

# INHALTSVERZEICHNIS

## Erster Abschnitt

### Kombinatorik. Gruppen

1. Aufgaben der Kombinatorik . . . . .	5
2. Erklärungen . . . . .	6

#### Permutationen

3. Erste Grundaufgabe. Anzahl der Permutationen voneinander verschiedener Elemente . . . . .	7
4. Das Induktionsgesetz (Schluß von $n$ auf $(n + 1)$ ) . . . . .	9
5. Erklärung des Zeichens $n!$ . . . . .	11
6. Lexikographische Anordnung . . . . .	12
7. Transpositionen und Inversionen . . . . .	13
8. Gerade und ungerade Permutationen . . . . .	15
9. Zweite Grundaufgabe. Anzahl der Permutationen von Elementen, die nicht alle verschieden sind . . . . .	16
10. Übungsaufgaben . . . . .	17
11. Permutationen als Umordnungen oder Substitutionen . . . . .	18
12. Zusammensetzung oder Produkt von Permutationen . . . . .	19
13. Inverse Umordnungen . . . . .	21
14. Gruppen . . . . .	22

#### Kombinationen

15. Erklärungen . . . . .	25
16. Dritte Grundaufgabe. Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung . . . . .	26
17. Erklärung des Zeichens $\binom{\alpha}{k}$ . . . . .	28
18. Eigenschaften des Zeichens $\binom{\alpha}{k}$ . . . . .	29
19. Der Binomialehrsatz . . . . .	32
20. Anwendungen . . . . .	34
21. Der Polynomialehrsatz . . . . .	34
22. Kombinationen mit Wiederholung . . . . .	36
23. Vierte Grundaufgabe. Anzahl der Kombinationen mit Wiederholung . . . . .	36
24. Übungsaufgaben . . . . .	39

## Zweiter Abschnitt

### Determinanten

25. Bedeutung der Determinanten . . . . .	40
26. Vorläufiges über Determinanten, Matrizen und Vektoren . . . . .	41
27. Eine lineare Gleichung mit einer Unbekannten . . . . .	45

28. Zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten . . . . .	46
29. Zwei homogene lineare Gleichungen mit drei Unbekannten . . . . .	50
30. Determinanten dritten Grades . . . . .	53
31. Adjunkten . . . . .	57
32. Drei lineare Gleichungen mit drei Unbekannten . . . . .	58
33. Determinanten beliebigen Grades . . . . .	63
34. Vertauschungssatz und Nullsatz . . . . .	68
35. Gleichungen zwischen den Elementen und Adjunkten . . . . .	69
36. Einfache Umformungen von Determinanten . . . . .	71
37. Beispiele für die Berechnung einer Determinante . . . . .	73
38. Das Differenzenprodukt von $n$ gegebenen Zahlen . . . . .	75
39. System von $n$ linearen Gleichungen mit $n$ Unbekannten . . . . .	76
40. Anwendungen . . . . .	83
41. System von $m$ linearen Gleichungen mit $n$ Unbekannten . . . . .	85
42. Homogene lineare Gleichungen . . . . .	86
43. Vektoren. Inneres Produkt . . . . .	89
44. Lineare Gleichungen in vektorieller Schreibweise. Erste Art . . . . .	90
45. Lineare Abhängigkeit von Vektoren. Zweite vektorielle Schreibweise linearer Gleichungen . . . . .	91
46. Multiplikation zweier Determinanten . . . . .	92
47. Andere Darstellungen des Produktes . . . . .	95
48. Determinante des Systems der Adjunkten . . . . .	96
49. Produkte von Matrizen . . . . .	97

### Dritter Abschnitt

#### Das System der rationalen Zahlen

##### Die Grundgesetze der Arithmetik

50. Die Grundlagen der Analysis. Vorbemerkungen . . . . .	100
51. Die natürlichen und die ganzen Zahlen . . . . .	102
52. Die rationalen Zahlen . . . . .	105
53. Die Grundgesetze der Arithmetik . . . . .	106
I. Grundgesetze der Gleichheit und der Anordnung . . . . .	106
II. Grundgesetze der Addition . . . . .	107
III. Grundgesetz der Subtraktion . . . . .	108
IV. Grundgesetze der Multiplikation . . . . .	109
V. Grundgesetz der Division . . . . .	110
VI. Archimedisches Grundgesetz . . . . .	111

##### Abgeleitete Rechenregeln

54. Unabhängigkeit und Widerspruchsfreiheit der Axiome . . . . .	113
55. Vorzeichen- und Klammerregeln . . . . .	114
56. Summen und Produkte mit beliebig vielen Gliedern . . . . .	116
57. Ungleichungen und Beträge . . . . .	119
58. Beispiele für das Rechnen mit Ungleichungen und Beträgen . . . . .	122
59. Abbildung der rationalen Zahlen auf Punkte einer orientierten Geraden. Intervalle . . . . .	131
60. Direkte und indirekte Beweise. Besonderheiten der mathematischen Ausdrucksweise . . . . .	133

**Teilbarkeitseigenschaften der ganzen Zahlen**

61. Teilbarkeit . . . . .	136
62. Größter gemeinsamer Teiler . . . . .	138
63. Die kanonische Darstellung der ganzen Zahlen als Produkt von Primzahlpotenzen . . . . .	142
64. Endliche regelmäßige Kettenbrüche . . . . .	144
65. Näherungsbrüche . . . . .	147
66. Beispiele . . . . .	149

**Zahlenfolgen**

67. Zahlenfolgen . . . . .	150
68. Arithmetische und geometrische Folgen . . . . .	154
69. Grundbegriffe der Differenzenrechnung. Übungsaufgabe . . . . .	156
70. Arithmetische Folgen höherer Ordnung . . . . .	159
71. Summenformeln . . . . .	160

**Nullfolgen**

72. Nullfolgen . . . . .	161
73. Beispiele von Nullfolgen . . . . .	163
74. Bemerkungen über Nullfolgen . . . . .	167
75. Einfache Sätze über Nullfolgen . . . . .	169

**Vierter Abschnitt**

**Das System der reellen Zahlen**

**Die irrationalen Zahlen**

76. Unvollkommenheit des Systems der rationalen Zahlen . . . . .	171
77. Das Cantorsche Axiom . . . . .	174
78. Die irrationalen Zahlen . . . . .	176

**Das System der reellen Zahlen**

79. Die Grundgesetze der Gleichheit und der Anordnung . . . . .	179
80. Grundgesetze der Addition . . . . .	181
81. Grundgesetz der Subtraktion . . . . .	182
82. Grundgesetze der Multiplikation und Division . . . . .	182
83. Das Archimedische Grundgesetz . . . . .	184
84. Die reellen Zahlen . . . . .	184
85. Abbildung der reellen Zahlen auf die Punkte der Zahlengeraden. Abszissen . . . . .	186
86. Abgeleitete Regeln. Zusammenfassung . . . . .	187
87. Dezimalbrüche . . . . .	188
88. Der Dedekindsche Schnitt . . . . .	190
89. Rückblick auf die Abschnitte I, II und III . . . . .	193
90. Unendliche regelmäßige Kettenbrüche . . . . .	193
91. Beliebige Zahlenfolgen, Nullfolgen und Intervallschachtelungen . . . . .	195
92. Erweiterung des Systems der reellen Zahlen . . . . .	196

**Fünfter Abschnitt**

**Potenzen, Wurzeln, Logarithmen**

93. Potenzen mit ganzzahligen Exponenten . . . . .	198
94. Wurzeln . . . . .	199
95. Potenzen mit rationalen Exponenten . . . . .	201
96. Abhängigkeit einer Potenz vom Exponenten . . . . .	203
97. Potenzen mit beliebigen reellen Exponenten . . . . .	205
98. Logarithmen . . . . .	207

Sechster Abschnitt

Grundbegriffe der analytischen Geometrie

Grundlagen der Geometrie

99. Grundlagen der Geometrie. Vorbemerkungen . . . . .	209
100. Die Axiome der Verknüpfung (I) . . . . .	211
101. Die Axiome der Anordnung (II) . . . . .	212
102. Die Axiome der Kongruenz (III) . . . . .	213
103. Die Axiome der Stetigkeit (IV) . . . . .	215
104. Das Parallelenaxiom (V) . . . . .	217
105. Winkel und Winkelmessung . . . . .	217
106. Erweiterung des Winkelbegriffs . . . . .	220

Koordinatensysteme

107. Das Wesen der analytischen Geometrie . . . . .	222
108. Rechtwinklige und schiefwinklige ebene Koordinatensysteme . . . . .	224
109. Ebene Polarkoordinaten . . . . .	226
110. Das rechtwinklige räumliche Koordinatensystem . . . . .	227
111. Schiefwinklige räumliche Koordinatensysteme . . . . .	230
112. Zylinder- und räumliche Polarkoordinaten . . . . .	230

Erklärungen und Sätze, die für Ebene und Raum gemeinsam gelten

113. Mittel zur Vermeidung von Fallunterscheidungen . . . . .	233
114. Projektionen von Strecken . . . . .	236
115. Parallelverschiebung der Koordinatenachsen . . . . .	238
116. Komponenten und Koordinaten einer Strecke . . . . .	241
117. Vektoren . . . . .	242
118. Abstand zweier Punkte und die Dreiecksungleichung . . . . .	244
119. Abstandsverhältnis . . . . .	246

Grundaufgaben der analytischen Geometrie der Ebene

120. Richtungskosinus in der Ebene . . . . .	250
121. Sätze über Richtungskosinus in der Ebene . . . . .	251
122. Steigung einer Geraden . . . . .	251
123. Projektion des Leitstrahls eines Punktes . . . . .	255
124. Winkel zwischen zwei Strahlen. Additionstheorem der Kreisfunktionen . . . . .	256
125. Bedingung des Senkrechtstehens . . . . .	257
126. Bedingung des Parallelseins . . . . .	258
127. Dreiecksinhalt . . . . .	258
128. Formel für den Inhalt eines Dreiecks . . . . .	259
129. Koordinatenverwandlung in der Ebene bei Änderung der Achsenrichtungen . . . . .	260

Grundaufgaben der analytischen Geometrie des Raumes

130. Richtungskosinus im Raume . . . . .	263
131. Sätze über Richtungskosinus im Raume . . . . .	264
132. Ausdrücke der Richtungskosinus durch geographische Länge und Breite . . . . .	266
133. Projektion des Leitstrahls eines Punktes auf einen Strahl im Raume . . . . .	267
134. Winkel zwischen zwei Strahlen im Raume . . . . .	269
135. Bedingung des Senkrechtstehens . . . . .	270
136. Bedingung des Parallelseins . . . . .	271
137. Skalares Produkt . . . . .	272
138. Positive Normalenrichtung einer Ebene . . . . .	273
139. Zuordnung von positivem Drehungssinn und positiver Normale . . . . .	273
140. Positiver Windungssinn im Raume . . . . .	274

## Inhaltsverzeichnis

141. Projektion eines Dreiecks . . . . .	276
142. Projektionen eines Dreiecks auf die Koordinatenebenen. Dreiecksinhalt im Raume . . . . .	278
143. Gemeinsames Lot zweier Richtungen . . . . .	278
144. Vektorprodukt . . . . .	280
145. Rauminhalt eines Tetraeders . . . . .	281
146. Ausdruck des Rauminhaltes eines Tetraeders durch die Koordinaten der Ecken . . . . .	282
147. Koordinatenverwandlung im Raume bei Änderung der Achsenrichtungen . . . . .	284
148. Gleichzeitige Änderung des Anfangs und der Achsenrichtungen . . . . .	287
149. Gleichungen zwischen den neun Richtungskosinus, welche die gegenseitige Lage zweier rechtwinkliger Achsenkreuze bestimmen . . . . .	288
150. Beziehungen zwischen den eben entwickelten Gleichungen . . . . .	291
151. Darstellung der Drehungen durch drei willkürlich wählbare Zahlen . . . . .	293

## Siebenter Abschnitt

### Das System der komplexen Zahlen

#### Grundbegriffe

152. Geschichtliches . . . . .	300
153. Die komplexen Zahlen . . . . .	303
154. Gleichheit und Ungleichheit . . . . .	305
155. Addition und Subtraktion . . . . .	307
156. Multiplikation . . . . .	308
157. Division . . . . .	310
158. Zusammenfassung. Abgeleitete Regeln . . . . .	311
159. Das System der komplexen Zahlen als Erweiterung des Systems der reellen Zahlen . . . . .	311
160. Kartesische Koordinaten und Polarkoordinaten der komplexen Zahlen. — Bezeichnungen und geometrische Ausdrucksweise . . . . .	313
161. Geometrische Veranschaulichung der vier Grundrechnungsarten . . . . .	317
162. Das Rechnen mit Ungleichungen und Beträgen . . . . .	319
163. Übungsaufgaben . . . . .	322
164. Potenzen mit ganzzahligen Exponenten . . . . .	323
165. Anwendungen . . . . .	324
166. Wurzeln . . . . .	326
167. Potenzen mit beliebigen reellen Exponenten . . . . .	328

## Achter Abschnitt

### Veränderliche und Funktionen

#### Feststellung der allgemeinen Begriffe

168. Beispiele von Funktionen . . . . .	329
169. Konstante und Veränderliche . . . . .	330
170. Intervalle . . . . .	333
171. Begriff einer Funktion . . . . .	336
172. Bezeichnung der Funktionen . . . . .	340
173. Geometrisches Bild einer Funktion . . . . .	342
174. Funktionen von mehreren Veränderlichen . . . . .	343

**Erklärung einiger besonderer Arten von Funktionen**

**A. Rationale Funktionen, Polynome**

175. Rationale Funktionen . . . . .	346
176. Ganze und gebrochene rationale Funktionen . . . . .	347
177. Normalform eines Polynoms in einer Veränderlichen . . . . .	348
178. Hilfssatz aus der Algebra . . . . .	349
179. Eindeutigkeit der Normalform eines Polynoms in einer Veränderlichen . . . . .	351
180. Grad eines Polynoms einer Veränderlichen . . . . .	352
181. Algebraische Gleichungen mit einer Unbekannten . . . . .	355
182. Interpolationsformeln von Lagrange und Newton . . . . .	355
183. Normalform der Polynome in mehreren Veränderlichen . . . . .	358
184. Gesamtgrad eines Polynoms in mehreren Veränderlichen . . . . .	360
185. Teilbarkeit von Polynomen . . . . .	361
186. Größter gemeinsamer Teiler zweier Polynome . . . . .	363
187. Allgemeine Form der gebrochenen rationalen Funktionen . . . . .	365

**B. Algebraische Funktionen**

188. Beispiele nicht rationaler Funktionen . . . . .	367
189. Algebraische Gleichungen zwischen mehreren Veränderlichen . . . . .	368
190. Begriff einer algebraischen Funktion . . . . .	368

**C. Transzendente Funktionen**

191. Begriff der Transzendenz . . . . .	372
192. Exponentialfunktionen . . . . .	373
193. Umkehrung der Exponentialfunktion. Logarithmen . . . . .	375
194. Potenzen mit irrationalen Exponenten . . . . .	376
195. Trigonometrische oder Kreisfunktionen . . . . .	376
196. Zyklometrische Funktionen . . . . .	379
197. Die Hyperbelfunktionen und ihre Umkehrung . . . . .	381
198. Geschlossene analytische Ausdrücke. Elementare Funktionen . . . . .	382
199. Mittelbare Funktionen. . . . .	383

**Geometrische Darstellung einer Funktion**

200. Übereinstimmung des Bildes einer Funktion mit anderweitig bekannten Kurven . . . . .	385
201. Konstruktion des geometrischen Bildes einer Funktion . . . . .	386
202. Beispiele geometrischer Bilder . . . . .	388

**Neunter Abschnitt**

**Gerade und Ebene**

203. Parameterdarstellung einer Geraden in einer Ebene . . . . .	391
204. Darstellung einer Geraden durch eine Gleichung . . . . .	395
205. Bestimmtheit der Gleichung einer Geraden . . . . .	397
206. Beispiele . . . . .	399
207. Besondere Formen der Gleichung einer Geraden . . . . .	400
208. Abstand eines Punktes von einer Geraden . . . . .	406
209. Schnittpunkt zweier Geraden . . . . .	407
210. Winkel zwischen zwei Geraden . . . . .	408
211. Allgemeine Formen der Gleichung einer Geraden . . . . .	410

## Inhaltsverzeichnis

212. Übungsaufgaben . . . . .	414
213. Affine Abbildung . . . . .	416
214. Parameterdarstellung einer Geraden im Raume . . . . .	423
215. Parameterdarstellung einer Ebene im Raume . . . . .	426
216. Darstellung einer Ebene durch eine Gleichung . . . . .	430
217. Bestimmtheit der Gleichung einer Ebene. . . . .	432
218. Verbindungsebene dreier Punkte . . . . .	434
219. Besondere Formen der Gleichung einer Ebene . . . . .	435
220. Abstand eines Punktes von einer Ebene . . . . .	438
221. Bedingungen für das Parallelsein und für das Schneiden zweier Ebenen . . . . .	439
222. Winkel zweier Ebenen . . . . .	440
223. Die Gerade als Schnittlinie zweier Ebenen . . . . .	441
224. Schnittpunkt dreier Ebenen . . . . .	442
225. Bedingung, daß vier Ebenen einen Punkt gemein haben . . . . .	443
226. Allgemeine Formen der Gleichung einer Ebene . . . . .	444
227. Übungsaufgaben . . . . .	446

## Zehnter Abschnitt

### Grenzwerte

#### Grenzwerte von Zahlenfolgen

228. Zahlenfolgen. Nullfolgen . . . . .	449
229. Erklärungen und Sätze . . . . .	451
230. Spezielle Nullfolgen . . . . .	454
231. Konvergente Zahlenfolgen . . . . .	457
232. Weitere Bemerkungen und Beispiele. . . . .	459
233. Sätze über konvergente Zahlenfolgen . . . . .	462
234. Divergente Zahlenfolgen . . . . .	466
235. Weitere Beispiele konvergenter Zahlenfolgen . . . . .	470
236. Die Zahl $e$ . . . . .	472
237. Die beiden Konvergenzprobleme . . . . .	475
238. Das erste Hauptkriterium (für monotone Folgen) . . . . .	477
239. Das zweite Hauptkriterium (für beliebige Zahlenfolgen) . . . . .	479

#### Grenzwerte von Funktionen

240. Vorbemerkungen und Beispiele . . . . .	483
241. Grenzwert einer Funktion von $x$ für $x \rightarrow \pm \infty$ . . . . .	487
242. Zurückführung des Konvergenzverhaltens von Funktionen auf dasjenige von Zahlenfolgen . . . . .	489
243. Grenzwert einer Funktion bei Annäherung ihres Arguments an einen endlichen Wert . . . . .	491
244. Grenzwert von $\frac{\sin x}{x}$ für $x \rightarrow 0$ . . . . .	494
245. Einseitige Grenzwerte . . . . .	495
246. Sätze über Grenzwerte . . . . .	497
247. Die uneigentlichen Grenzwerte $+\infty$ und $-\infty$ . . . . .	500
248. Erstes Hauptkriterium (für monotone Funktionen) . . . . .	501
249. Zweites Hauptkriterium (für beliebige Funktionen) . . . . .	502

Elfter Abschnitt

Zahlen- und Punktmengen

250. Der Begriff einer Menge . . . . .	503
251. Beispiele von Zahlen- und Punktmengen . . . . .	505
252. Abzählbare und nicht abzählbare Mengen . . . . .	507
253. Äquivalenz von Mengen . . . . .	509
254. Untere und obere Grenze . . . . .	511
255. Häufungspunkte und Häufungsgrenzen . . . . .	515
256. Zahlenmengen und Zahlenfolgen . . . . .	519
257. Das III. Hauptkriterium für die Konvergenz von Zahlenfolgen . . . . .	521
258. Häufungspunkte beliebiger Punktmengen . . . . .	523
259. Punktfolgen. Konvergenz . . . . .	526
260. Weitere Erklärungen und Sätze . . . . .	528

Zwölfter Abschnitt

Stetigkeit

261. Stetigkeit und Unstetigkeit einer Funktion . . . . .	531
262. Einseitige Stetigkeit. Stetigkeit in einem Intervall . . . . .	536
263. Stetigkeit der einfachsten Funktionen . . . . .	536
264. Sätze über Funktionen, die in einem Intervall stetig sind . . . . .	538
265. Stetigkeit einer mittelbaren Funktion . . . . .	542
266. Umkehrung einer monotonen und stetigen Funktion. . . . .	543
267. Stetigkeit einer durch Umkehrung entstandenen Funktion . . . . .	547
268. Stetigkeit der elementaren Funktionen . . . . .	548
269. Darstellung unstetiger Funktionen . . . . .	550
Namen- und Sachverzeichnis zum ersten Bande . . . . .	555

Mathematische Zeichen

Trigonometrische und hyperbolische Funktionen

sin	(sin)*	Sinus
cos	(cos)	Kosinus
tg	(tan)	Tangens
ctg	(cot)	Kotangens
arcsin	(Arcsin)	Arkussinus (Hauptwert)
arccos	(Arccos)	Arkuskosinus (Hauptwert)
arctg	(Arctan)	Arkustangens (Hauptwert)
arctg	(Arccot)	Arkuskotangens (Hauptwert)
Ein	(sinh)	Sinus hyperbolicus
Coj	(cosh)	Kosinus hyperbolicus
Tg	(tanh)	Tangens hyperbolicus
Ctg	(coth)	Kotangens hyperbolicus
Ar Ein	(arsinh)	area-sinus hyperbolicus
Ar Coj	(arcosh)	area-cosinus hyperbolicus
Ar Tg	(artanh)	area-tangens hyperbolicus
Ar Ctg	(arcoth)	area-cotangens hyperbolicus

\* In Klammern Abkürzung nach TGL.