

INHALT

Einleitung	1
0. Wichtige Formeln, graphische Darstellungen und Tabellen	3
0.1. Grundformeln der Elementarmathematik	3
0.1.1. Mathematische Konstanten	3
0.1.2. Winkelmessung	5
0.1.3. Flächeninhalt und Umfang ebener Figuren	7
0.1.4. Volumen und Oberfläche von Körpern	11
0.1.5. Volumen und Oberfläche der regulären Polyeder	13
0.1.6. Volumen und Oberfläche der n -dimensionalen Kugel	15
0.1.7. Grundformeln der analytischen Geometrie der Ebene	16
1. Geraden (16) – 2. Kreis (18) – 3. Ellipse (19) – 4. Hyperbel (21) – 5. Parabel (22) – 6. Polarkoordinaten und Kegelschnitte (23)	
0.1.8. Grundformeln der analytischen Geometrie des Raumes	25
0.1.9. Potenzen, Wurzeln und Logarithmen	26
0.1.10. Elementare algebraische Formeln	29
1. Die geometrische und die arithmetische Reihe (29) – 2. Das Rechnen mit dem Summen- und Produktzeichen (30) – 3. Die binomischen Formeln (31) – 4. Potenzsummen und Bernoullische Zahlen (33) – 5. Die Eulerschen Zahlen (36)	
0.1.11. Wichtige Ungleichungen	36
0.1.12. Anwendung auf die Planetenbewegung – der Triumph der Mathematik im Weltall	41
0.2. Elementare Funktionen und ihre graphische Darstellung	46
0.2.1. Transformation von Funktionen	48
0.2.2. Die lineare Funktion	49
0.2.3. Die quadratische Funktion	49
0.2.4. Die Potenzfunktion	51
0.2.5. Die Eulersche e -Funktion	52
0.2.6. Die Logarithmusfunktion	54
0.2.7. Die allgemeine Exponentialfunktion	55
0.2.8. Die Sinus- und Kosinusfunktion	56
0.2.9. Die Tangens- und Kotangensfunktion	62
0.2.10. Die Hyperbelfunktionen $\sinh x$ und $\cosh x$	65
0.2.11. Die Hyperbelfunktionen $\tanh x$ und $\coth x$	67
0.2.12. Die inversen trigonometrischen Funktionen (zyklometrische Funktionen)	69
0.2.13. Die inversen Hyperbelfunktionen	71
0.2.14. Ganze rationale Funktionen	73
0.2.15. Gebrochene rationale Funktionen	73
1. Spezielle rationale Funktionen (73) – 2. Rationale Funktionen mit linearen Zählern und Nennern (74) – 3. Spezielle rationale Funktionen mit einem Nenner n -ten Grades (75) – 4. Rationale Funktionen mit quadratischem Nenner (75) – 5. Die allgemeine rationale Funktion (77)	
0.3. Mathematik auf dem PC – eine Revolution der Mathematik	78
0.4. Tabellen der mathematischen Statistik und Standardverfahren für Praktiker	79
0.4.1. Die wichtigsten empirischen Daten für eine Meßreihe	79
0.4.2. Die theoretische Verteilungsfunktion	81
0.4.3. Das Testen einer Normalverteilung	82
0.4.4. Die statistische Auswertung einer Meßreihe	83

0.4.5.	Der statistische Vergleich zweier Meßreihen	84
	1. Der empirische Korrelationskoeffizient (84) – 2. Der Vergleich zweier Mittelwerte mit dem t -Test (86) – 3. Der F -Test (87) – 4. Der Wilcoxon-Test (87)	
0.4.6.	Tabellen der mathematischen Statistik	87
	1. Interpolation von Tabellen (87) – 2. Normalverteilung (89) – 3. Werte $t_{\alpha, m}$ der Studentischen t -Verteilung (92) – 4. Werte χ^2_{α} der χ^2 -Verteilung (93) – 5. Werte $F_{0,05; m_1 m_2}$ und $F_{0,01; m_1 m_2}$ der F -Verteilung (94) – 6. Die Fischersche Z -Verteilung (98) – 7. Kritische Zahlen für den Wilcoxon-Test (99) – 8. Die Kolmogorow-Smirnowsche λ -Verteilung (100) – 9. Die Poissonsche Verteilung (101)	
0.5.	Tabellen spezieller Funktionen	102
0.5.1.	Gammafunktion $\Gamma(x)$ und $1/\Gamma(x)$	102
0.5.2.	Zylinderfunktionen (Besselsche Funktionen)	103
0.5.3.	Kugelfunktionen (Legendresche Polynome)	107
0.5.4.	Elliptische Integrale	108
0.5.5.	Integralsinus, Integralkosinus, Integralexponentialfunktion, Integrallogarithmus	110
0.5.6.	Fresnel-Integrale	112
0.5.7.	Die Funktion $\int_0^x e^{t^2} dt$	112
0.5.8.	Umrechnung von Grad in Bogenmaß	113
0.6.	Primzahltablelle	114
0.7.	Reihen- und Produktformeln	115
0.7.1.	Spezielle Reihen	115
	1. Die Leibnizsche Reihe und verwandte Reihen (115) – 2. Spezielle Werte der Riemannschen ζ -Funktion und verwandte Reihen (116) – 3. Die Euler-McLaurinsche Summenformel (117) – 4. Unendliche Partialbruchzerlegungen (118)	
0.7.2.	Potenzreihen	118
0.7.3.	Asymptotische Reihen	128
	1. Konvergente Entwicklungen (128) – 2. Asymptotische Gleichheit (129) – 3. Asymptotische Entwicklungen im Sinne von Poincaré (129)	
0.7.4.	Fourierreihen	131
0.7.5.	Unendliche Produkte	136
0.8.	Tabellen zur Differentiation von Funktionen	137
0.8.1.	Differentiation der elementaren Funktionen	137
0.8.2.	Differentiationsregeln für Funktionen einer Variablen	139
0.8.3.	Differentiationsregeln für Funktionen mehrerer Variabler	140
0.9.	Tabellen zur Integration von Funktionen	142
0.9.1.	Integration der elementaren Funktionen	142
0.9.2.	Integrationsregeln	145
	1. Unbestimmte Integrale (145) – 2. Bestimmte Integrale (147) – 3. Mehrdimensionale Integrale (147)	
0.9.3.	Die Integration rationaler Funktionen	148
0.9.4.	Wichtige Substitutionen	150
0.9.5.	Tabelle unbestimmter Integrale	154
0.9.6.	Tabelle bestimmter Integrale	184
0.10.	Tabellen zu den Integraltransformationen	190
0.10.1.	Fouriertransformation	190
	1. Fourierkosinustransformation (191) – 2. Fouriersinustransformation (197) – 3. Fouriertransformation (203)	
0.10.2.	Laplacetransformation	204

	1. Tabelle zur Rücktransformation gebrochen-rationaler Bildfunktionen (204) – 2. Laplace-Transformierte einiger nichtrationaler Funktionen (209) – 3. Laplace-Transformierte einiger stückweise stetiger Funktionen (211)	
0.10.3.	Z-Transformation	216
1.	Analysis	219
1.1.	Elementare Analysis	220
1.1.1.	Reelle Zahlen	220
	1. Natürliche und ganze Zahlen (221) – 2. Rationale Zahlen (221) – 3. Dezimalzahlen (224) – 4. Dualzahlen (225) – 5. Intervalle (226)	
1.1.2.	Komplexe Zahlen	226
	1. Der Betrag (228) – 2. Geometrische Interpretation der Operationen mit komplexen Zahlen (229) – 3. Rechenregeln (230) – 4. Die n -ten Wurzeln (231)	
1.1.3.	Anwendungen auf Schwingungen	231
1.1.4.	Das Rechnen mit Gleichungen	233
1.1.5.	Das Rechnen mit Ungleichungen	235
1.2.	Grenzwerte von Zahlenfolgen	237
1.2.1.	Grundideen	237
1.2.2.	Die Hilbertsche Axiomatik der reellen Zahlen	238
	1. Die Axiome (238) – 2. Das Induktionsgesetz (240) – 3. Supremum und Infimum (241)	
1.2.3.	Reelle Zahlenfolgen	242
	1. Endliche Grenzwerte (242) – 2. Unendliche Grenzwerte (243)	
1.2.4.	Konvergenzkriterien für Zahlenfolgen	245
	1. Das Monotoniekriterium (247) – 2. Das Cauchy-kriterium (247) – 3. Das Teilfolgenkriterium (247)	
1.3.	Grenzwerte von Funktionen	249
1.3.1.	Funktionen einer reellen Variablen	249
	1. Grenzwerte (249) – 2. Stetigkeit (250) – 3. Die Regel von de l'Hospital (252) – 4. Die Größenordnung von Funktionen (253)	
1.3.2.	Metrische Räume und Punktmengen	254
	1. Abstandsbegriff und Konvergenz (254) – 2. Spezielle Mengen (256) – 3. Kompaktheit (257) – 4. Zusammenhang (258) – 5. Beispiele (259)	
1.3.3.	Funktionen mehrerer reeller Variabler	260
	1. Grenzwerte (260) – 2. Stetigkeit (261)	
1.4.	Differentiation von Funktionen einer reellen Variablen	263
1.4.1.	Die Ableitung	263
1.4.2.	Die Kettenregel	265
1.4.3.	Monotone Funktionen	266
1.4.4.	Inverse Funktionen	267
	1. Der lokale Satz über inverse Funktionen (267) – 2. Der globale Satz über inverse Funktionen (269)	
1.4.5.	Der Taylorsche Satz und das lokale Verhalten von Funktionen	269
	1. Grundideen (269) – 2. Das Restglied (272) – 3. Lokale Extrema und kritische Punkte (273) – 4. Krümmungsverhalten (275) – 5. Konvexe Funktionen (276) – 6. Anwendung auf Kurvendiskussionen (278)	
1.4.6.	Komplexwertige Funktionen	280
1.5.	Differentiation von Funktionen mehrerer reeller Variabler	280
1.5.1.	Partielle Ableitungen	281
1.5.2.	Die Fréchet-Ableitung	283
1.5.3.	Die Kettenregel	286
	1. Grundidee (286) – 2. Differentiation zusammengesetzter Funktionen (288)	

1.5.4.	Anwendung auf die Transformation von Differentialoperatoren	288
1.5.5.	Anwendung auf die Abhängigkeit von Funktionen	291
1.5.6.	Der Satz über implizite Funktionen	292
	1. Eine Gleichung mit zwei reellen Variablen (292) – 2. Gleichungssysteme (294)	
1.5.7.	Inverse Abbildungen	295
	1. Homöomorphismen (295) – 2. Lokale Diffeomorphismen (295) – 3. Globale Diffeomorphismen (296) – 4. Generisches Lösungsverhalten (296)	
1.5.8.	Die n -te Variation und der Taylorsche Satz	296
1.5.9.	Anwendungen auf die Fehlerrechnung	298
1.5.10.	Das Fréchet-Differential	300
	1. Der formale Leibnizsche Differentialkalkül (301) – 2. Fréchet-Differentiale und höhere Fréchet-Ableitungen (302) – 3. Strenge Rechtfertigung des Leibnizschen Differentialkalküls (304) – 4. Der formale Cartansche Differentialkalkül (306) – 5. Strenge Rechtfertigung des Cartanschen Differentialkalküls und seine Anwendungen (311)	
1.6.	Integration von Funktionen einer reellen Variablen	311
1.6.1.	Grundideen	312
1.6.2.	Existenz des Integrals	316
1.6.3.	Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung	318
1.6.4.	Partielle Integration	319
1.6.5.	Die Substitutionsregel	321
1.6.6.	Integration über unbeschränkte Intervalle	323
1.6.7.	Integration unbeschränkter Funktionen	324
1.6.8.	Der Cauchysche Hauptwert	325
1.6.9.	Anwendung auf die Bogenlänge	326
1.6.10.	Eine Standardargumentation in der Physik	327
1.7.	Integration von Funktionen mehrerer reeller Variabler	328
1.7.1.	Grundideen	329
1.7.2.	Existenz des Integrals	337
1.7.3.	Rechenregeln	340
1.7.4.	Das Prinzip des Cavalieri (iterierte Integration)	341
1.7.5.	Die Substitutionsregel	343
1.7.6.	Der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung (Satz von Gauß-Stokes)	344
	1. Anwendungen auf den klassischen Integralsatz von Gauß (345) – 2. Anwendungen auf den klassischen Integralsatz von Stokes (347) – 3. Anwendungen auf Kurvenintegrale (348)	
1.7.7.	Das Riemannsches Flächenmaß	351
1.7.8.	Partielle Integration	353
1.7.9.	Krummlinige Koordinaten	354
	1. Polarkoordinaten (354) – 2. Zylinderkoordinaten (354) – 3. Kugelkoordinaten (356)	
1.7.10.	Anwendungen auf den Schwerpunkt und das Trägheitsmoment	357
1.7.11.	Parameterintegrale	360
1.8.	Vektoralgebra	361
1.8.1.	Linearkombinationen von Vektoren	362
1.8.2.	Koordinatensysteme	363
1.8.3.	Multiplikation von Vektoren	365
1.9.	Vektoranalysis und physikalische Felder	368
1.9.1.	Geschwindigkeit und Beschleunigung	368
1.9.2.	Gradient, Divergenz und Rotation	371
1.9.3.	Anwendungen auf Deformationen	373
1.9.4.	Der Nablakalkül	375
1.9.5.	Arbeit, Potential und Kurvenintegrale	378

1.9.6.	Anwendungen auf die Erhaltungsgesetze der Mechanik	380
1.9.7.	Masseströmungen, Erhaltungsgesetze und der Integralsatz von Gauß	382
1.9.8.	Zirkulation, geschlossene Feldlinien und der Integralsatz von Stokes	384
1.9.9.	Bestimmung eines Vektorfeldes aus seinen Quellen und Wirbeln (Hauptsatz der Vektoranalysis)	385
1.9.10.	Anwendungen auf die Maxwell'schen Gleichungen des Elektromagnetismus	387
1.9.11.	Der Zusammenhang der klassischen Vektoranalysis mit dem Cartanschen Differentialkalkül	389
1.10.	Unendliche Reihen	389
1.10.1.	Konvergenzkriterien	391
1.10.2.	Das Rechnen mit unendlichen Reihen	393
	1. Algebraische Operationen (393) – 2. Funktionenfolgen (394) – 3. Differentiation und Integration (395)	
1.10.3.	Potenzreihen	396
1.10.4.	Fourierreihen	399
1.10.5.	Summation divergenter Reihen	402
1.10.6.	Unendliche Produkte	403
1.11.	Integraltransformationen	405
1.11.1.	Die Laplacetransformation	407
	1. Die Grundregeln (408) – 2. Anwendungen auf Differentialgleichungen (408) – 3. Weitere Rechenregeln (412)	
1.11.2.	Die Fouriertransformation	412
	1. Grundideen (412) – 2. Der Hauptsatz (416) – 3. Rechenregeln (417)	
1.11.3.	Die Z-Transformation	417
	1. Die Grundregeln (418) – 2. Anwendungen auf Differenzgleichungen (420) – 3. Weitere Rechenregeln (421)	
1.12.	Gewöhnliche Differentialgleichungen	422
1.12.1.	Einführende Beispiele	422
	1. Radioaktiver Zerfall (422) – 2. Die Wachstumsgleichung (424) – 3. Gebremstes Wachstum (logistische Gleichung) (424) – 4. Explosionen in endlicher Zeit (blowing-up) (425) – 5. Der harmonische Oszillator und Eigenschwingungen (426) – 6. Gefährliche Resonanzeffekte (428) – 7. Dämpfungseffekte (428) – 8. Chemische Reaktionen und das inverse Problem der chemischen Reaktionskinetik (430)	
1.12.2.	Grundideen	431
	1. Die fundamentale „infinitesimale“ Erkenntnisstrategie in den Naturwissenschaften (432) – 2. Die Rolle von Anfangsbedingungen (432) – 3. Die Rolle der Stabilität (433) – 4. Die Rolle von Randbedingungen und die fundamentale Idee der Greenschen Funktion (435) – 5. Die Rolle von Rand-Anfangsbedingungen (437) – 6. Korrekt gestellte Probleme (438) – 7. Zurückführung auf Integralgleichungen (439) – 8. Die Bedeutung von Integrabilitätsbedingungen (440)	
1.12.3.	Die Klassifikation von Differentialgleichungen	441
	1. Das Reduktionsprinzip (441) – 2. Lineare Differentialgleichungen und das Superpositionsprinzip (442) – 3. Nichtlineare Differentialgleichungen (443) – 4. Instationäre und stationäre Prozesse (444) – 5. Gleichgewichtszustände (444) – 6. Die Methode des Koeffizientenvergleichs – eine allgemeine Lösungsstrategie (445) – 7. Wichtige Informationen, die man aus Differentialgleichungen erhalten kann, ohne diese zu lösen (448) – 8. Symmetrie und Erhaltungssätze (448) – 9. Strategien zur Gewinnung von Eindeutigkeitsaussagen (450)	
1.12.4.	Elementare Lösungsmethoden	451
	1. Der lokale Existenz- und Eindeutigkeitsatz (451) – 2. Der globale Eindeutigkeitsatz (453) – 3. Eine allgemeine Lösungsstrategie (453) – 4. Die Methode der Trennung der Variablen (453) – 5. Die lineare Differentialgleichung und der Propagator (455) –	

	6. Die Bernoullische Differentialgleichung (457) – 7. Die Riccatische Differentialgleichung und Steuerungsprobleme (457) – 8. Die homogene Differentialgleichung (457) – 9. Die exakte Differentialgleichung (458) – 10. Der Eulersche Multiplikator (459) – 11. Differentialgleichungen höherer Ordnung (459) – 12. Die geometrische Interpretation von Differentialgleichungen erster Ordnung (461) – 13. Einhüllende und singuläre Lösung (462) – 14. Die Methode der Berührungstransformation von Legendre (463)	
1.12.5.	Anwendungen	468
	1. Die kosmische Fluchtgeschwindigkeit für die Erde (468) – 2. Das Zweikörperproblem (468)	
1.12.6.	Lineare Differentialgleichungssysteme und der Propagator	472
	1. Lineare Systeme erster Ordnung (473) – 2. Lineare Differentialgleichungen beliebiger Ordnung (476)	
1.12.7.	Stabilität	476
1.12.8.	Randwertaufgaben und die Greensche Funktion	478
	1. Das inhomogene Problem (479) – 2. Das zugehörige Variationsproblem (481) – 3. Das Eigenwertproblem (482)	
1.12.9.	Allgemeine Theorie	484
	1. Der globale Existenz- und Eindeutigkeitsatz (484) – 2. Differenzierbare Abhängigkeit von Anfangsdaten und Parametern (484) – 3. Potenzreihen und der Satz von Cauchy (484) – 4. Integralungleichungen (485) – 5. Differentialungleichungen (485) – 6. Explosionen von Lösungen in endlicher Zeit (blowing-up) (486) – 7. Die Existenz globaler Lösungen (486) – 8. Das Prinzip der a-priori-Abschätzungen (487)	
1.13.	Partielle Differentialgleichungen	488
1.13.1.	Gleichungen erster Ordnung der mathematischen Physik	488
	1. Erhaltungssätze und die Charakteristikenmethode (488) – 2. Erhaltungsgleichungen, Schockwellen und die Entropiebedingung von Lax (491) – 3. Die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung (494) – 4. Anwendungen in der geometrischen Optik (497) – 5. Anwendungen auf das Zweikörperproblem (499) – 6. Die kanonischen Transformationen von Jacobi (500) – 7. Die hydrodynamische Deutung der Hamiltonschen Theorie und symplektische Geometrie (501) – 8. Poissonklammern und integrable Systeme (509) – 9. Die Störung integrierbarer Systeme (KAM-Theorie) (511) – 10. Die Gibbssche Grundgleichung der Thermodynamik (512) – 11. Die Berührungstransformationen von Lie (516)	
1.13.2.	Gleichungen zweiter Ordnung der mathematischen Physik	517
	1. Die universelle Fouriemethode (517) – 2. Anwendungen auf die schwingende Saite (518) – 3. Anwendungen auf den wärmeleitenden Stab (520) – 4. Die instationäre Wärmeleitungsgleichung (520) – 5. Die instationäre Diffusionsgleichung (521) – 6. Die stationäre Wärmeleitungsgleichung (522) – 7. Eigenschaften harmonischer Funktionen (523) – 8. Die Wellengleichung (524) – 9. Die Maxwellschen Gleichungen der Elektrodynamik (526) – 10. Elektrostatik und die Greensche Funktion (527) – 11. Die Schrödingergleichung der Quantenmechanik und das Wasserstoffatom (528) – 12. Der harmonische Oszillator in der Quantenmechanik und das Plancksche Strahlungsgesetz (530) – 13. Spezielle Funktionen der Quantenmechanik (531) – 14. Nichtlineare partielle Differentialgleichungen in den Naturwissenschaften (533)	
1.13.3.	Die Rolle der Charakteristiken	533
	1. Charakteristiken und die Ausbreitung von Unstetigkeiten (534) – 2. Anwendungen auf die Klassifikation partieller Differentialgleichungen (535) – 3. Anwendungen auf elektromagnetische Wellen (538) – 4. Anwendungen auf elastische Wellen (539) – 5. Anwendungen auf Schallwellen (540) – 6. Schockwellen in der Gasdynamik (541)	
1.13.4.	Allgemeine Eindeutigkeitsprinzipien	543
	1. Die Energiemethode (543) – 2. Maximumprinzipien (544)	
1.13.5.	Allgemeine Existenzsätze	545
	1. Der Satz von Cauchy-Kowalewskaja (545) – 2. Der Satz von Cauchy für partielle Differentialgleichungen erster Ordnung (546) – 3. Der Satz von Frobenius und Integriabi-	

litätsbedingungen (548) – 4. Der Satz von Cartan-Kähler (549)

1.14. Komplexe Funktionentheorie	555
1.14.1. Grundideen	556
1.14.2. Komplexe Zahlenfolgen	557
1.14.3. Differentiation	558
1.14.4. Integration	560
1.14.5. Die Sprache der Differentialformen	564
1.14.6. Darstellung von Funktionen	567
1. Potenzreihen (567) – 2. Laurentreihen und Singularitäten (568) – 3. Ganze Funktionen und ihre Produktdarstellung (569) – 4. Meromorphe Funktionen und ihre Partialbruchzerlegung (571) – 5. Dirichletreihen (572)	
1.14.7. Der Residuenkalkül zur Berechnung von Integralen	573
1.14.8. Der Abbildungsgrad	575
1.14.9. Anwendungen auf den Fundamentalsatz der Algebra	576
1.14.10. Biholomorphe Abbildungen und der Riemannsche Abbildungssatz	578
1.14.11. Beispiele für konforme Abbildungen	579
1. Die Gruppe der Ähnlichkeitstransformationen (580) – 2. Inversion am Einheitskreis (580) – 3. Die abgeschlossene komplexe Zahlenebene (581) – 4. Die Riemannsche Zahlenkugel (583) – 5. Die automorphe Gruppe (Möbiustransformationen) (584) – 6. Die Riemannsche Fläche der Quadratwurzel (585) – 7. Die Riemannsche Fläche des Logarithmus (587) – 8. Die Schwarz-Christoffelsche Abbildungsformel (588)	
1.14.12. Anwendungen auf harmonische Funktionen	588
1.14.13. Anwendungen in der Hydrodynamik	591
1.14.14. Anwendungen in der Elektrostatik und Magnetostatik	594
1.14.15. Analytische Fortsetzung und das Permanenzprinzip	595
1.14.16. Anwendungen auf die Eulersche Gammafunktion	599
1.14.17. Elliptische Funktionen und elliptische Integrale	600
1. Grundideen (600) – 2. Die Eigenschaften elliptischer Funktionen (605) – 3. Die Weierstraßsche \wp -Funktion (606) – 4. Die Jacobischen Thetafunktionen (607) – 5. Die Jacobischen elliptischen Funktionen (608)	
1.14.18. Modulformen und das Umkehrproblem für die \wp -Funktion	608
1.14.19. Elliptische Integrale	611
1. Das Legendresche Normalintegral erster Gattung und die Jacobische Sinusfunktion (611) – 2. Die allgemeine Weierstraßsche Substitutionsmethode (618) – 3. Anwendungen (619)	
1.14.20. Singuläre Differentialgleichungen	620
1.14.21. Anwendungen auf die Gaußsche hypergeometrische Differentialgleichung	621
1.14.22. Anwendungen auf die Besselsche Differentialgleichung	622
1.14.23. Funktionen mehrerer komplexer Variabler	624
2. Algebra	627
2.1. Elementare Algebra	627
2.1.1. Kombinatorik	627
2.1.2. Determinanten	630
2.1.3. Matrizen	633
2.1.4. Lineare Gleichungssysteme	638
1. Das Superpositionsprinzip (639) – 2. Der Gaußsche Algorithmus (640) – 3. Die Cramersche Regel (641) – 4. Die Fredholmsche Alternative (642) – 5. Das Rangkriterium (642)	
2.1.5. Das Rechnen mit Polynomen	644
2.1.6. Der Fundamentalsatz der klassischen Algebra von Gauß	646
1. Quadratische Gleichungen (647) – 2. Kubische Gleichungen (648) – 3. Biquadratische	

	Gleichungen (649) – 4. Allgemeine Eigenschaften algebraischer Gleichungen (650)	
2.1.7.	Partialbruchzerlegung	653
2.2.	Matrizenkalkül	655
2.2.1.	Das Spektrum einer Matrix	655
2.2.2.	Normalformen von Matrizen	657
	1. Die Hauptachsentransformation für selbstadjungierte Matrizen (658) – 2. Normale Matrizen (660) – 3. Die Jordansche Normalform (662)	
2.2.3.	Matrizenfunktionen	664
	1. Potenzreihen (664) – 2. Funktionen normaler Matrizen (666)	
2.3.	Lineare Algebra	666
2.3.1.	Grundideen	666
2.3.2.	Lineare Räume	668
2.3.3.	Lineare Operatoren	670
	1. Das Rechnen mit linearen Operatoren (671) – 2. Lineare Operatorgleichungen (672) – 3. Exakte Sequenzen (673) – 4. Der Zusammenhang mit dem Matrizenkalkül (673)	
2.3.4.	Das Rechnen mit linearen Räumen	675
	1. Kartesische Produkte (675) – 2. Faktorräume (675) – 3. Direkte Summen (676) – 4. Anwendung auf lineare Operatoren (678)	
2.3.5.	Dualität	678
2.4.	Multilineare Algebra	680
2.4.1.	Algebren	680
2.4.2.	Das Rechnen mit Multilinearformen	681
	1. Antisymmetrische Multilinearformen (682) – 2. Kovariante und kontravariante Tensoren (685)	
2.4.3.	Universelle Produkte	687
	1. Das Tensorprodukt linearer Räume (687) – 2. Die Tensoralgebra eines linearen Raumes (688) – 3. Die äußere Algebra eines linearen Raumes (Graßmannalgebra) (688) – 4. Die innere Algebra eines linearen Raumes (Cliffordalgebra) (689)	
2.4.4.	Liealgebren	691
2.4.5.	Superalgebren	692
2.5.	Algebraische Strukturen	693
2.5.1.	Gruppen	693
	1. Untergruppen (695) – 2. Morphismen von Gruppen (696) – 3. Zyklische Gruppen (698) – 4. Auflösbare Gruppen (699)	
2.5.2.	Ringe	700
2.5.3.	Körper	702
2.6.	Galoistheorie und algebraische Gleichungen	705
2.6.1.	Die drei berühmten Probleme der Antike	705
2.6.2.	Der Hauptsatz der Galoistheorie	706
2.6.3.	Der verallgemeinerte Fundamentalsatz der Algebra	709
2.6.4.	Klassifikation von Körpererweiterungen	710
2.6.5.	Der Hauptsatz über Gleichungen, die durch Radikale lösbar sind	711
2.6.6.	Konstruktionen mit Zirkel und Lineal	713
2.7.	Zahlentheorie	716
2.7.1.	Grundideen	717
	1. Unterschiedliche Formen mathematischen Denkens (717) – 2. Die moderne Strategie der Zahlentheorie (717) – 3. Anwendungen der Zahlentheorie (718) – 4. Komprimierung von Information in Mathematik und Physik (718)	
2.7.2.	Der Euklidische Algorithmus	718
2.7.3.	Die Verteilung der Primzahlen	722

	1. Der Primzahlsatz (723) – 2. Die berühmte Riemannsche Vermutung (725) – 3. Riemannsche ζ -Funktion und statistische Physik (725) – 4. Riemannsche ζ -Funktion und Renormierung in der Physik (726) – 5. Das Lokalisierungsprinzip für Primzahlen modulo m von Dirichlet (727) – 6. Die Vermutung über Primzahlzwillinge (727)	
2.7.4.	Additive Zerlegungen	727
	1. Die Goldbachsche Vermutung (727) – 2. Das Waringsche Problem (728) – 3. Partitionen (729)	
2.7.5.	Die Approximation irrationaler Zahlen durch rationale Zahlen und Kettenbrüche	730
	1. Endliche Kettenbrüche (731) – 2. Unendliche Kettenbrüche (732) – 3. Beste rationale Approximationen (735)	
2.7.6.	Transzendente Zahlen	737
2.7.7.	Anwendung auf die Zahl π	740
2.7.8.	Gaußsche Kongruenzen	745
	1. Anwendungen des Satzes von Fermat-Euler in der modernen Verschlüsselungstheorie (745) – 2. Das quadratische Reziprozitätsgesetz (747)	
2.7.9.	Minkowskis Geometrie der Zahlen	747
2.7.10.	Das fundamentale Lokal-Global-Prinzip der Zahlentheorie	748
	1. Bewertungen eines Körpers (748) – 2. p -adische Zahlen (748) – 3. Der Satz von Minkowski-Hasse (749)	
2.7.11.	Ideale und höhere Teilbarkeitslehre	749
	1. Grundbegriffe (750) – 2. Hauptidealringe und Euklidische Ringe (750) – 3. Der Satz von Lasker-Noether (751)	
2.7.12.	Anwendungen auf quadratische Zahlkörper	752
2.7.13.	Die analytische Klassenzahlformel	754
2.7.14.	Die Hilbertsche Klassenkörpertheorie für allgemeine Zahlkörper	755
3.	Geometrie	757
3.1.	Die Grundidee der Geometrie (Erlanger Programm)	757
3.2.	Elementare Geometrie	758
3.2.1.	Ebene Trigonometrie	758
	1. Vier fundamentale Gesetze für Dreiecke (759) – 2. Das rechtwinklige Dreieck (761) – 3. Vier Grundaufgaben der Dreiecksberechnung (763) – 4. Spezielle Linien im Dreieck (764) – 5. Kongruenzsätze (765) – 6. Ähnlichkeitssätze (766)	
3.2.2.	Anwendungen in der Geodäsie	766
	1. Die erste Grundaufgabe (Vorwärtseinschneiden) (767) – 2. Die zweite Grundaufgabe (Rückwärtseinschneiden) (768) – 3. Die dritte Grundaufgabe (Berechnung einer unzugänglichen Entfernung) (768)	
3.2.3.	Sphärische Trigonometrie	769
	1. Entfernungsmessung und Großkreise (769) – 2. Winkelmessung (770) – 3. Sphärische Dreiecke (770) – 4. Die Berechnung sphärischer Dreiecke (773)	
3.2.4.	Anwendungen im Schiffs- und Flugverkehr	774
3.2.5.	Die Hilbertschen Axiome der Geometrie	775
3.2.6.	Das Parallelenaxiom des Euklid	779
3.2.7.	Die nichteuklidische elliptische Geometrie	780
3.2.8.	Die nichteuklidische hyperbolische Geometrie	780
3.3.	Anwendungen der Vektoralgebra in der analytischen Geometrie	783
3.3.1.	Geraden in der Ebene	784
3.3.2.	Geraden und Ebenen im Raum	785
3.3.3.	Volumina	787
3.4.	Euklidische Geometrie (Geometrie der Bewegungen)	787
3.4.1.	Die euklidische Bewegungsgruppe	787

3.4.2.	Kegelschnitte	789
3.4.3.	Flächen zweiter Ordnung	790
3.5.	Projektive Geometrie	796
3.5.1.	Grundideen	796
3.5.2.	Projektive Abbildungen	798
3.5.3.	Der n -dimensionale reelle projektive Raum	799
3.5.4.	Der n -dimensionale komplexe projektive Raum	801
3.5.5.	Die Klassifikation der ebenen Geometrien	802
	1. Euklidische Geometrie (802) – 2. Ähnlichkeitsgeometrie (802) – 3. Affine Geometrie (802) – 4. Projektive Geometrie (803) – 5. Historische Bemerkungen (804)	
3.6.	Differentialgeometrie	805
3.6.1.	Ebene Kurven	806
3.6.2.	Raumkurven	812
	1. Krümmung und Windung (812) – 2. Der Hauptsatz der Kurventheorie (815)	
3.6.3.	Die lokale Gaußsche Flächentheorie	815
	1. Die erste Gaußsche Fundamentalform und die metrischen Eigenschaften von Flächen (817) – 2. Die zweite Gaußsche Fundamentalform und die Krümmungseigenschaften von Flächen (820) – 3. Der Hauptsatz der Flächentheorie und das theorema egregium von Gauß (823) – 4. Geodätische Linien (824)	
3.6.4.	Globale Gaußsche Flächentheorie	825
3.7.	Beispiele für ebene Kurven	826
3.7.1.	Einhüllende und Kaustik	826
3.7.2.	Evoluten	827
3.7.3.	Evolventen	827
3.7.4.	Die Traktrix von Huygens und die Kettenlinie	828
3.7.5.	Die Lemniskate von Jakob Bernoulli und die Cassinischen Kurven	829
3.7.6.	Die Lissajou-Kurven	830
3.7.7.	Spiralen	831
3.7.8.	Strahlkurven (Konchoiden)	832
	1. Die Konchoide des Nikomedes (833) – 2. Die Pascalsche Schnecke und die Kardioide (833)	
3.7.9.	Radkurven	834
	1. Das Abrollen eines Rades auf einer Geraden (Zykloiden) (834) – 2. Das Abrollen eines Rades auf dem Äußeren eines Kreises (Epizykloiden) (836) – 3. Das Abrollen eines Rades auf dem Inneren eines Kreises (Hypozykloiden) (836) – 4. Die Epizyklen des Hipparchos (837)	
3.8.	Algebraische Geometrie	838
3.8.1.	Grundideen	838
	1. Das Grundproblem (838) – 2. Singularitäten und ihre physikalische Relevanz (838) – 3. Elliptische Kurven und elliptische Integrale (842) – 4. Algebraische Kurven höherer Ordnung und Abelsche Integrale (846)	
3.8.2.	Beispiele ebener algebraischer Kurven	847
	1. Kurven erster und zweiter Ordnung (847) – 2. Kurven dritter Ordnung (847) – 3. Kurven vierter Ordnung (850)	
3.8.3.	Anwendungen in der Integralrechnung	852
3.8.4.	Die projektiv-komplexe Form einer ebenen algebraischen Kurve	853
	1. Der Satz von Bézout über die Schnittpunkte von Kurven (854) – 2. Rationale Transformationen von Kurven (855) – 3. Singularitäten (856) – 4. Dualität (857)	
3.8.5.	Das Geschlecht einer Kurve	857
3.8.6.	Diophantische Geometrie	861
	1. Elementare diophantische Gleichungen (861) – 2. Rationale Kurvenpunkte und die Rolle des Geschlechts der Kurve (863) – 3. Die Fermatsche Vermutung (867)	

3.8.7.	Analytische Mengen und der Vorbereitungssatz von Weierstraß	868
3.8.8.	Die Auflösung von Singularitäten	869
3.8.9.	Die Algebraisierung der modernen algebraischen Geometrie	871
	1. Der Zusammenhang mit der Körpertheorie (871) – 2. Der Zusammenhang mit der Idealtheorie und der Satz von Hironaka (872) – 3. Lokale Ringe (874) – 4. Schemata (875) – 5. Schemata vom affinen Typ (876)	
3.9.	Geometrien der modernen Physik	877
3.9.1.	Grundideen	877
3.9.2.	Unitäre Geometrie, Hilberträume und Elementarteilchen	880
3.9.3.	Pseudounitäre Geometrie	888
3.9.4.	Minkowskigeometrie	891
3.9.5.	Anwendungen in der speziellen Relativitätstheorie	896
3.9.6.	Spingeometrie und Fermionen	902
	1. Die Cliffordalgebra des Minkowskiraumes (902) – 2. Die Diracgleichung des relativistischen Elektrons (903) – 3. Die Cliffordalgebra eines Hilbertraumes und die Spingruppen (907)	
3.9.7.	Fast komplexe Strukturen	911
3.9.8.	Symplektische Geometrie	911
4.	Grundlagen der Mathematik	914
4.1.	Der Sprachgebrauch in der Mathematik	914
4.1.1.	Wahre und falsche Aussagen	914
4.1.2.	Implikationen	915
4.1.3.	Tautologien und logische Gesetze	917
4.2.	Beweismethoden	919
4.2.1.	Indirekte Beweise	919
4.2.2.	Induktionsbeweise	919
4.2.3.	Eindeutigkeitsbeweise	920
4.2.4.	Existenzbeweise	920
4.2.5.	Die Notwendigkeit von Beweisen im Computerzeitalter	922
4.2.6.	Falsche Beweise	923
	1. Division durch null (923) – 2. Beweis in der falschen Richtung (924)	
4.3.	Anschauliche Mengentheorie	925
4.3.1.	Grundideen	925
4.3.2.	Das Rechnen mit Mengen	927
4.3.3.	Abbildungen	930
4.3.4.	Gleichmächtige Mengen	933
4.3.5.	Relationen	935
	1. Äquivalenzrelationen (935) – 2. Ordnungsrelationen (936) – 3. n -stellige Relationen (937)	
4.3.6.	Mengensysteme	937
4.4.	Mathematische Logik	938
4.4.1.	Aussagenlogik	938
	1. Die Axiome (940) – 2. Die Ableitungsregeln (940) – 3. Der Hauptsatz der Aussagenlogik (940)	
4.4.2.	Prädikatenlogik	941
4.4.3.	Die Axiome der Mengentheorie	942
4.4.4.	Cantors Strukturierung des Unendlichen	943
	1. Ordinalzahlen (944) – 2. Kardinalzahlen (946) – 3. Die Kontinuumshypothese (946)	
4.5.	Geschichte der axiomatischen Methode und ihr Verhältnis zur philosophischen Erkenntnistheorie	947

5.	Variationsrechnung und Optimierung – Mathematik des Optimalen	950
5.1.	Variationsrechnung für Funktionen einer Variablen	951
5.1.1.	Die Euler-Lagrangeschen Gleichungen	951
5.1.2.	Anwendungen	954
5.1.3.	Die Hamiltonschen Gleichungen	961
5.1.4.	Anwendungen	966
5.1.5.	Hinreichende Bedingungen für ein lokales Minimum	969
	1. Die hinreichende Bedingung von Jacobi (970) – 2. Die hinreichende Bedingung von Weierstraß (971)	
5.1.6.	Probleme mit Nebenbedingungen und Lagrangesche Multiplikatoren	972
5.1.7.	Anwendungen	973
5.1.8.	Natürliche Randbedingungen	976
5.2.	Variationsrechnung für Funktionen mehrerer Variabler	977
5.2.1.	Die Euler-Lagrangeschen Gleichungen	977
5.2.2.	Anwendungen	978
5.2.3.	Probleme mit Nebenbedingungen und Lagrangesche Multiplikatoren	982
5.3.	Steuerungsprobleme	982
5.3.1.	Bellmansche dynamische Optimierung	983
5.3.2.	Anwendungen	985
5.3.3.	Das Pontrjaginsche Maximumprinzip	986
5.3.4.	Anwendungen	987
5.4.	Klassische nichtlineare Optimierung	989
5.4.1.	Lokale Minimumprobleme	989
5.4.2.	Globale Minimumprobleme und Konvexität	990
5.4.3.	Anwendungen auf die Methode der kleinsten Quadrate von Gauß	990
5.4.4.	Anwendungen auf Pseudoinverse	991
5.4.5.	Probleme mit Nebenbedingungen und Lagrangesche Multiplikatoren	991
5.4.6.	Anwendungen auf die Entropie	993
5.4.7.	Der Subgradient	994
5.4.8.	Dualitätstheorie und Sattelpunkte	995
5.5.	Lineare Optimierung	996
5.5.1.	Grundideen	996
5.5.2.	Das allgemeine lineare Optimierungsproblem	999
5.5.3.	Die Normalform eines Optimierungsproblems und der Minimaltest	1001
5.5.4.	Der Simplexalgorithmus	1002
	1. Das Simplextableau (1002) – 2. Der Minimaltest (1002) – 3. Der Austauschschritt (1003) – 4. Ein Beispiel (1004)	
5.5.5.	Die Herstellung der Normalform	1005
5.5.6.	Dualität in der linearen Optimierung	1006
5.5.7.	Modifizierungen des Simplexalgorithmus	1006
5.6.	Anwendungen der linearen Optimierung	1007
5.6.1.	Kapazitätsauslastung	1007
5.6.2.	Mischung	1008
5.6.3.	Aufteilung	1008
5.6.4.	Zuschnitt und Schichtplanung	1009
5.6.5.	Lineare Transportprobleme	1010
	1. Gewinnung einer Anfangskonfiguration (1012) – 2. Der Transportalgorithmus (1014)	
6.	Stochastik – Mathematik des Zufalls	1018
6.1.	Elementare Stochastik	1020

6.1.1.	Das klassische Wahrscheinlichkeitsmodell	1020
6.1.2.	Das Gesetz der großen Zahl von Jakob Bernoulli	1022
6.1.3.	Der Grenzwertsatz von Moivre	1023
6.1.4.	Die Gaußsche Normalverteilung	1024
6.1.5.	Der Korrelationskoeffizient	1027
6.1.6.	Anwendungen auf die klassische statistische Physik	1030
6.2.	Die Kolmogorowschen Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung	1032
6.2.1.	Das Rechnen mit Ereignissen und Wahrscheinlichkeiten	1036
	1. Bedingte Wahrscheinlichkeiten (1037) – 2. Unabhängige Ereignisse (1038)	
6.2.2.	Zufällige Variable	1039
	1. Grundideen (1039) – 2. Die Verteilungsfunktion (1040) – 3. Der Mittelwert (1044) – 4. Die Streuung und die Ungleichung von Tschebyschew (1044)	
6.2.3.	Zufallsvektoren	1046
	1. Die gemeinsame Verteilungsfunktion (1046) – 2. Unabhängige Zufallsgrößen (1047) – 3. Abhängige Zufallsgrößen und der Korrelationskoeffizient (1047) – 4. Die Abhängigkeitskurve zwischen zwei Zufallsgrößen (1049)	
6.2.4.	Grenzwertsätze	1050
	1. Das schwache Gesetz der großen Zahl (1050) – 2. Das starke Gesetz der großen Zahl (1050) – 3. Der zentrale Grenzwertsatz (1051)	
6.2.5.	Anwendungen auf das Bernoullische Modell für Folgen unabhängiger Versuche	1052
	1. Die Grundidee (1052) – 2. Das Wahrscheinlichkeitsmodell (1052) – 3. Approximati- onssätze (1054) – 4. Anwendungen auf die Qualitätskontrolle (1057) – 5. Anwendungen auf das Testen einer Hypothese (1058) – 6. Anwendungen auf das Vertrauensintervall für die Versuchswahrscheinlichkeit (1058) – 7. Das starke Gesetz der großen Zahl (1059)	
6.3.	Mathematische Statistik	1060
6.3.1.	Grundideen	1060
6.3.2.	Wichtige Schätzfunktionen	1062
6.3.3.	Die Untersuchung normalverteilter Meßgrößen	1063
	1. Das Vertrauensintervall für den Mittelwert (1063) – 2. Das Vertrauensintervall für die Streuung (1063) – 3. Der fundamentale Signifikanztest (<i>t</i> -Test) (1064) – 4. Der <i>F</i> -Test (1064) – 5. Der Korrelationstest (1065)	
6.3.4.	Die empirische Verteilungsfunktion	1066
	1. Der Hauptsatz der mathematischen Statistik und der Kolmogorow-Smirnow-Test für Verteilungsfunktionen (1066) – 2. Das Histogramm (1068) – 3. Der χ^2 -Anpassungstest für Verteilungsfunktionen (1068) – 4. Der χ^2 -Anpassungstest für Normalverteilungen (1069) – 5. Der Vergleich zweier Verteilungsfunktionen mit dem Wilcoxon-Test (1070)	
6.3.5.	Die Maximum-Likelihood-Methode zur Gewinnung von Parameterschätzungen	1071
6.3.6.	Multivariate Analysen	1073
	1. Varianzanalyse (1074) – 2. Faktoranalyse (1074) – 3. Clusteranalyse (1075) – 4. Diskri- minanzanalyse (1075) – 5. Multiple Regression (1075)	
6.4.	Stochastische Prozesse	1076
6.4.1.	Zeitreihen	1078
	1. Die empirischen Autokorrelationskoeffizienten (1078) – 2. Spektralanalyse diskreter Zeitreihen (1080) – 3. Statistik von diskreten Zeitreihen (1081) – 4. Der Spektralsatz von Herglotz (1082) – 5. Spektralanalyse kontinuierlicher Zeitreihen und weißes Rauschen (1082)	
6.4.2.	Markowsche Ketten und stochastische Matrizen	1084
	1. Ergodisches Verhalten (1085) – 2. Rekurrenz (1086)	
6.4.3.	Poissonsche Prozesse	1086
6.4.4.	Brownsche Bewegung und Diffusion	1087
	1. Das klassische Irrfahrtmodell (1087) – 2. Die Diffusionsgleichung (1088) – 3. Das	

	Wienermaß und der Wienerprozeß (1088) – 4. Die Feynman-Kac-Formel (1090) – 5. Das Feynmanintegral (1090)	
6.4.5.	Der Hauptsatz von Kolmogorow für allgemeine stochastische Prozesse	1091
7.	Numerik und Wissenschaftliches Rechnen	1093
7.1.	Numerisches Rechnen und Fehleranalyse	1094
7.1.1.	Begriff des Algorithmus	1094
7.1.2.	Zahldarstellung in Computern	1095
7.1.3.	Fehlerquellen, Fehlererfassung, Kondition und Stabilität	1096
7.2.	Lineare Algebra	1099
7.2.1.	Lineare Gleichungssysteme – direkte Methoden	1099
	1. Der Gauß-Algorithmus (1099) – 2. Das Verfahren von Gauß-Jordan (1101) – 3. Determinantenberechnung (1102) – 4. Matrizeninversion (1102) – 5. Das Verfahren von Cholesky (1104) – 6. Tridiagonale Gleichungssysteme (1105) – 7. Kondition eines linearen Gleichungssystems (1105)	
7.2.2.	Iterative Lösung linearer Gleichungssysteme	1106
	1. Klassische Iterationsverfahren (1106) – 2. Methode der konjugierten Gradienten (1107)	
7.2.3.	Eigenwertprobleme	1109
	1. Das charakteristische Polynom (1109) – 2. Jacobi-Verfahren (1109) – 3. Transformation auf Hessenbergform (1110) – 4. Der QR-Algorithmus (1112) – 5. Gebrochen inverse Vektoriteration von Wielandt (1113)	
7.2.4.	Ausgleichung und die Methode der kleinsten Quadrate	1113
	1. Methode der Normalgleichungen (1114) – 1.1. Ausgleichung direkter Beobachtungen (1114) – 1.2. Regressionsgerade $y = ax + b$ (1115) – 1.3. Ausgleichsparabel $y = a + bx + cx^2$ (1115) – 1.4. Ausgleichspolynome (1116) – 2. Methode der Orthogonaltransformation (1116) – 3. Methode der Singulärwertzerlegung (1118)	
7.3.	Interpolation, numerische Differentiation und Quadratur	1119
7.3.1.	Interpolationspolynome	1119
	1. Lagrangesche Interpolationsformel (1119) – 2. Newtonsche Interpolationsformeln (1121) – 3. Gaußsche Interpolationsformeln (1123) – 4. Interpolationsfehler (1124) – 5. Algorithmus von Aitken-Neville und Extrapolation (1124) – 6. Spline-Interpolation (1125)	
7.3.2.	Numerische Differentiation	1127
7.3.3.	Numerische Quadratur	1129
	1. Interpolatorische Quadraturformeln (1129) – 2. Das Romberg-Verfahren (1131) – 3. Gaußsche Quadratur (1132) – 4. Substitution und Transformation (1134)	
7.4.	Nichtlineare Probleme	1136
7.4.1.	Nichtlineare Gleichungen	1136
7.4.2.	Nichtlineare Gleichungssysteme	1137
	1. Fixpunktiteration (1137) – 2. Methode von Newton-Kantorowitsch (1138)	
7.4.3.	Berechnung der Nullstellen von Polynomen	1141
	1. Newtonsches Verfahren und Horner-Schema (1141) – 2. Das Graeffe-Verfahren (1142) – 3. Eigenwertmethode (1143) – 4. Methode von Bernoulli (1143) – 5. Methode von Bairstow (1144)	
7.5.	Approximation	1145
7.5.1.	Approximation im quadratischen Mittel	1145
	1. Fourierpolynome (1147) – 2. Polynomapproximation (1147) – 3. Gewichtete Polynomapproximation (1148)	
7.5.2.	Gleichmäßige Approximation	1150
7.5.3.	Genäherte gleichmäßige Approximation	1151
7.6.	Gewöhnliche Differentialgleichungen	1152

7.6.1.	Anfangswertprobleme	1152
	1. Einschrittmethoden (1153) – 2. Mehrschrittverfahren (1158)	
7.6.2.	Randwertprobleme	1162
	1. Analytische Methoden (1162) – 2. Schießverfahren (1163) – 3. Differenzenmethode (1164)	
7.7.	Partielle Differentialgleichungen und Wissenschaftliches Rechnen	1165
7.7.1.	Grundideen	1165
7.7.2.	Diskretisierungsverfahren in der Übersicht	1166
	1. Differenzenverfahren (1166) – 2. Ritz-Galerkin-Verfahren (1168) – 3. Finite-Element-Verfahren (FEM) (1169) – 4. Petrow-Galerkin-Verfahren (1170) – 5. Finite-Volumen-Verfahren (1170) – 6. Spektralverfahren und Kollokation (1171) – 7. h -, p - und hp -Methode (1171)	
7.7.3.	Elliptische Differentialgleichungen	1171
	1. Positiv definite Randwertprobleme (1171) – 1.1. Modellfälle (Poisson- und Helmholtz-Gleichung) (1172) – 1.2. Variationsformulierung (1173) – 1.3. Anwendung der Finite-Element-Methode (1175) – 1.4. Darstellung der Finite-Element-Matrix (1175) – 1.5. Berechnung der Finite-Element-Matrix (1176) – 1.6. Stabilitätsbedingung (1176) – 1.7. Isoparametrische Elemente und hierarchische Basen (1177) – 1.8. Differenzenverfahren (1177) – 1.9. M -Matrizen (1177) – 1.10. Konvektionsdiffusionsgleichung (1178) – 2. Sattelpunktprobleme (1178) – 2.1. Modellfall Stokes-Gleichung (1178) – 2.2. Differenzenverfahren (1180) – 2.3. Gemischte Finite-Element-Verfahren (1181)	
7.7.4.	Parabolische Differentialgleichungen	1182
	1. Modellproblem und Aufgabenstellung (1182) – 2. Diskretisierung in Zeit und Ort (1183) – 3. Stabilität von Differenzenverfahren (1183) – 4. Semidiskretisierung (1184) – 5. Schrittweitensteuerung (1184) – 6. Finite-Element-Lösung (1184)	
7.7.5.	Hyperbolische Differentialgleichungen	1185
	1. Anfangswert- und Anfangsrandwertaufgaben (1185) – 2. Hyperbolische Systeme (1186) – 3. Charakteristikenverfahren (1187) – 4. Differenzenverfahren (1187) – 5. Konsistenz, Stabilität und Konvergenz (1188) – 6. Stabilitätsbedingungen (1189) – 6.1. CFL-Bedingung als notwendige Stabilitätsbedingung (1189) – 6.2. Hinreichende Stabilitätsbedingungen (1189) – 7. Approximation unstetiger Lösungen („shock capturing“) (1190) – 8. Eigenschaften im nichtlinearen Fall, Erhaltungsform und Entropie (1191) – 9. Numerische Verfahren im nichtlinearen Fall (1192)	
7.7.6.	Adaptive Diskretisierungsverfahren	1192
	1. Variable Gitterweiten (1192) – 2. Selbstadaptivität und Fehlerindikatoren (1193) – 3. Fehlerschätzer (1194)	
7.7.7.	Iterative Lösung von Gleichungssystemen	1195
	1. Allgemeines (1195) – 1.1. Richardson-Iteration (1195) – 1.2. Allgemeine lineare Iteration (1196) – 1.3. Konvergenz von Iterationsverfahren (1196) – 1.4. Erzeugung von Iterationsverfahren (1196) – 1.5. Effiziente Iterationen (1197) – 2. Der Fall positiv definiter Matrizen (1197) – 2.1. Matrixkondition und Konvergenzgeschwindigkeit (1197) – 2.2. Prädiktionierung (1198) – 2.3. Spektraläquivalenz (1198) – 2.4. Transformation mittels hierarchischer Basis (1198) – 3. Semiiterative Verfahren (1198) – 4. Gradientenverfahren und Verfahren der konjugierten Gradienten (1199) – 4.1. Gradientenverfahren (1199) – 4.2. Verfahren der konjugierten Gradienten (1199) – 5. Mehrgitterverfahren (1200) – 5.1. Allgemeines (1200) – 5.2. Beispiel einer Glättungsiteration (1200) – 5.3. Grobgitterkorrektur (1200) – 5.4. Zweigitterverfahren (1201) – 5.5. Mehrgitterverfahren (1201) – 5.6. Numerische Beispiele zur diskreten Poisson-Gleichung (1202) – 6. Geschachtelte Iteration (1203) – 7. Teilraumzerlegung (1203) – 8. Gebietszerlegung (1204) – 9. Nichtlineare Gleichungssysteme (1205)	
7.7.8.	Randelementmethode	1205
	1. Die Integralgleichungsmethode (1205) – 2. Diskretisierung durch Kollokation (1207) – 3. Galerkin-Verfahren (1207) – 4. Zur Numerik der Randelementmethode (1207)	

7.7.9.	Harmonische Analyse	1208
	1. Diskrete Fourier-Transformation und trigonometrische Interpolation (1208) –	
	2. Schnelle Fourier-Transformation (FFT) (1209) – 3. Anwendung auf periodische	
	Toeplitz-Matrizen (1210) – 4. Fourier-Reihen (1211) – 5. Wavelets (1211) –	
	5.1. Nichtlokalität der Fourier-Transformation (1211) – 5.2. Das Wavelet und die Wavelet-	
	Transformation (1212) – 5.3. Eigenschaften der Wavelets (1213) – 6. Mehr-Skalen-Analyse	
	(1213) – 6.1. Einführung (1213) – 6.2. Skalierungsfunktion und Mehr-Skalen-Analyse	
	(1214) – 6.3. Orthonormalität und Filter (1215) – 6.4. Wavelets in der Mehr-Skalen-	
	Analyse (1215) – 6.5. Schnelle Wavelet-Transformation (1216) – 6.6. Daubechies-Wavelets	
	(1217) – 6.7. Datenkompression und Adaptivität (1218) – 6.8. Varianten (1218)	
7.7.10.	Inverse Probleme	1218
	1. Gut gestellte Aufgaben (1218) – 2. Schlecht gestellte Aufgaben (1218) – 3. Fragestellung	
	bei schlecht gestellten Aufgaben (1219) – 4. Regularisierungsverfahren (1220)	

Tafel zur Geschichte der Mathematik	1221
--	-------------

Literatur	1240
------------------	-------------

Register	1269
-----------------	-------------

Mathematische Symbole	1288
------------------------------	-------------

Dimensionen wichtiger physikalischer Größen	1293
--	-------------

Fundamentale Konstanten der Physik	1295
---	-------------