

INHALTSVERZEICHNIS

W. A. Rochlin

Flächen- und Rauminhalt

| | |
|--|----|
| § 1. Einleitung: Was ist Flächeninhalt? | |
| 1.1. Grundeigenschaften des Flächeninhalts | 3 |
| 1.2. Quadrierbare Figuren | 4 |
| 1.3. Axiomatische Definition des Flächeninhalts | 5 |
| 1.4. Das Problem der Existenz des Flächeninhalts | 6 |
| 1.5. Konstruktive Definitionen des Flächeninhalts | 7 |
| 1.6. Vergleich der Definition des Flächeninhalts mit der der elementaren Funktionen einer reellen Veränderlichen | 8 |
| 1.7. Zusammenfassung | 9 |
| § 2. Die Klasse der Vielecke | |
| 2.1. Innere Punkte, äußere Punkte und Randpunkte | 9 |
| 2.2. Offene und abgeschlossene Mengen | 11 |
| 2.3. Konvexe Vielecke | 12 |
| 2.4. Vieleckige Figuren | 13 |
| 2.5. Operationen in der Klasse der vieleckigen Figuren | 14 |
| § 3. Der Flächeninhalt auf der Klasse der vieleckigen Figuren | |
| 3.1. Definition des Flächeninhalts | 16 |
| 3.2. Einfachste Folgerungen aus der Definition | 16 |
| 3.3. Berechnung des Inhalts eines Rechtecks | 17 |
| 3.4. Berechnung des Inhalts eines Dreiecks und eines Trapezes | 18 |
| 3.5. Berechnung des Inhalts einer beliebigen vieleckigen Figur | 19 |
| 3.6. Strenge Monotonie | 19 |
| 3.7. Beweis der Existenz und Einzigkeit des Flächeninhalts auf der Klasse der vieleckigen Figuren | 19 |
| 3.8. Transformation des Flächeninhalts bei Ähnlichkeitsabbildungen | 23 |
| 3.9. Transformation des Flächeninhalts bei Parallelprojektionen | 24 |
| 3.10. Transformation des Flächeninhalts bei affinen Abbildungen | 25 |
| § 4. Die Klasse der quadrierbaren Figuren | |
| 4.1. Definition der quadrierbaren Figur | 27 |
| 4.2. Bemerkung zur Wahl der Figuren P und Q | 27 |
| 4.3. Nullmengen | 28 |
| 4.4. Ein Lemma über Begrenzungspunkte | 29 |
| 4.5. Ein Quadrierbarkeitskriterium | 29 |
| 4.6. Operationen in der Klasse der quadrierbaren Figuren | 30 |

| | |
|--|----|
| 4.7. Kurven | 30 |
| 4.8. Quadrierbarkeit klassischer Figuren | 34 |
| 4.9. Der Kreis | 34 |
| 4.10. Beispiele nicht quadrierbarer Mengen | 35 |
| § 5. Der Flächeninhalt quadrierbarer Figuren | |
| 5.1. Definition des Flächeninhalts | 37 |
| 5.2. Einfache Folgerungen aus der Definition des Flächeninhalts | 38 |
| 5.3. Der Flächeninhalt als obere bzw. untere Grenze | 38 |
| 5.4. Der Flächeninhalt als Grenzwert | 39 |
| 5.5. Satz über die Existenz und Einzigkeit des Flächeninhalts auf der Klasse der quadrierbaren Figuren | 40 |
| 5.6. Nullmengen | 41 |
| 5.7. Vollständigkeit der Klasse der quadrierbaren Figuren | 41 |
| 5.8. Transformation des Flächeninhalts bei affinen Abbildungen | 42 |
| 5.9. Berechnung von Flächeninhalten | 42 |
| 5.10. Der Flächeninhalt auf der Klasse der quadrierbaren abgeschlossenen Bereiche | 46 |
| § 6. Ein anderer Aufbau der Theorie des Flächeninhalts | |
| 6.1. Einleitung | 48 |
| 6.2. Der Flächeninhalt bezüglich eines Netzes | 48 |
| 6.3. Quadrierbarkeitskriterien | 50 |
| 6.4. Operationen in der Klasse der quadrierbaren Mengen | 52 |
| 6.5. Die Grundeigenschaften des Flächeninhalts | 53 |
| 6.6. Einzigkeitssatz | 54 |
| 6.7. Die Invarianz des Flächeninhalts | 55 |
| 6.8. Äquivalenz der beiden Definitionen des Flächeninhalts | 55 |
| § 7. Rauminhalt | |
| 7.1. Einleitung | 56 |
| 7.2. Die Klasse der vieleckigen Körper | 58 |
| 7.3. Definition des Rauminhalts auf der Klasse der vieleckigen Körper | 59 |
| 7.4. Berechnung des Rauminhalts vieleckiger Körper | 59 |
| 7.5. Existenz und Einzigkeit des Rauminhalts auf der Klasse der vieleckigen Körper | 63 |
| 7.6. Transformation des Inhalts vieleckiger Körper bei geometrischen Abbildungen | 65 |
| 7.7. Die Klasse der quadrierbaren Körper | 66 |
| 7.8. Der Rauminhalt auf der Klasse der quadrierbaren Körper | 66 |
| 7.9. Der Rauminhalt von Zylinder und Kegel | 67 |
| 7.10. Der Rauminhalt der Kugel | 69 |
| 7.11. Der Rauminhalt eines Rotationskörpers | 70 |
| 7.12. Ein anderer Aufbau der Theorie des Rauminhalts | 72 |
| Anhang. Flächen- und Rauminhalt in der Ähnlichkeitsgeometrie | |
| 1. Metrische Geometrie und Ähnlichkeitsgeometrie | 72 |
| 2. Transformation des Flächen- und Rauminhalts bei Änderung der Einheitsstrecke | 73 |

| | |
|--|----|
| 3. Übergang zur Ähnlichkeitsgeometrie | 75 |
| 4. Maßeinheiten für Länge, Flächen- und Rauminhalt | 76 |
| Literatur | 77 |

W. G. Boltjanski

Die Länge von Kurven und der Inhalt gekrümmter Flächen

| | |
|--|-----|
| § 1. Die Länge von Polygonzügen | |
| 1.1. Die Grundeigenschaften der Länge | 81 |
| 1.2. Die Streckenlänge | 81 |
| 1.3. Polygonzüge und deren Länge | 85 |
| 1.4. Die Strecken als kürzeste Polygonzüge | 86 |
| 1.5. Die Abweichung beschränkter Mengen | 87 |
| 1.6. Die Halbstetigkeit der Länge | 88 |
| § 2. Einfache Bögen | |
| 2.1. Einige Eigenschaften der einfachen Bögen | 91 |
| 2.2. Der Abstand zwischen einfachen Bögen | 93 |
| 2.3. Beweis der Eigenschaft (a) | 95 |
| 2.4. Beweis der Eigenschaften (b), (c), (d), (e) | 96 |
| 2.5. Beweis der Eigenschaft (f) | 97 |
| 2.6. Beweis der Eigenschaft (g) | 98 |
| 2.7. Beweis der Eigenschaften (h) und (i) | 98 |
| § 3. Rektifizierbare Kurven | |
| 3.1. Einbeschriebene Streckenzüge | 100 |
| 3.2. Definition der rektifizierbaren einfachen Bögen | 101 |
| 3.3. Rektifizierbarkeit und einbeschriebene „Polygonzüge“ | 102 |
| 3.4. Die Rektifizierbarkeit zusammengesetzter Bögen | 103 |
| 3.5. Funktionen von beschränkter Variation | 103 |
| 3.6. Zusammenhang mit der Theorie des Flächeninhalts | 105 |
| 3.7. Einfache geschlossene Kurven | 106 |
| § 4. Die Länge rektifizierbarer Kurven | |
| 4.1. Axiomatische Definition der Länge | 107 |
| 4.2. Beweis des Existenzsatzes | 107 |
| 4.3. Beweis des Einzigkeitssatzes | 108 |
| 4.4. Grundeigenschaften der Länge | 111 |
| 4.5. Andere Definitionen der Bogenlänge | 115 |
| § 5. Der Begriff des Inhalts für gekrümmte Flächen | |
| 5.1. Die Grundeigenschaften des Inhalts gekrümmter Flächen | 119 |
| 5.2. Einfache Flächen | 120 |
| 5.3. Halbstetigkeit des Flächeninhalts | 122 |

| | |
|--|-----|
| 1.4. Maxima und Minima mit Nebenbedingungen | 274 |
| 1.5. Beispiele | 277 |
| 1.6. Die Methode von LAGRANGE..... | 283 |
| 1.7. Funktionen von Geraden..... | 285 |
| 1.8. Beispiele | 289 |
| | |
| § 2. Einige berühmte geometrische Aufgaben | |
| 2.1. Der TORRICELLISCHE Punkt | 295 |
| 2.2. Eine Variante der Aufgabe über den TORRICELLISCHEN Punkt | 300 |
| 2.3. Einige allgemeine Bemerkungen zum Aufsuchen größter und kleinster Werte geometrischer Größen | 302 |
| 2.4. Das SCHWARZSCHE Dreieck..... | 309 |
| 2.5. Ein einbeschriebenes Viereck mit kleinstem Umfang | 314 |
| 2.6. Einbeschriebene und umbeschriebene Vielecke | 317 |
| 2.7. Die isoperimetrische Aufgabe für Vielecke | 323 |
| | |
| § 3. Extremwertaufgaben für konvexe Figuren | |
| 3.1. Die isoperimetrische Aufgabe für beliebige Figuren | 326 |
| 3.2. Die Sätze von JUNG und BLASCHKE | 328 |
| 3.3. Abhängigkeiten zwischen den grundlegenden charakteristischen Größen konvexer Figuren | 333 |
| | |
| Literatur | 335 |

B. A. Rosenfeld und I. M. Jaglom

Mehrdimensionale Räume

| | |
|---|-----|
| § 1. Definition des mehrdimensionalen Raumes | |
| 1.1. Axiomatische Definition | 339 |
| 1.2. Die historische Entstehung des Begriffs des mehrdimensionalen Raumes ... | 342 |
| | |
| § 2. Geraden und Ebenen | |
| 2.1. Definition der Geraden und Ebenen. Parallelität und Orthogonalität | 344 |
| 2.2. Der Durchschnitt und die Verbindung zweier Ebenen. Die GRASSMANNSCHE Formel | 350 |
| 2.3. Anwendung rechteckiger Matrizen..... | 352 |
| 2.4. Der Abstand zweier Ebenen | 353 |
| 2.5. Winkel zwischen Ebenen | 358 |
| | |
| § 3. Kugeln und Sphären | |
| 3.1. Definitionen und grundlegende Eigenschaften | 364 |
| 3.2. Die Potenz eines Punktes bezüglich einer Sphäre und die Inversion an einer Sphäre | 366 |
| 3.3. Das Volumen einer Kugel und die Oberfläche einer Sphäre | 368 |

| | |
|---|-----|
| § 4. Vielfache | |
| 4.1. Parallelepipede | 369 |
| 4.2. Simplexe | 371 |
| 4.3. Einige Simplexeigenschaften | 373 |
| 4.4. Vielfache und der Satz von EULER | 377 |
| 4.5. Regelmäßige Vielfache | 378 |
| Literatur | 383 |

B. A. Rosenfeld und I. M. Jaglom

Nichteuklidische Geometrie

| | |
|---|-----|
| § 1. Der Weg zur nichteuklidischen Geometrie LOBATSCHESKIS | |
| 1.1. Beweisversuche für das Parallelenaxiom der euklidischen Geometrie | 387 |
| 1.2. Die Untersuchungen LEGENDRES | 390 |
| 1.3. Die nichteuklidische Geometrie LOBATSCHESKIS und die absolute Geometrie | 395 |
| § 2. Die nichteuklidische Geometrie RIEMANN'S | |
| 2.1. Die sphärische Geometrie und die nichteuklidische RIEMANN'Sche Geometrie | 397 |
| 2.2. Die Grundbegriffe der RIEMANN'Schen nichteuklidischen Geometrie. Das Dualitätsprinzip | 402 |
| 2.3. Beispiele für Sätze der RIEMANN'Schen Geometrie. Der Flächeninhalt von Dreiecken und Vielecken | 404 |
| 2.4. Die dreidimensionale nichteuklidische RIEMANN'Sche Geometrie | 409 |
| § 3. Pseudoeuklidische Geometrie | |
| 3.1. Die pseudoeuklidische Ebene | 412 |
| 3.2. Pseudoeuklidische Bewegungen. Beispiele für Sätze der pseudoeuklidischen Geometrie | 416 |
| 3.3. Der dreidimensionale pseudoeuklidische Raum | 420 |
| 3.4. Die geometrischen Grundlagen der speziellen Relativitätstheorie | 425 |
| § 4. Die LOBATSCHESKISche nichteuklidische Geometrie | |
| 4.1. Die Beziehungen der pseudoeuklidischen Geometrie zur Planimetrie von LOBATSCHESKI | 431 |
| 4.2. Beispiele für Sätze der LOBATSCHESKISchen Geometrie | 433 |
| 4.3. Bewegungen und Zyklen | 440 |
| 4.4. Die dreidimensionale LOBATSCHESKISche Geometrie | 442 |
| § 5. Die GALILEISche nichteuklidische Geometrie | |
| 5.1. Die Galileische Geometrie der Ebene | 445 |
| 5.2. Beispiele für Sätze der GALILEISchen Geometrie | 448 |

| | |
|--|-----|
| § 6. Nichteuklidische Geometrien und Transformationsgruppen | |
| 6.1. Projektive Modelle für die LOBATSCHIEWSKISCHE und die RIEMANNSCHE Geometrie | 450 |
| 6.2. Die „allgemeinen“ CAYLEY-KLEINSCHEN Geometrien | 452 |
| 6.3. Die POINCARÉSCHEN Modelle der ebenen nichteuklidischen Geometrien | 453 |
| § 7. Einige andere geometrische Systeme | |
| 7.1. Die MINKOWSKI-BANACHSCHE Geometrie | 458 |
| 7.2. Die Zahl π in der MINKOWSKI-BANACHSCHEN Geometrie | 462 |
| 7.3. Die innere Geometrie einer Fläche und die allgemeine RIEMANNSCHE Geometrie | 464 |
| 7.4. Über die Geometrie der Realität | 467 |
| Literatur | 469 |

W. A. Efremowitsch

Grundbegriffe der Topologie

Einleitung

| | |
|--|-----|
| 0.1. Metrische und qualitative Eigenschaften geometrischer Figuren | 473 |
| 0.2. Topologische Abbildungen, Homöomorphismen | 474 |
| 0.3. Zusammenhang | 476 |
| 0.4. Topologische Invarianten | 477 |
| 0.5. Innere und äußere Eigenschaften. Isotopie | 478 |

§ 1. Kurven und Flächen

| | |
|---|-----|
| 1.1. Kurven | 480 |
| 1.2. Lineare Komplexe | 481 |
| 1.3. Die Zusammenhangszahl | 482 |
| 1.4. Die topologische Invarianz der EULERSCHEN Charakteristik eines linearen Komplexes | 485 |
| 1.5. Zweidimensionale Komplexe | 486 |
| 1.6. Geschlossene Flächen | 487 |
| 1.7. Berandete Flächen | 489 |
| 1.8. Der EULERSCHE Satz. Die EULERSCHE Charakteristik eines zweidimensionalen Komplexes | 491 |
| 1.9. Die EULERSCHE Charakteristik einer Fläche | 492 |
| 1.10. Baryzentrische Unterteilungen | 493 |
| 1.11. Die zu einer Zerlegung einer geschlossenen Fläche duale Zerlegung | 494 |
| 1.12. Orientierung | 495 |
| 1.13. Die projektive Ebene | 498 |
| 1.14. Einufrige und zweifufrige Schnitte | 501 |
| 1.15. Einfache Flächen | 502 |
| 1.16. Die topologische Klassifikation der geschlossenen Flächen | 506 |

| | |
|--|------------|
| § 2. Mannigfaltigkeiten | |
| 2.1. Einleitung | 513 |
| 2.2. Dreidimensionale Zellen | 514 |
| 2.3. Dreidimensionale Komplexe | 515 |
| 2.4. Die baryzentrische Unterteilung eines dreidimensionalen Komplexes | 516 |
| 2.5. Dreidimensionale Mannigfaltigkeiten | 517 |
| 2.6. Beispiele für geschlossene Mannigfaltigkeiten | 518 |
| 2.7. Die zu einer Zellenzerlegung einer Mannigfaltigkeit duale Zerlegung | 522 |
| 2.8. Berandete Mannigfaltigkeiten | 523 |
| 2.9. Die EULERSche Charakteristik einer berandeten Mannigfaltigkeit | 524 |
| 2.10. Orientierbare und nichtorientierbare Mannigfaltigkeiten | 525 |
| 2.11. Der Satz von HEEGAARD | 526 |
| 2.12. Ketten. Homologie | 528 |
| § 3. Die Grundbegriffe der allgemeinen Topologie | |
| 3.1. Der Begriff des metrischen Raumes | 532 |
| 3.2. Der Begriff des topologischen Raumes | 535 |
| 3.3. Zusammenhang. Komponenten | 537 |
| 3.4. Stetige Abbildungen | 538 |
| 3.5. Der Begriff des Nachbarschaftsraumes | 539 |
| 3.6. Gleichmäßig stetige Abbildungen | 541 |
| 3.7. Der Begriff der Dimension | 544 |
| 3.8. Das Lemma von SPERNER | 545 |
| 3.9. Der Satz über die minimale Ordnung einer Überdeckung | 548 |
| 3.10. Schlußbemerkungen | 548 |
| Literatur | 550 |
| Namenverzeichnis | 551 |
| Sachverzeichnis | 553 |