

Vorwort	VIII
Wie arbeiten Sie mit diesem Buch?	XI
KAPITEL 1. DIE REELLEN ZAHLEN	
§ 1 Mengen	1
§ 2 Funktionen	4
Definitionen und Beispiele	4
Die Komposition von Funktionen	6
Die Umkehrfunktion	8
Bijektive Funktionen	9
§ 3 Die reellen Zahlen	10
Die Zahlengerade	10
Die arithmetischen Eigenschaften von $\mathbb{R}$	10
Ungleichungen	12
Intervalle	16
Definition und Eigenschaften der Wurzel	17
Der Betrag	19
Zusammenfassung	22
KAPITEL 2. VOLLSTÄNDIGE INDUKTION	
§ 1 Beweis durch vollständige Induktion	24
Erklärung des Summenzeichens	26
§ 2 Rekursive Definitionen	26
§ 3 n-te Potenz und n-te Wurzel	28
Eigenschaften der n-ten Potenz	28
Die n-te Wurzel	30
Die binomische Formel	30
Zusammenfassung	34
KAPITEL 3. DIE KOMPLEXEN ZAHLEN	
Einleitung	36
§ 1 Definition und Veranschaulichung	36
§ 2 Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen	36
Rechengesetze in $\mathbb{C}$	36
$\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$	38
§ 3 Realteil, Imaginärteil, Betrag	39
Realteil, Imaginärteil, Konjugierte	39
Der Betrag	40
§ 4 Die Polarform	44
§ 5 n-te Wurzeln einer komplexen Zahl	46
Zusammenfassung	49

## KAPITEL 4. REELLE UND KOMPLEXE FUNKTIONEN

Einleitung	50
§ 1 Definition der reellen Funktionen und Beispiele	50
§ 2 Monotone Funktionen	52
§ 3 Beispiele aus der Wechselstrom- lehre	54
§ 4 Rechnen mit reellen Funktionen	56
§ 5 Polynome	58
Das Horner-Schema	58
Nullstellen von Polynomen	60
§ 6 Komplexe Funktionen	62
Komplexe Funktionen mit reellen Argumenten	64
Zusammenfassung	65

## KAPITEL 5. DAS SUPREMUM

Einleitung	66
§ 1 Schranken, Maximum, Minimum, Supremum, Infimum	67
§ 2 Das Supremumsaxiom	70
§ 3 Eigenschaften von Supremum und Infimum	70
§ 4 Supremum und Maximum bei Funktionen	71
§ 5 Dual-, Dezimal- und Hexadezimal- zahlen	72
Zusammenfassung	74

## KAPITEL 6. FOLGEN

Einleitung	75
§ 1 Definition	75
§ 2 Monotonie und Beschränktheit	76
Beschränktheit	76
Monotonie	76
Monotone beschränkte Folgen	78
§ 3 Konvergenz und Divergenz	80
Konvergenz	80
Divergenz	82
Rechenregeln für konvergente Folgen	82
Beispiele	84
Rekursiv definierte Folgen	86

§ 4 Komplexe Folgen	89
Zusammenfassung	92
<b>KAPITEL 7: EINFÜHRUNG IN DIE INTEGRALRECHNUNG</b>	
Einleitung	94
§ 1 Beispiele	94
§ 2 Obersumme und Untersumme	98
§ 3 Die Definition des Integrals	102
§ 4 Das Riemannsches Integrabilitätskriterium	104
Integrierbarkeit monotoner Funktionen	106
§ 5 Integral als Grenzwert einer Folge	107
Das Riemannsches Summen-Kriterium	108
§ 6 Numerische Integration	109
Die Rechteckregel	109
Die Trapezregel	110
Die Simpsonregel	111
§ 7 Eigenschaften des Integrals	112
Eigenschaften des Integrals bezüglich des Integrationsintervalls	112
Eigenschaften bezüglich des Integranden	114
Ungleichungen für Integrale	116
Zusammenfassung	117
<b>KAPITEL 8. REIHEN</b>	
Einleitung (Zenon's Paradoxon)	118
§ 1 Beispiele	120
§ 2 Konvergente Reihen	122
Geometrische Reihen	122
Die "Schneeflockenkurve"	123
Rechenregeln für konvergente Reihen	124
Notwendiges Konvergenzkriterium	125
§ 3 Konvergenzkriterien	126
Vergleichskriterien	126
Wurzelkriterium	126
Quotientenkriterium	128
Alternierende Reihen	128
§ 4 Absolut konvergente Reihen	130
Zusammenfassung	133
<b>KAPITEL 9. POTENZREIHEN UND SPEZIELLE FUNKTIONEN</b>	
Einleitung	134
§ 1 Potenzreihen	136
Konvergenz von Potenzreihen	136
Zusammenfassung: Potenzreihen als Funktionen	139
§ 2 Exponentialfunktion	140
Definition der Exponentialfunktion	140
Eigenschaften der Exponentialfunktion	140

§ 3 Sinus und Cosinus	142
§ 4 Hyperbelfunktionen	144
Zusammenfassung	146

## KAPITEL 10. STETIGE FUNKTIONEN

Einleitung	146
§ 1 Stetigkeit	149
Grenzwerte von Funktionen	149
Einseitige und uneigentliche Grenzwerte	151
Stetige Funktionen	152
Trigonometrische Funktionen und Exponentialfunktion sind stetig	154
Stetig auf $[a,b]$ : Drei Sätze	156
§ 2 Anwendung auf spezielle Funktionen	161
Exponentialfunktion, Logarithmus und allgemeine Potenz	161
Trigonometrische Funktionen	164
§ 3 Die $\varepsilon$ - $\delta$ -Definition der Stetigkeit und die Lipschitz-Stetigkeit	168
§ 4 Stetigkeit und Integration	171
Zusammenfassung	172

## KAPITEL 11. DIFFERENTIALRECHNUNG

Einleitung	174
§ 1 Lineare Approximation	174
§ 2 Definition der Differenzierbarkeit	177
§ 3 Differenzierbare Funktionen	180
§ 4 Rechenregeln für differenzierbare Funktionen	184
Summe, Produkt, Quotient	184
Die Kettenregel	185
Die Ableitung der Umkehrfunktion	188
Differenzierbarkeit von Potenzreihen	190
§ 5 Die Ableitung komplexer Funktionen	190
§ 6 Höhere Ableitungen	192
Aufgaben zum Einüben der Differentiationstechniken	193
§ 7 Beispiele von Differentialgleichungen und Lösungen	194
Lösung der Schwingungsgleichung durch Potenzreihenansatz	194
§ 8 Der erste Mittelwertsatz	196
Lokale Extrema	196
Der erste Mittelwertsatz der Differentialrechnung	198
Anwendungen des ersten Mittelwertsatzes	200
§ 9 Die Regeln von de L'Hôpital	201
Zusammenfassung	204

## KAPITEL 12. INTEGRALRECHNUNG-INTEGRATIONSTECHNIK

Einleitung	207
§ 1 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	208
§ 2 Die Stammfunktion	210
§ 3 Eine andere Formulierung des Hauptsatzes	211
§ 4 Integration zur Lösung einfachster Differentialgleichungen	212
§ 5 Das unbestimmte Integral	214
§ 6 Die Integration komplexer Funktionen	215
§ 7 Integrationsmethoden	216
Integranden der Form $\frac{f'}{f}$	216
Partielle Integration	217
Substitution	219
Eine Umformulierung der Substitu- tionsregel	222
Substitution bei bestimmten Inte- gralen	224
§ 8 Separable Differentialgleichungen	225
Lösungsmethode	225
Merkregel	226
Anfangswertprobleme	227
§ 9 Integration rationaler Funktionen	228
1. Schritt: Polynomdivision	228
2. Schritt: Polynomzerlegung	229
3. Schritt: Partialbruchzerlegung	230
4. Schritt: Integration rationaler Funktionen	232
Kurze Merkgelsammlung	233
Zusammenfassung	234

## KAPITEL 13. UNEIGENTLICHE INTEGRALE

Einleitung	236
§ 1 Unbeschränktes Integrationsintervall	236
Integrationsintervall $]-\infty, \infty[$	238

Konvergenzkriterien	239
§ 2 Unbeschränkter Integrand	240
Konvergenzkriterien	242
§ 3 Die Gammafunktion	243
§ 4 Die Laplace-Transformation	245
Linearität und elementare Laplace- Transformation	246
Bemerkungen zum Umkehrproblem	247
Transformation von Ableitungen	248
Transformation von $f(at \pm b)$	249
Verschiebung des Arguments in der Bildfunktion	250
Kurze Übersicht	251
Zusammenfassung	252
KAPITEL 14. TAYLORPOLYNOME UND TAYLORREIHEN	
§ 1 Approximation durch Polynome	253
Approximation	253
Taylorpolynome	255
§ 2 Restglied	256
Restglied nach Taylor	256
Anwendung: Funktionswerte berechnen	257
Restglied nach Lagrange	258
Restglied abschätzen	258
Anwendung: Lokale Extrema	259
§ 3 Taylorreihen	261
Definition	261
Ein Gegenbeispiel	262
Konvergenz der Taylorreihe	263
Beispiel Logarithmus	265
Beispiel Arcus-Tangens	266
Beispiel Binomische Reihe	266
Zusammenfassung	267
Lösungen der Aufgaben	269
Sachverzeichnis	333