

INHALT

8. Mathematik und Informatik	1
8.1. Überblick	1
8.1.1. Vom Wesen der Informatik	1
8.1.2. Notationen für das Kapitel	2
8.2. Algorithmen und Maschinen	4
8.2.1. Turingmaschinen	4
8.2.2. Registermaschinen	12
8.2.3. Berechenbarkeit und Church'sche These	17
8.2.4. Eingeschränkte Maschinen	21
8.2.5. Endliche Automaten	22
8.2.6. Boolesche Funktionen	28
8.3. Formale Sprachen	41
8.3.1. Allgemeine Grammatiken und Sprachklassen	41
8.3.2. Reguläre Sprachen	48
8.3.3. Kontextfreie Sprachen und Syntaxanalyse	49
1. Top-down-Analyse und $LL(k)$ -Sprachen (53) – 2. Bottom-up-Analyse und $LR(k)$ -Sprachen (56)	
8.3.4. Beispiele für weitere Sprachfamilien	59
8.4. Komplexitätstheorie	65
8.4.1. Hierarchiesätze	66
8.4.2. Die Translationstechnik	67
8.4.3. Der Satz von Savitch	68
8.4.4. Der Komplementabschluß nichtdeterministischer Platzklassen	68
8.4.5. Wichtige Komplexitätsklassen	69
8.4.6. Reduktionen und vollständige Probleme	71
8.4.7. NP-Vollständigkeit	73
8.4.8. Turingreduktion und Orakel	76
8.4.9. Schaltkreiskomplexität	77
8.5. Semantik	79
8.5.1. Operationelle Semantik	80
8.5.2. Denotationelle Semantik	82
8.5.3. Algebraische Semantik	84
8.6. Grundlegende Datenstrukturen	85
8.6.1. Einfache Datenstrukturen	86
1. Felder für Stapel und Schlangen (86) – 2. Verkettete, lineare Listen für Stapel und Schlangen (88)	
8.6.2. Datenstrukturen für Wörterbücher	89
1. Felder (89) – 2. Lineare Listen (90) – 3. Skiplisten (90) – 4. Suchbäume (91) – 5. Hashverfahren (95)	
8.6.3. Weitere Datenstrukturen	96
1. Andere Effizienzanforderungen an Wörterbücher (96) – 2. Datenstrukturen für andere Datentypen (99)	
8.7. Geometrische Datenverarbeitung	102
8.7.1. Projektion von Objekten	102
8.7.2. Freiformkurven und Freiformflächen	103
8.7.3. Basistransformationen	108

VI	Inhalt	
8.7.4.	Coons-Flächen	109
8.7.5.	Interpolation, Approximation mit Scattered Data Methoden oder mit B-Spline-Flächen	109
8.8.	Computeralgebra	111
8.8.1.	Begriffsbestimmung und Rückblick	111
8.8.2.	Eine elementare interaktive Sitzung	113
8.8.3.	Datenstruktur und Evaluierung	116
8.8.4.	Wichtige Algorithmen	119
8.8.5.	Programmierung und Effizienz	122
8.8.6.	Ausblick	124
8.9.	Wissensverarbeitung und Logik	126
8.9.1.	Logik	126
8.9.2.	Wissensrepräsentation	130
8.9.3.	Künstliche Intelligenz	133
	1. Deduktive Verfahren (133) – 2. Nichtmonotone Inferenzen (134) – 3. Maschinelles Lernen (135) – 4. Wissensbasierte Systeme (136) – 5. Natürlichsprachliche Systeme (136) – 6. Verstehen von Bildern (137)	
8.10.	Unschärfe Mengen und Fuzzy-Methoden	137
8.10.1.	Unschärfe und mathematische Modellierung	137
8.10.2.	Mengenalgebra	138
	1. Grundbegriffe für unscharfe Mengen (138) – 2. L -unscharfe Mengen (141) – 3. Mengenalgebraische Operationen für unscharfe Mengen (142) – 4. Durchschnitt und Vereinigung von Mengenfamilien (143) – 5. Interaktive Verknüpfungen unscharfer Mengen (144) – 6. Allgemeine Durchschnitts- und Vereinigungsbildungen (145) – 7. Ein Transferprinzip für Rechengesetze (146) – 8. Das kartesische Produkt unscharfer Mengen (147) – 9. Das Erweiterungsprinzip (147)	
8.10.3.	Unschärfe Zahlen und ihre Arithmetik	148
	1. Unschärfe Zahlen und Intervalle (148) – 2. Unschärfe Zahlen in L/R -Darstellung (150) – 3. Intervallarithmetik (151)	
8.10.4.	Unschärfe Variable	154
8.10.5.	Unschärfe Relationen	155
	1. Grundbegriffe (155) – 2. Unschärfe Schranken (155) – 3. Inverse Relationen, Relationenprodukte (156) – 4. Eigenschaften unscharfer Relationen (156) – 5. Unschärfe Äquivalenzrelationen (156)	
8.10.6.	Unschärfemaße	157
	1. Entropiemaße (157) – 2. Energiemaße (158) – 3. Unsicherheitsmaße (159)	
8.10.7.	Wahrscheinlichkeiten unscharfer Ereignisse	159
8.10.8.	Unschärfe Maße	160
	1. λ -unscharfe Maße (160) – 2. Glaubwürdigkeits- und Plausibilitätsmaße (161)	
9.	Operations Research	162
9.1.	Ganzzahlige lineare Optimierung	162
9.1.1.	Problemstellung, geometrische Deutung	162
9.1.2.	Schnittverfahren von Gomory	163
	1. Rein-ganzzahlige lineare Optimierungsaufgaben (163) – 2. Gemischt-ganzzahlige lineare Optimierungsaufgaben (165)	
9.1.3.	Verzweigungsverfahren	166
9.1.4.	Vergleich der Verfahren	168
9.2.	Nichtlineare Optimierung	169
9.2.1.	Übersicht und spezielle Aufgabentypen	169
	1. Allgemeine nichtlineare Optimierungsaufgabe im \mathbb{R}^n ; konvexe Optimierung (169) – 2. Lineare Quotientenoptimierung (169) – 3. Quadratische Optimierung (170) –	

	3.1. Verfahren von Wolfe (170) – 3.2. Iterationsverfahren von Hildreth/d'Esopo (173) – 3.3. Lineares Komplementaritätsproblem, Verfahren von Lemke (174)	
9.2.2.	Konvexe Optimierung	175
	1. Grundlegende theoretische Ergebnisse (175) – 2. Freie Optimierungsprobleme für unimodale Funktionen (177) – 2.1. Direkte Minimumsuche (178) – 2.2. Abstiegsverfahren (179) – 2.3. Methoden mit konjugierten Richtungen (180) – 3. Gradientenverfahren für restringierte Aufgaben (181) – 3.1. Grundbegriffe (181) – 3.2. Verfahren mit optimal brauchbarer Richtung (182) – 3.3. Methode der projizierten Gradienten (184) – 4. Schnittebenenverfahren (186) – 5. Umformung eines restringierten Problems in ein freies Problem (188) – 5.1. Methode der Penalty-Funktion (188) – 5.2. Methode der Barriere-Funktionen (SUMT) (189)	
9.3.	Dynamische Optimierung	190
9.3.1.	Modellstruktur und Grundbegriffe im deterministischen Fall	190
	1. Einführendes Beispiel, Bellmansches Prinzip (190) – 2. Stationäre Prozesse (192) – 3. Vorwärts- und Rückwärtslösung (192)	
9.3.2.	Theorie der Bellmanschen Funktionalgleichungen	193
	1. Aufgabenstellung und Klassifikation (193) – 2. Existenz- und Eindeigkeitssätze für die Typen I und II (193) – 3. Monotonie, Typ III (194) – 4. Grundsätzliches zur praktischen Lösung (195)	
9.3.3.	Beispiele für deterministische dynamische Optimierung	195
	1. Lagerhaltungsproblem (195) – 2. Aufteilungsproblem (196) – 3. Rangbestimmung im Netzplan (197)	
9.3.4.	Stochastische dynamische Modelle	197
	1. Verallgemeinerung des deterministischen Modells (197) – 2. Stochastisches Modell, Rolle des Bellmanschen Prinzips (198) – 3. Beispiel: Ein Lagerhaltungsproblem (199) – 3.1. Modell (199) – 3.2. Funktionalgleichung, (<i>s, S</i>)-Politik (199)	
9.4.	Graphentheorie	200
9.4.1.	Grundbegriffe der Theorie gerichteter Graphen	200
9.4.2.	Netzplantechnik	201
	1. Monotone Numerierung, Fordscher Algorithmus (201) – 2. Ermittlung der kritischen Wege (202) – 3. Termine und Pufferzeiten der Vorgänge (204) – 4. PERT (204)	
9.4.3.	Kürzeste Wege in Graphen	205
	1. Algorithmen (205) – 2. Beispiel (206)	
9.4.4.	Flußprobleme	207
	1. Grundbegriffe, Satz von Ford/Fulkerson (207) – 2. Maximalstromproblem (208) – 3. Problem des kostenminimalen Flusses (209)	
9.5.	Spieltheorie und Vektoroptimierung	210
9.5.1.	Klassifikation spieltheoretischer Modelle	210
9.5.2.	Matrixspiele	210
	1. Definitionen und theoretische Ergebnisse (210) – 2. Lösung mittels linearer Optimierung (212) – 3. Lösung mittels Iteration bzw. Relaxation (214)	
9.5.3.	Vektoroptimierung	215
	1. Problemstellung (215) – 2. Lösungsverfahren (216)	
9.6.	Kombinatorische Optimierungsaufgaben	217
9.6.1.	Charakterisierung und typische Beispiele	217
9.6.2.	Ungarische Methode zur Lösung von Zuordnungsaufgaben	218
9.6.3.	Verzweigungsalgorithmen („branch-and-bound“)	222
	1. Grundidee (222) – 2. Ein Beispiel „Einsatz diskreter Mittel“ (222) – 3. Anwendung auf ein Maschinenbelegungsproblem (224)	
9.6.4.	Polyederkombinatorik („cut and branch“)	226

10. Höhere Analysis	228
10.1. Die Grundideen der modernen Analysis und ihr Verhältnis zu den Naturwissenschaften	228
10.1.1. Die Grundstruktur der mathematischen Formulierung physikalischer Theorien	230
10.1.2. Drei tiefe Sätze der Analysis	232
10.1.3. Glattheit	239
10.2. Tensoranalysis, Differentialformen und mehrfache Integrale	239
10.2.1. Tensordefinition	240
10.2.2. Beispiele für Tensoren	242
10.2.3. Beispiele für Pseudotensoren	245
10.2.4. Tensoralgebra	246
10.2.5. Tensoranalysis	249
1. Kovariante Ableitung (249) – 2. Metrikfreie Differentiationsprozesse (251)	
10.2.6. Tensorgleichungen und das Indexprinzip der mathematischen Physik	253
10.2.7. Der Cartansche Kalkül der alternierenden Differentialformen	254
1. Algebraische Operationen (255) – 2. Differentiation (256) – 3. Differentialgleichungen für Formen (258) – 4. Variablenwechsel (260) – 5. Integration von Differentialformen (262) – 6. Operationen für Differentialformen, die von einem metrischen Tensor abhängen (266)	
10.2.8. Anwendungen in der speziellen Relativitätstheorie	267
10.2.9. Anwendungen in der Elektrodynamik	272
10.2.10. Die geometrische Interpretation des elektromagnetischen Feldes als Krümmung eines Hauptfaserbündels (Eichfeldtheorie)	278
10.3. Integralgleichungen	281
10.3.1. Allgemeine Begriffe	281
10.3.2. Einfache Integralgleichungen, die durch Differentiation auf gewöhnliche Differentialgleichungen zurückgeführt werden können	282
10.3.3. Integralgleichungen, die durch Differentiation gelöst werden können	283
10.3.4. Die Abelsche Integralgleichung	284
10.3.5. Volterrasche Integralgleichungen zweiter Art	286
10.3.6. Fredholmsche Integralgleichungen zweiter Art und die Fredholmsche Alternative	288
10.3.7. Integralgleichungen zweiter Art mit Produktkernen und ihre Zurückführung auf lineare Gleichungssysteme	293
10.3.8. Fredholmsche Integralgleichungen zweiter Art mit symmetrischen Kernen (Hilbert-Schmidt-Theorie)	296
10.3.9. Anwendung auf Randwertaufgaben, Fourierreihen und die schwingende Saite; die Methode der Greenschen Funktion	301
10.3.10. Integralgleichungen und klassische Potentialtheorie	304
10.3.11. Singuläre Integralgleichungen und das Riemann-Hilbert-Problem	305
10.3.12. Wiener-Hopf-Integralgleichungen	306
10.3.13. Näherungsverfahren	307
1. Quadraturverfahren (307) – 2. Iterationsverfahren (309) – 3. Das Galerkinverfahren (309)	
10.4. Distributionen und lineare partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik	309
10.4.1. Definition von Distributionen	311
10.4.2. Das Rechnen mit Distributionen	313
10.4.3. Die Grundlösung linearer partieller Differentialgleichungen	316
10.4.4. Anwendung auf Randwertprobleme	318
10.4.5. Anwendung auf Anfangswertprobleme	319
10.4.6. Die Fouriertransformation	319
10.4.7. Pseudodifferentialoperatoren	322
10.4.8. Fourierintegraloperatoren	325

10.5. Moderne Maß- und Integrationstheorie	328
10.5.1. Maß	329
10.5.2. Integral	331
10.5.3. Eigenschaften des Integrals	333
10.5.4. Grenzwertsätze	334
10.5.5. Eigenschaften des Lebesgueintegrals auf dem \mathbb{R}^n	334
10.5.6. Das eindimensionale Lebesgue-Stieltjes-Integral	336
10.5.7. Maße auf topologischen Räumen	337
11. Lineare Funktionalanalysis und ihre Anwendungen	338
11.1. Grundideen	338
11.1.1. Integralgleichungen als Operatorgleichungen und Fredholmoperatoren	342
11.1.2. Differentialgleichungen als Operatorgleichungen und verallgemeinerte Ableitungen	343
11.1.3. Das Konvergenzproblem für Fourierreihen	346
11.1.4. Das Dirichletproblem und das Vervollständigungsprinzip	347
11.1.5. Das Dirichletproblem und die Methode der finiten Elemente (numerische Funktionalanalysis)	351
11.1.6. Ein Blick in die Geschichte der Funktionalanalysis	352
11.2. Räume	354
11.2.1. Topologische Räume	354
11.2.2. Metrische Räume	358
11.2.3. Lineare Räume	361
1. Lineare Algebra (361) – 2. Multilineare Algebra (367)	
11.2.4. Banachräume	370
1. Beispiele für Banachräume (371) – 2. Lineare stetige Operatoren (376) – 3. Lineare stetige Funktionale und Dualität (377) – 4. Konstruktion neuer Banachräume (378)	
11.2.5. Hilberträume	378
1. Standardbeispiele für Hilberträume (380) – 2. Der adjungierte Operator (381) – 3. Der duale Operator (382)	
11.2.6. Sobolevräume	383
1. Die Sobolevschen Einbettungssätze (385) – 2. Verallgemeinerte Randwerte (386) – 3. Äquivalente Normen (386) – 4. Die Interpolationsungleichungen von Gagliardo-Nirenberg (387) – 5. Der Moser-Kalkül (Produktregel) (387)	
11.2.7. Lokalkonvexe Räume	388
11.3. Existenzsätze und ihre Anwendungen auf Variationsprobleme, Differential- und Integralgleichungen	390
11.3.1. Vollständige Orthonormalsysteme und spezielle Funktionen der mathematischen Physik	390
11.3.2. Quadratische Minimumprobleme und das Dirichletproblem	393
11.3.3. Die Gleichung $\lambda u - Ku = f$ für kompakte symmetrische Operatoren K und Integralgleichungen (Hilbert-Schmidt-Theorie)	397
11.3.4. Die Gleichung $Au = f$ für Fredholmoperatoren	399
1. Die Gleichung $\lambda u - Ku = f$ in Banachräumen (400) – 2. Die Gleichung $\lambda u - Ku = f$ in Hilberträumen (401) – 3. Duale Paare (402) – 4. Gleichungen für Bilinearformen (403) – 5. Eigenschaften von Fredholmoperatoren (404)	
11.3.5. Die Fortsetzung von Friedrichs und lineare partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik	405
1. Anwendung auf die Poissongleichung (407) – 2. Zeitabhängige Gleichungen (408)	
11.3.6. Halbgruppen	408
11.4. Näherungsverfahren und numerische Funktionalanalysis	409
11.4.1. Iterationsverfahren	410

11.4.2.	Das Ritzsche Verfahren und die Methode der finiten Elemente	411
	1. Das Ritzsche Verfahren für quadratische Variationsprobleme (411) – 2. Anwendung auf die Methode der finiten Elemente (412)	
11.4.3.	Das duale Ritzsche Verfahren (Trefftzches Verfahren)	413
11.4.4.	Das universelle Galerkinverfahren (Projektionsverfahren)	415
	1. Das abstrakte Galerkinverfahren (415) – 2. Die Formulierung der Galerkingleichungen für Differential- und Integralgleichungen (416)	
11.4.5.	Projektions-Iterationsverfahren	420
11.4.6.	Der Hauptsatz der numerischen Funktionalanalysis	421
11.5.	Die Prinzipien der linearen Funktionalanalysis	422
11.5.1.	Das Hahn-Banach-Theorem und Optimierungsaufgaben	422
	1. Ein Extremalprinzip (423) – 2. Der Hauptsatz der Approximationstheorie (Dualitätsprinzip) (424) – 3. Trennung konvexer Mengen (426)	
11.5.2.	Das Bairesche Kategorieprinzip	427
11.5.3.	Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit	428
11.5.4.	Das Theorem über offene Abbildungen und korrekt gestellte Probleme	428
11.5.5.	Das Theorem über den abgeschlossenen Graphen	428
11.5.6.	Das Theorem über den abgeschlossenen Wertebereich (Fredholmsche Alternative)	431
11.5.7.	Kompaktheit und ein Extremalprinzip	431
	1. Die schwache Konvergenz (432) – 2. Die schwache* Konvergenz (433) – 3. Anwendung der schwachen* Konvergenz von Funktionalen in der numerischen Funktionalanalysis (434) – 4. Topologien für Operatoren (436) – 5. Das Theorem von Krein-Milman und lineare Optimierung (436)	
11.6.	Das Spektrum	437
11.6.1.	Grundbegriffe	437
11.6.2.	Die Spektralschar selbstadjungierter Operatoren	439
11.6.3.	Funktionen von Operatoren	442
11.6.4.	Störungstheorie	445
11.6.5.	Streutheorie	447
11.6.6.	Operatorfunktionen und die Interpolation von Räumen und Operatoren	447
11.7.	Operatoralgebren (Algebra und Analysis)	449
11.7.1.	Grundbegriffe	449
11.7.2.	Kompakte Operatoren und Operatorenideale	451
11.7.3.	Darstellungstheorie für Operatoralgebren	453
11.7.4.	Anwendungen auf die Spektraltheorie normaler Operatoren	454
11.8.	Differentialoperatoren und Reihenentwicklungen der mathematischen Physik – eine Perle der Mathematik	455
12.	Nichtlineare Funktionalanalysis und ihre Anwendungen	459
12.1.	Fixpunktsätze und ihre Anwendungen auf Differential- und Integralgleichungen	459
12.1.1.	Der Fixpunktsatz von Banach und Iterationsverfahren	459
12.1.2.	Der Fixpunktsatz von Schauder und Kompaktheit	461
12.1.3.	Der Fixpunktsatz von Bourbaki-Kneser und Halbordnung	462
12.2.	Die Methode der Unter- und Oberlösungen, Iterationsverfahren in halbgeordneten Banachräumen	462
12.3.	Differentiation von Operatoren	463
12.4.	Das Newtonverfahren	465
12.5.	Der Satz über implizite Funktionen	467

	Inhalt	XI
12.6. Bifurkationstheorie		468
12.6.1. Notwendige Bifurkationsbedingung		468
12.6.2. Eine wichtige hinreichende Bedingung für Bifurkation		469
12.6.3. Hinreichende und notwendige Bifurkationsbedingung für Probleme mit Variationsstruktur		470
12.6.4. Stabilitätsverlust und Bifurkation		470
12.6.5. Die allgemeine Methode der Bifurkationsgleichung (Methode von Ljapunov-Schmidt)		471
12.7. Extremalprobleme		472
12.7.1. Minimumprobleme		472
12.7.2. Sattelpunktprobleme		474
12.7.3. Das Gebirgspaßtheorem		475
12.7.4. Die Ljapunov-Schnirelman-Theorie für Eigenwertprobleme		475
12.8. Monotone Operatoren		476
12.9. Der Abbildungsgrad und topologische Existenzsätze		477
12.10. Nichtlineare Fredholmoperatoren		480
13. Dynamische Systeme – Mathematik der Zeit		481
13.1. Grundideen		481
13.1.1. Einführende Beispiele		482
13.1.2. Klassifikation dynamischer Systeme		483
13.1.3. Konstruktion dynamischer Systeme durch autonome Differentialgleichungssysteme		485
13.2. Dynamische Systeme in der Ebene		485
13.2.1. Qualitatives Verhalten linearer Systeme in der Umgebung stationärer Punkte		485
13.2.2. Nichtlineare Störungen		487
13.2.3. Grenzzyklen		487
13.3. Stabilität		488
13.3.1. Stabilität von stationären Punkten		488
13.3.2. Strukturelle Stabilität		489
13.4. Bifurkation		489
13.4.1. Grundidee		489
13.4.2. Entstehung neuer Gleichgewichtszustände (erste Elementarkatastrophe)		489
13.4.3. Hopfbifurkation		490
13.5. Ljapunovfunktion		490
13.6. Die Methode der Zentrumsmannigfaltigkeit zur vereinfachten Untersuchung der Dynamik (Versklavungsprinzip)		492
13.7. Attraktoren		496
13.8. Diskrete dynamische Systeme und Iterationsverfahren		496
13.9. Fraktale		498
13.10. Übergang zum Chaos		499
13.10.1. Kontinuierliche dynamische Systeme		499
13.10.2. Diskrete dynamische Systeme und Periodenverdopplung		500
13.11. Ergodizität		502
13.12. Störung quasiperiodischer Bewegungen in der Himmelsmechanik (KAM-Theorie), Resonanzphänomene und Relaxation		503
13.12.1. Grundideen		503

13.12.2. Typische Resonanzerscheinungen	504
13.12.3. Relaxation (quasistatische Näherung)	505
13.13. Singularitätentheorie (Katastrophentheorie)	505
13.13.1. Reguläres und singuläres Verhalten	506
13.13.2. Strukturelle Stabilität	508
13.13.3. Wesentliche Terme in der Taylorentwicklung und Normalformen	509
13.13.4. Parameterfamilien und Elementarkatastrophen	510
13.14. Information und Chaos	511
13.15. Entropie, Strukturbildung und Mathematik der Selbstorganisation	513
13.16. Lineare partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik als unendlichdimensionale dynamische Systeme	513
13.16.1. Grundideen	513
13.16.2. Die Poissongleichung	515
13.16.3. Das Eigenwertproblem für die Laplacegleichung	516
13.16.4. Die Wärmeleitungsgleichung	517
13.16.5. Die Wellengleichung	518
13.16.6. Die Schrödingergleichung	519
13.17. Flüsse und Semiflüsse auf Banachräumen und Operatordifferentialgleichungen	521
13.17.1. Konstruktion von Flüssen und Semiflüssen	522
13.17.2. Anwendung auf homogene Differentialgleichungen	523
13.17.3. Anwendung auf inhomogene Differentialgleichungen	523
13.17.4. Die Formel von Dyson für zeitabhängige Differentialgleichungen	524
13.18. Die allgemeine Dynamik von Quantensystemen	524
13.18.1. Bewegung eines Quantenteilchens auf der x -Achse	526
13.18.2. Das Wasserstoffatom	527
13.18.3. Streuprozesse	528
14. Nichtlineare partielle Differentialgleichungen in den Naturwissenschaften	530
14.1. Grundideen	531
14.2. Reaktions-Diffusionsgleichungen	535
14.2.1. Fortschreitende Wellen	535
14.2.2. Globale Attraktoren	536
14.2.3. Ein allgemeiner Existenzsatz für quasilineare parabolische Systeme	537
14.3. Nichtlineare Wellengleichungen	538
14.3.1. Die Lebensdauer von glatten Lösungen	538
14.3.2. Ein allgemeiner Existenzsatz für nichtlineare symmetrische hyperbolische Systeme	539
14.3.3. Der quasilineare Spezialfall	540
14.3.4. Anwendungen	540
14.4. Die Gleichungen der Hydrodynamik	541
14.4.1. Die Eulerschen Gleichungen für ideale Flüssigkeiten	541
14.4.2. Die Navier-Stokesschen Differentialgleichungen für viskose Flüssigkeiten und Turbulenz	542
14.5. Variationsprobleme	545
14.5.1. Grundidee	545
14.5.2. Die allgemeinen Euler-Lagrange-Gleichungen	548
14.5.3. Symmetrie und Erhaltungsgrößen in der Natur (das Noethertheorem)	549
14.5.4. Ein Existenzsatz für stationäre Erhaltungsgleichungen	551
14.5.5. Ein allgemeiner Existenzsatz für Variationsprobleme	552

14.6.	Die Gleichungen der nichtlinearen Elastizitätstheorie	553
14.6.1.	Das Variationsproblem der Elastostatik	553
14.6.2.	Anwendung auf nichtlineares Henckymaterial und lineares Material	555
14.6.3.	Die Grundgleichungen der Elastodynamik	557
14.6.4.	Der globale Existenz- und Eindeigkeitssatz der nichtlinearen Elastodynamik	558
14.6.5.	Balkenbiegung und Bifurkation	559
14.7.	Die Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie	560
14.8.	Die Gleichungen der Eichfeldtheorie und Elementarteilchen	560
14.8.1.	Grundideen	560
14.8.2.	Konventionen	563
14.8.3.	Die Diracgleichung für die Bewegung eines relativistischen Elektrons	563
14.8.4.	Das Postulat der lokalen Eichinvarianz und die Maxwell-Dirac-Gleichungen der Quantenelektrodynamik	566
14.8.5.	Die Grundideen der Quantenfeldtheorie	567
14.8.6.	$SU(N)$ -Eichfeldtheorie	569
14.9.	Die Geometrisierung der modernen Physik (Kraft = Krümmung)	571
15.	Mannigfaltigkeiten	575
15.1.	Grundbegriffe	575
15.1.1.	Definition einer Mannigfaltigkeit	576
15.1.2.	Konstruktion von Mannigfaltigkeiten im \mathbb{R}^n	578
15.1.3.	Orientierbarkeit	579
15.1.4.	Klassischer Tensorkalkül auf Mannigfaltigkeiten	580
15.1.5.	Differentiation von klassischen Tensorfeldern	581
15.1.6.	Tangentenvektoren und Tangentialraum	582
15.1.7.	Kotangentenvektoren und Kotangentialraum	584
15.1.8.	Untermannigfaltigkeiten	585
15.1.9.	Mannigfaltigkeiten mit Rand	585
15.1.10.	Mannigfaltigkeiten als topologische Räume	586
15.2.	Glatte Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten	587
15.3.	Konstruktion von Mannigfaltigkeiten	589
15.4.	Invariante Analysis auf Mannigfaltigkeiten	590
15.4.1.	Tensoralgebra	591
15.4.2.	Tensorfelder	593
15.4.3.	Differentialformen	593
15.4.4.	Transformation von Tensorfeldern mittels Diffeomorphismen	597
15.4.5.	Dynamische Systeme auf Mannigfaltigkeiten	599
15.4.6.	Lieableitung von Tensorfeldern	600
15.4.7.	Der Satz von Frobenius	603
15.5.	Anwendungen in der Thermodynamik	607
15.6.	Klassische Mechanik und symplektische Geometrie	609
15.6.1.	Grundidee	609
15.6.2.	Klassische Mechanik auf Mannigfaltigkeiten	610
15.6.3.	Symplektische Geometrie	611
15.7.	Anwendungen in der statistischen Physik	612
15.7.1.	Das Grundmodell der statistischen Physik	612
15.7.2.	Anwendungen auf die Quantenstatistik	614
15.7.3.	Klassische Gibbsche Statistik im Phasenraum	615
15.8.	Operatoralgebren in der Physik und nichtkommutative Geometrie	616

16.	Riemannsche Geometrie und allgemeine Relativitätstheorie	618
16.1.	Der klassische Kalkül	618
16.1.1.	Messung von Längen, Winkeln und Volumina	619
16.1.2.	Krümmung	620
16.1.3.	Paralleltransport	621
16.1.4.	Geodätische Kurven (verallgemeinerte Geraden)	621
16.1.5.	Anwendung auf die nichteuklidische Geometrie	622
16.1.6.	Der δ -Operator und der Laplaceoperator	623
16.1.7.	Die Volumenform	624
16.1.8.	Der \star -Operator von Hodge	625
16.2.	Der invariante Kalkül	625
16.2.1.	Messung von Längen, Winkeln und Volumina	626
16.2.2.	Metrik auf eigentlichen Riemannschen Mannigfaltigkeiten	626
16.2.3.	Kovariante Differentiation und Paralleltransport auf Mannigfaltigkeiten mit linearem Zusammenhang	627
16.2.4.	Torsion und Krümmung auf Mannigfaltigkeiten mit linearem Zusammenhang	628
16.2.5.	Kovariante Differentiation und Krümmung auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten	630
16.2.6.	Geodätische	630
16.3.	Abbildungen zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten	631
16.3.1.	Längentreue Abbildungen	632
16.3.2.	Winkeltreue (konforme) Abbildungen	634
16.4.	Kählermannigfaltigkeiten	635
16.5.	Anwendungen auf die allgemeine Relativitätstheorie	637
16.5.1.	Physikalische Grundidee	637
16.5.2.	Die Grundgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie	637
16.5.3.	Die Schwarzschildmetrik eines Zentralkörpers	639
16.5.4.	Schwarze Löcher	640
16.5.5.	Die Expansion des Weltalls (Urknall)	640
17.	Liegruppen, Liealgebren und Elementarteilchen – Mathematik der Symmetrie	643
17.1.	Grundideen	644
17.2.	Gruppen	653
17.2.1.	Grundbegriffe	653
17.2.2.	Morphismen von Gruppen	654
17.2.3.	Darstellungen von Gruppen	656
17.2.4.	Kategorien und Funktoren zur Beschreibung allgemeiner Strukturprinzipien der modernen Mathematik	659
17.3.	Darstellungen endlicher Gruppen	661
17.4.	Liealgebren	663
17.4.1.	Grundbegriffe	663
17.4.2.	Beispiele von Liealgebren	664
17.4.3.	Darstellungen von Liealgebren	666
17.5.	Liegruppen	667
17.5.1.	Grundbegriffe	667
17.5.2.	Der enge Zusammenhang zwischen Liegruppen und ihren Liealgebren (das Liesche Linearisierungsprinzip)	669
17.5.3.	Struktur von Liegruppen	670
17.5.4.	Beispiele	670

17.5.5.	Physikalische Interpretation der Liealgebra einer Liegruppe	671
17.5.6.	Darstellungen	672
17.6.	Darstellungen der Permutationsgruppe und Darstellungen klassischer Gruppen	674
17.7.	Anwendungen auf den Elektronenspin	678
17.8.	Anwendungen auf das Quarkmodell der Elementarteilchen	681
17.9.	Darstellungen kompakter Liegruppen und spezielle Funktionen der mathematischen Physik	689
17.10.	Transformationsgruppen und die Symmetrie von Mannigfaltigkeiten	692
17.11.	Differentialgleichungen und Symmetrie	696
17.11.1.	Invariante Funktionen	697
17.11.2.	Invariante Differentialgleichungen	698
17.11.3.	Anwendungen auf gewöhnliche Differentialgleichungen	699
17.11.4.	Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen	700
17.12.	Die innere Symmetrie Liescher Gruppen und ihrer Liealgebren	701
17.13.	Differentialformen mit Werten in einer Liealgebra	704
18.	Topologie – Mathematik des qualitativen Verhaltens	705
18.1.	Das Ziel der Topologie	705
18.2.	Die Bedeutung der Eulerschen Charakteristik	709
18.2.1.	Der Hauptsatz der topologischen Flächentheorie	709
18.2.2.	Dynamische Systeme auf Mannigfaltigkeiten	710
18.2.3.	Morsetheorie für Extremalprobleme auf Mannigfaltigkeiten	710
18.2.4.	Der Satz von Gauß-Bonnet-Chern	711
18.3.	Homotopie (Deformation)	713
18.3.1.	Erweiterung stetiger Abbildungen	714
18.3.2.	Der Abbildungsgrad	714
18.3.3.	Die Fundamentalgruppe	715
18.3.4.	Überlagerungsmannigfaltigkeiten	717
18.4.	Der anschauliche Hintergrund der Dualität zwischen Homologie und Kohomologie	718
18.5.	De Rham'sche Kohomologie	721
18.6.	Homologie	725
18.6.1.	Die Homologie eines Dreiecks	725
18.6.2.	Singuläre Homologie topologischer Räume	727
18.6.3.	Singuläre Kohomologie topologischer Räume	729
18.6.4.	Der Satz von de Rham über Differentialgleichungen für Formen auf Mannigfaltigkeiten	729
18.7.	Exakte Sequenzen	730
18.7.1.	Die Mayer-Vietoris-Sequenz	730
18.7.2.	Homologie- und Kohomologiegruppen mit beliebigen Koeffizienten	732
18.7.3.	Höhere Homotopiegruppen	734
18.7.4.	Die exakte Homotopiesequenz eines Faserbündels	735
18.7.5.	Fundamentalgruppe und Symmetrie	737

19. Krümmung, Topologie und Analysis	739
19.1. Grundideen	739
19.2. Bündel	741
19.3. Produktbündel und Eichfeldtheorie	743
19.4. Paralleltransport in Hauptfaserbündeln und Krümmung	746
19.4.1. Die Zusammenhangsform \mathcal{A} auf \mathcal{H}	747
19.4.2. Die Krümmungsform \mathcal{F} auf \mathcal{H}	747
19.4.3. Geometrische Interpretation	748
19.5. Paralleltransport in Vektorraumbündeln und kovariante Richtungsableitung	749
19.6. Anwendung auf die Methode des repère mobile von E. Cartan	752
19.6.1. Die globalen Strukturgleichungen von Cartan	754
19.6.2. Die lokalen Strukturgleichungen von Cartan	755
19.7. Die Wegabhängigkeit des Paralleltransports, Holonomiegruppen und der Aharonov-Bohm-Effekt in der Quantenmechanik	755
19.8. Die Struktur Riemannscher Flächen	757
19.8.1. Algebraische Funktionen als komplexe Kurven	759
19.8.2. Kompakte Riemannsche Flächen	763
19.8.3. Der Uniformisierungssatz	765
19.8.4. Analytische Fortsetzung und Riemannsche Flächen	766
19.9. Garbenkohomologie und die Konstruktion meromorpher Funktionen	767
19.9.1. Garben	768
19.9.2. Die Lösung des Cousinschen Problems	769
19.9.3. Die Lösung des Problems von Mittag-Leffler	770
19.9.4. Garbenkohomologie	770
19.10. Charakteristische Klassen für Vektorraumbündel	772
19.10.1. Grundideen	772
19.10.2. Die Kohomologiealgebra $H^*(M)$ einer Mannigfaltigkeit M	774
19.10.3. Der Weil-Morphismus und charakteristische Klassen	776
19.10.4. Chernklassen	777
19.11. Das Atiyah-Singer-Indextheorem	779
19.11.1. Die analytische Form des Indextheorems für elliptische Differentialoperatoren	780
19.11.2. Die topologische Form des Indextheorems für elliptische Differentialoperatoren	782
19.11.3. Das Indextheorem für elliptische Komplexe	783
19.11.4. Anwendungen auf den de-Rham-Komplex	785
19.11.5. Anwendung auf den Dolbeaut-Komplex	786
19.11.6. Das Theorem von Riemann-Roch-Hirzebruch	786
19.12. Minimalflächen	787
19.13. Stringtheorie	790
19.14. Supermathematik und Superstringtheorie	794
Literatur	796
Register	812