

# INHALTSVERZEICHNIS

## Erster Abschnitt

### Unbestimmte Integrale

#### Die Aufgabe der Integralrechnung

Nr.	Seite
1. Einleitende Betrachtungen über die Aufgabe der Integralrechnung . . . . .	1
2. Das Flächeninhaltsproblem und das bestimmte Integral . . . . .	3
3. Der Begriff des unbestimmten Integrals. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung . . . . .	5
4. Überblick über den Inhalt der folgenden Abschnitte . . . . .	8

#### Grundregeln zur Berechnung unbestimmter Integrale

5. Grundintegrale und einfachste Grundregeln . . . . .	11
6. Beispiele und Übungsaufgaben . . . . .	14
7. Teilweise Integration . . . . .	16
8. Integration eines Quotienten . . . . .	19
9. Einführung einer neuen Veränderlichen . . . . .	23
10. Gründe für die Unzulänglichkeit der Integrationsmethoden . . . . .	28

#### Übersicht über die wichtigsten Arten von Funktionen, deren Integrale in geschlossener Form darstellbar sind

##### A. Integration der rationalen Funktionen

11. Integration rationaler Funktionen . . . . .	30
12. Die rechnerische Herstellung der Teilbruchzerlegung einer rationalen Funktion . . . . .	33
13. Das Integral $\int \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^k} dx$ . . . . .	38
14. Beispiele . . . . .	42
15. Völlige Vermeidung komplexer Größen . . . . .	44
16. Stärkere Benutzung komplexer Größen . . . . .	46
17. Besondere Kunstgriffe . . . . .	47

##### B. Integration einiger entwickelter algebraischer Funktionen

18. Die wichtigsten Arten entwickelter algebraischer Funktionen, die sich geschlossen integrieren lassen . . . . .	48
--	----

Nr.	Seite
19. Die Integrale der Form $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ . . . . .	52
20. Unzulänglichkeit der angegebenen drei Integrationsverfahren . . . . .	58
21. Zurückführung auf Grundintegrale . . . . .	60
22. Das Integral $\int \frac{g(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$ . . . . .	61
23. Das Integral $\int \frac{dx}{(x - a_1)^\alpha \sqrt{ax^2 + bx + c}}$ . . . . .	65
24. Das Integral $\int \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^\gamma \sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$ . . . . .	66
25. Das Integral $\int \frac{Ax + B}{(x^2 + b_1x + c_1)^\gamma \sqrt{a^2x + bx + c}}$ dx . . . . .	68
26. Binomische Integrale . . . . .	74

C. Integration einiger transzendenter Funktionen

27. Die wichtigsten Arten transzendenter Funktionen, die geschlossen integriert werden können . . . . .	76
28. Beispiele . . . . .	83

Zweiter Abschnitt

Das bestimmte (Riemannsche) Integral

Begriff und Handhabung des bestimmten Integrals

29. Flächeninhalt und bestimmtes Integral . . . . .	91
30. Das untere und obere (Riemannsche) Integral . . . . .	95
31. Das bestimmte (Riemannsche) Integral und dessen Summendefinition . . . . .	102
32. Das Riemannsche Integritätskriterium . . . . .	107
33. Integrierbarkeit der monotonen und der stetigen Funktionen. Gleichmäßige Stetigkeit . . . . .	109
34. Einfache Ergänzungen und Sätze. Erster Mittelwertsatz . . . . .	113
35. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung . . . . .	119
36. Das Rechnen mit bestimmten Integralen . . . . .	124
37. Die Hauptlemmata der Integralrechnung . . . . .	131

Erste Anwendungen

38. Einfache Quadraturen, Mittelwerte . . . . .	136
39. Einige physikalische Anwendungen des Integralbegriffs . . . . .	145
40. Neuer Beweis des Taylorschen Satzes . . . . .	147
41. Das Wallissche Produkt . . . . .	149
42. Die Stirlingsche Formel . . . . .	151
43. Berechnung besonderer bestimmter Integrale. Übungsaufgaben . . . . .	155
44. Der zweite Mittelwertsatz der Integralrechnung . . . . .	159

**Integration unendlicher Reihen**

45. Hinreichende Bedingungen für die gliedweise Integrierbarkeit . . . . .	164
46. Einfache Beispiele gliedweiser Integration . . . . .	168
47. Darstellung unbestimmter und bestimmter Integrale durch unendliche Reihen 170	

**Näherungsweise Berechnung bestimmter Integrale**

48. Die Sehnen- und die Tangentenformel . . . . .	173
49. Die Keplersche Faßregel . . . . .	175
50. Die Simpsonsche Regel . . . . .	180
51. Graphische Integration. Mathematische Instrumente . . . . .	181

**Dritter Abschnitt**

**Inhalte**

52. Das Inhaltsproblem . . . . .	187
53. Der Riemannsche Inhalt beschränkter Punktmengen . . . . .	189
54. Inhaltsberechnung ebener Bereiche . . . . .	201
55. Weitere Beispiele und Übungsaufgaben . . . . .	211
56. Inhaltsberechnung räumlicher Bereiche . . . . .	216
57. Beispiele zur Berechnung von Rauminhalten . . . . .	218

**Vierter Abschnitt**

**Längenberechnungen und Kurvenintegrale**

**Längenberechnungen**

58. Problemstellung . . . . .	224
59. Die Länge eines Kurvenstücks . . . . .	225
60. Funktionen von beschränkter Schwankung . . . . .	229
61. Die Berechnung der Länge rektifizierbarer Kurven . . . . .	235
62. Beispiele zur Berechnung von Längen . . . . .	238
63. Rein analytische Definition der trigonometrischen Funktionen . . . . .	241

**Riemann-Stieltjes-Integrale. Kurvenintegrale**

64. Riemann-Stieltjes-Integrale . . . . .	245
65. Bogenlänge und Bogendifferential . . . . .	252
66. Zusätze zur Lehre von der Krümmung . . . . .	257
67. Bewegung auf krummliniger Bahn. Vektordifferentiation . . . . .	262
68. Kurvenintegrale . . . . .	267
69. Skalar- und Vektorfelder . . . . .	271
70. Beispiele von Kurvenintegralen . . . . .	273

Fünfter Abschnitt

**Integrale der Funktionen einer komplexen Veränderlichen**

**Unbestimmte und bestimmte Integrale**

71. Unbestimmtes Integral einer Funktion komplexen Argumentes . . . . .	278
72. Ausdehnung der Grundformeln der Integralrechnung . . . . .	279
73. Der Begriff des bestimmten Integrals einer Funktion komplexen Argumentes	280
74. Einfache Integralsätze . . . . .	285
75. Berechnung bestimmter Integrale . . . . .	287

**Der Cauchysche Integralsatz**

76. Der Cauchysche Integralsatz. Einfach zusammenhängende Gebiete . . . . .	292
77. Beweis des Cauchyschen Integralsatzes . . . . .	294
78. Folgerungen. Zusammenhang zwischen bestimmtem und unbestimmtem Integral	300
79. Die Cauchysche Integralformel . . . . .	306

**Potenzreihenentwicklung. Analytische Fortsetzung. Singuläre Punkte**

80. Darstellbarkeit regulärer Funktionen durch Potenzreihen . . . . .	307
81. Folgerungen aus dem Entwicklungssatz . . . . .	309
82. Der Identitätssatz für analytische Funktionen . . . . .	315
83. Analytische Fortsetzung. Singuläre Punkte . . . . .	318
84. Die Laurentsche Entwicklung. Pole und wesentlich singuläre Punkte . . .	325
85. Der Residuensatz . . . . .	331

Sechster Abschnitt

**Mehrfache Integrale**

**Darstellung von Funktionen durch bestimmte Integrale**

86. Stetigkeit und Differenzierbarkeit der durch bestimmte Integrale dargestellten Funktionen . . . . .	334
87. Ausdehnung auf den Fall veränderlicher Grenzen . . . . .	336
88. Begriff des zweifachen Integrals . . . . .	338
89. Umkehrung der Integrationsfolge . . . . .	338
90. Anwendung zur Berechnung einiger bestimmter Integrale . . . . .	340

**Gebiets- und Raumintegrale**

91. Volumen und Gebietsintegral . . . . .	343
92. Das untere und obere Gebietsintegral . . . . .	344
93. Das (Riemannsche) Gebietsintegral und dessen Summendefinition . . . . .	349
94. Integrierbarkeitskriterium. Stetige Funktionen . . . . .	350
95. Allgemeines zur Berechnung von Gebietsintegralen . . . . .	351
96. Das Rechnen mit Gebietsintegralen . . . . .	354

## Inhaltsverzeichnis

Nr.	Seite
97. Verwandlung in ein zweifaches Integral . . . . .	355
98. Beispiele . . . . .	358
99. Verwandlung in ein Randintegral. (Gaußscher Integralsatz) . . . . .	360
100. Transformation von Gebietsintegralen . . . . .	363
101. Einführung von Polarkoordinaten . . . . .	372
102. Beispiele . . . . .	373
103. Raum- und mehrdimensionale Integrale . . . . .	378
104. Durch mehrdimensionale Integrale dargestellte Funktionen . . . . .	381

### Siebenter Abschnitt

#### Anwendungen mehrfacher Integrale

##### Volumenberechnungen

105. Volumenberechnung durch Zerlegung in Säulen . . . . .	383
106. Volumenberechnung durch Zerlegung in Pyramiden . . . . .	383
107. Volumenberechnung durch Zerlegung in Schichten . . . . .	386

##### Inhalt krummer Flächenstücke. Oberflächenintegrale

108. Problemstellung. Notwendigkeit einer gewissen Einschränkung . . . . .	387
109. Der Begriff des Inhalts eines räumlichen Flächenstücks . . . . .	389
110. Inhalt einer Rotationsfläche . . . . .	399
111. Beispiele . . . . .	401
112. Gewöhnliche Bereiche, Flächenstücke und Körper . . . . .	404
113. Einseitige Flächenstücke . . . . .	406
114. Der Begriff des Oberflächenintegrals . . . . .	407

##### Schwerpunkte. Trägheitsmomente. Potentiale

115. Dichte . . . . .	408
116. Schwerpunkte . . . . .	410
117. Guldinsche Regeln . . . . .	414
118. Trägheitsmoment . . . . .	417
119. Beispiele zur Berechnung von Trägheitsmomenten . . . . .	418
120. Potential . . . . .	424
121. Beispiele zur Berechnung von Potentialen . . . . .	427

##### Integration vollständiger Differentiale

122. Integration der Differentiale von Funktionen zweier Veränderlicher . . . . .	430
123. Beispiele . . . . .	436
124. Integration der Differentiale von Funktionen von drei und mehr Veränderlichen . . . . .	437

##### Die Integralsätze von Gauß, Green und Stokes

125. Der Gaußsche Integralsatz . . . . .	443
126. Der Greensche Satz . . . . .	447
127. Geschwindigkeitsfelder . . . . .	449

## Inhaltsverzeichnis

Nr.	Seite
128. Divergenz einer Vektorfunktion . . . . .	452
129. Physikalische Bedeutung der Divergenz . . . . .	455
130. Rotation einer Vektorfunktion . . . . .	458
131. Der Stokessche Integralsatz . . . . .	461

### Achter Abschnitt

#### Uneigentliche Integrale und deren Anwendungen

##### Uneigentliche Integrale

132. Integrale über unbeschränkte Intervalle . . . . .	468
133. Konvergenzkriterien. Absolute Konvergenz . . . . .	471
134. Integrale von nicht beschränkten Funktionen . . . . .	474
135. Konvergenzkriterien. Absolute Konvergenz . . . . .	478
136. Das Rechnen mit uneigentlichen Integralen . . . . .	481
137. Uneigentliche Gebiets- und Raumintegrale . . . . .	482
138. Darstellung von Funktionen durch uneigentliche Integrale. Gleichmäßige Konvergenz . . . . .	486

##### Die Gammafunktion

139. Die Eulersche Definition der Gammafunktion . . . . .	491
140. Die Funktionalgleichung und die Ableitung der Gammafunktion . . . . .	492
141. Die Gaußsche Definition der Gammafunktion . . . . .	494
142. Weitere Eigenschaften der Gammafunktion. Ihr geometrisches Bild . . . . .	498

##### Besondere uneigentliche Integrale

143. Berechnung des Integrals $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ . . . . .	503
144. Weitere Beispiele . . . . .	507
145. Anwendung der komplexen Integration . . . . .	512

### Neunter Abschnitt

#### Fouriersche Reihen

146. Periodische Funktionen . . . . .	515
147. Trigonometrische Reihen . . . . .	517
148. Die Fouriersche Reihe einer Funktion . . . . .	519
149. Eine Minimumseigenschaft der Fourierkoeffizienten . . . . .	523
150. Die Größenordnung der Fourierkoeffizienten . . . . .	524
151. Das Dirichletsche Integral und der Riemannsches Lokalisationssatz . . . . .	528
152. Konvergenzbedingungen . . . . .	531
153. Das Fejérsche Integral. Der Weierstraßsche Approximationssatz . . . . .	536
154. Darstellung willkürlicher Funktionen . . . . .	540
155. Einzigkeitssätze . . . . .	545

Zehnter Abschnitt

Differentialgleichungen

Erklärungen und Existenzsätze

156. Beispiele für das Auftreten von Differentialgleichungen . . . . .	546
157. Begriff einer Differentialgleichung und ihrer Integrale . . . . .	549
158. Geometrische Bedeutung einer Differentialgleichung . . . . .	551
159. Existenzbeweis . . . . .	554
160. Eindeutigkeit der Lösung . . . . .	560
161. Abhängigkeit von den Anfangswerten und von Parametern . . . . .	562
162. Durchführbarkeit der Integration . . . . .	563

Differentialgleichungen erster Ordnung

163. Trennung der Veränderlichen . . . . .	565
164. Homogene Differentialgleichungen . . . . .	567
165. Lineare Differentialgleichungen . . . . .	569
166. Exakte Differentialgleichungen . . . . .	571
167. Integrierender Faktor oder Multiplikator . . . . .	572
168. Die implizite Differentialgleichung erster Ordnung . . . . .	574
169. Singuläre Integrale. Diskriminantenort . . . . .	580
170. Trajektorien . . . . .	586

Differentialgleichungen höherer Ordnung

171. Beschränkung der Aufgabe . . . . .	589
172. Fälle der Zurückführbarkeit auf eine Differentialgleichung erster Ordnung . . . . .	589
173. Homogene lineare Differentialgleichungen . . . . .	590
174. Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	596
175. Schwingungsgleichung . . . . .	597
176. Inhomogene lineare Differentialgleichungen . . . . .	600
177. Erzwungene Schwingungen . . . . .	601

Differentialgleichungen im komplexen Gebiet

178. Potenzreihen in mehreren Veränderlichen . . . . .	605
179. Funktionen von mehreren komplexen Veränderlichen . . . . .	608
180. Entwicklung in mehrfach unendliche Potenzreihen . . . . .	609
181. Vollständige Differentiale . . . . .	613
182. Integration von Differentialgleichungen erster Ordnung durch Potenzreihen . . . . .	614
183. Ausdehnung auf Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung . . . . .	617
184. Differentialgleichungen höherer Ordnung . . . . .	621
185. Beispiele . . . . .	623
186. Singuläre Stellen. Besselsche Differentialgleichung . . . . .	626

Namen- und Sachverzeichnis zum dritten Bande . . . . .	633
--	-----