.3. Definition des Rauminhalts auf der Klasse der vieleckigen Körper .....	59
7.4. Berechnung des Rauminhalts vieleckiger Körper .....	59
7.5. Existenz und Einzigkeit des Rauminhalts auf der Klasse der vieleckigen Körper .....	63
7.6. Transformation des Inhalts vieleckiger Körper bei geometrischen Abbildungen	65
7.7. Die Klasse der quadrierbaren Körper .....	66
7.8. Der Rauminhalt auf der Klasse der quadrierbaren Körper .....	66
7.9. Der Rauminhalt von Zylinder und Kegel .....	67
7.10. Der Rauminhalt der Kugel .....	69
7.11. Der Rauminhalt eines Rotationskörpers .....	70
7.12. Ein anderer Aufbau der Theorie des Rauminhalts .....	72
Anhang. Flächen- und Rauminhalt in der Ähnlichkeitsgeometrie	
1. Metrische Geometrie und Ähnlichkeitsgeometrie .....	72
2. Transformation des Flächen- und Rauminhalts bei Änderung der Einheitsstrecke .....	73

3. Übergang zur Ähnlichkeitsgeometrie .....	75
4. Maßeinheiten für Länge, Flächen- und Rauminhalt .....	76
Literatur .....	77

## W. G. Boltjanski

### Die Länge von Kurven und der Inhalt gekrümmter Flächen

§ 1. Die Länge von Polygonzügen	
1.1. Die Grundeigenschaften der Länge .....	81
1.2. Die Streckenlänge .....	81
1.3. Polygonzüge und deren Länge .....	85
1.4. Die Strecken als kürzeste Polygonzüge .....	86
1.5. Die Abweichung beschränkter Mengen .....	87
1.6. Die Halbstetigkeit der Länge .....	88
§ 2. Einfache Bögen	
2.1. Einige Eigenschaften der einfachen Bögen .....	91
2.2. Der Abstand zwischen einfachen Bögen .....	93
2.3. Beweis der Eigenschaft (a) .....	95
2.4. Beweis der Eigenschaften (b), (c), (d), (e) .....	96
2.5. Beweis der Eigenschaft (f) .....	97
2.6. Beweis der Eigenschaft (g) .....	98
2.7. Beweis der Eigenschaften (h) und (i) .....	98
§ 3. Rektifizierbare Kurven	
3.1. Einbeschriebene Streckenzüge .....	100
3.2. Definition der rektifizierbaren einfachen Bögen .....	101
3.3. Rektifizierbarkeit und einbeschriebene „Polygonzüge“ .....	102
3.4. Die Rektifizierbarkeit zusammengesetzter Bögen .....	103
3.5. Funktionen von beschränkter Variation .....	103
3.6. Zusammenhang mit der Theorie des Flächeninhalts .....	105
3.7. Einfache geschlossene Kurven .....	106
§ 4. Die Länge rektifizierbarer Kurven	
4.1. Axiomatische Definition der Länge .....	107
4.2. Beweis des Existenzsatzes .....	107
4.3. Beweis des Einzigkeitssatzes .....	108
4.4. Grundeigenschaften der Länge .....	111
4.5. Andere Definitionen der Bogenlänge .....	115
§ 5. Der Begriff des Inhalts für gekrümmte Flächen	
5.1. Die Grundeigenschaften des Inhalts gekrümmter Flächen .....	119
5.2. Einfache Flächen .....	120
5.3. Halbstetigkeit des Flächeninhalts .....	122

1.4. Maxima und Minima mit Nebenbedingungen .....	274
1.5. Beispiele .....	277
1.6. Die Methode von LAGRANGE.....	283
1.7. Funktionen von Geraden.....	285
1.8. Beispiele .....	289
§ 2. Einige berühmte geometrische Aufgaben	
2.1. Der TORRICELLISCHE Punkt .....	295
2.2. Eine Variante der Aufgabe über den TORRICELLISCHEN Punkt .....	300
2.3. Einige allgemeine Bemerkungen zum Aufsuchen größter und kleinster Werte geometrischer Größen .....	302
2.4. Das SCHWARZSCHE Dreieck.....	309
2.5. Ein einbeschriebenes Viereck mit kleinstem Umfang .....	314
2.6. Einbeschriebene und umbeschriebene Vielecke .....	317
2.7. Die isoperimetrische Aufgabe für Vielecke .....	323
§ 3. Extremwertaufgaben für konvexe Figuren	
3.1. Die isoperimetrische Aufgabe für beliebige Figuren .....	326
3.2. Die Sätze von JUNG und BLASCHKE .....	328
3.3. Abhängigkeiten zwischen den grundlegenden charakteristischen Größen konvexer Figuren .....	333
Literatur .....	335

## B. A. Rosenfeld und I. M. Jaglom

### Mehrdimensionale Räume

§ 1. Definition des mehrdimensionalen Raumes	
1.1. Axiomatische Definition .....	339
1.2. Die historische Entstehung des Begriffs des mehrdimensionalen Raumes ...	342
§ 2. Geraden und Ebenen	
2.1. Definition der Geraden und Ebenen. Parallelität und Orthogonalität .....	344
2.2. Der Durchschnitt und die Verbindung zweier Ebenen. Die GRASSMANNSCHE Formel .....	350
2.3. Anwendung rechteckiger Matrizen.....	352
2.4. Der Abstand zweier Ebenen .....	353
2.5. Winkel zwischen Ebenen .....	358
§ 3. Kugeln und Sphären	
3.1. Definitionen und grundlegende Eigenschaften .....	364
3.2. Die Potenz eines Punktes bezüglich einer Sphäre und die Inversion an einer Sphäre .....	366
3.3. Das Volumen einer Kugel und die Oberfläche einer Sphäre .....	368

§ 4. Vielfache	
4.1. Parallelepipede .....	369
4.2. Simplexe .....	371
4.3. Einige Simplexeigenschaften .....	373
4.4. Vielfache und der Satz von EULER .....	377
4.5. Regelmäßige Vielfache .....	378
Literatur .....	383

## B. A. Rosenfeld und I. M. Jaglom

### Nichteuklidische Geometrie

§ 1. Der Weg zur nichteuklidischen Geometrie LOBATSCHESKIS	
1.1. Beweisversuche für das Parallelenaxiom der euklidischen Geometrie .....	387
1.2. Die Untersuchungen LEGENDRES .....	390
1.3. Die nichteuklidische Geometrie LOBATSCHESKIS und die absolute Geometrie	395
§ 2. Die nichteuklidische Geometrie RIEMANN'S	
2.1. Die sphärische Geometrie und die nichteuklidische RIEMANN'Sche Geometrie	397
2.2. Die Grundbegriffe der RIEMANN'Schen nichteuklidischen Geometrie. Das Dualitätsprinzip .....	402
2.3. Beispiele für Sätze der RIEMANN'Schen Geometrie. Der Flächeninhalt von Dreiecken und Vielecken .....	404
2.4. Die dreidimensionale nichteuklidische RIEMANN'Sche Geometrie .....	409
§ 3. Pseudoeuklidische Geometrie	
3.1. Die pseudoeuklidische Ebene .....	412
3.2. Pseudoeuklidische Bewegungen. Beispiele für Sätze der pseudoeuklidischen Geometrie .....	416
3.3. Der dreidimensionale pseudoeuklidische Raum .....	420
3.4. Die geometrischen Grundlagen der speziellen Relativitätstheorie .....	425
§ 4. Die LOBATSCHESKISche nichteuklidische Geometrie	
4.1. Die Beziehungen der pseudoeuklidischen Geometrie zur Planimetrie von LOBATSCHESKI .....	431
4.2. Beispiele für Sätze der LOBATSCHESKISchen Geometrie .....	433
4.3. Bewegungen und Zyklen .....	440
4.4. Die dreidimensionale LOBATSCHESKISche Geometrie .....	442
§ 5. Die GALILEISche nichteuklidische Geometrie	
5.1. Die Galileische Geometrie der Ebene .....	445
5.2. Beispiele für Sätze der GALILEISchen Geometrie .....	448

§ 6. Nichteuklidische Geometrien und Transformationsgruppen	
6.1. Projektive Modelle für die LOBATSCHIEWSKISCHE und die RIEMANNSCHE Geometrie	450
6.2. Die „allgemeinen“ CAYLEY-KLEINSCHEN Geometrien	452
6.3. Die POINCARÉSCHEN Modelle der ebenen nichteuklidischen Geometrien	453
§ 7. Einige andere geometrische Systeme	
7.1. Die MINKOWSKI-BANACHSCHE Geometrie	458
7.2. Die Zahl $\pi$ in der MINKOWSKI-BANACHSCHEN Geometrie	462
7.3. Die innere Geometrie einer Fläche und die allgemeine RIEMANNSCHE Geometrie	464
7.4. Über die Geometrie der Realität	467
Literatur	469

## W. A. Efremitowitsch

### Grundbegriffe der Topologie

#### Einleitung

0.1. Metrische und qualitative Eigenschaften geometrischer Figuren	473
0.2. Topologische Abbildungen, Homöomorphismen	474
0.3. Zusammenhang	476
0.4. Topologische Invarianten	477
0.5. Innere und äußere Eigenschaften. Isotopie	478

#### § 1. Kurven und Flächen

1.1. Kurven	480
1.2. Lineare Komplexe	481
1.3. Die Zusammenhangszahl	482
1.4. Die topologische Invarianz der EULERSCHEN Charakteristik eines linearen Komplexes	485
1.5. Zweidimensionale Komplexe	486
1.6. Geschlossene Flächen	487
1.7. Berandete Flächen	489
1.8. Der EULERSCHE Satz. Die EULERSCHE Charakteristik eines zweidimensionalen Komplexes	491
1.9. Die EULERSCHE Charakteristik einer Fläche	492
1.10. Baryzentrische Unterteilungen	493
1.11. Die zu einer Zerlegung einer geschlossenen Fläche duale Zerlegung	494
1.12. Orientierung	495
1.13. Die projektive Ebene	498
1.14. Einufrige und zweifufrige Schnitte	501
1.15. Einfache Flächen	502
1.16. Die topologische Klassifikation der geschlossenen Flächen	506

§ 2. Mannigfaltigkeiten	
2.1. Einleitung	513
2.2. Dreidimensionale Zellen	514
2.3. Dreidimensionale Komplexe	515
2.4. Die baryzentrische Unterteilung eines dreidimensionalen Komplexes	516
2.5. Dreidimensionale Mannigfaltigkeiten	517
2.6. Beispiele für geschlossene Mannigfaltigkeiten	518
2.7. Die zu einer Zellenzerlegung einer Mannigfaltigkeit duale Zerlegung	522
2.8. Berandete Mannigfaltigkeiten	523
2.9. Die EULERSche Charakteristik einer berandeten Mannigfaltigkeit	524
2.10. Orientierbare und nichtorientierbare Mannigfaltigkeiten	525
2.11. Der Satz von HEEGAARD	526
2.12. Ketten. Homologie	528
§ 3. Die Grundbegriffe der allgemeinen Topologie	
3.1. Der Begriff des metrischen Raumes	532
3.2. Der Begriff des topologischen Raumes	535
3.3. Zusammenhang. Komponenten	537
3.4. Stetige Abbildungen	538
3.5. Der Begriff des Nachbarschaftsraumes	539
3.6. Gleichmäßig stetige Abbildungen	541
3.7. Der Begriff der Dimension	544
3.8. Das Lemma von SPERNER	545
3.9. Der Satz über die minimale Ordnung einer Überdeckung	548
3.10. Schlußbemerkungen	548
Literatur	550
<b>Namenverzeichnis</b>	<b>551</b>
<b>Sachverzeichnis</b>	<b>553</b>