INHALTSVERZEICHNIS

Verzeichnis häufig verwendeter Symbole XIV

Erster Abschnitt

Mengenlehre

Mengenalgebra

1. Menge und Element 1
2. Teilmengen. Vereinigung und Durchschnitt 4
3. Geordnete Paare. Kartesisches Produkt 10
4. Relationen 12
5. Äquivalenzrelationen 15
6. Eindeutige Relationen (Funktionen, Abbildungen) 18
7. Gleichmächtigkeit von Mengen. Endliche und abzählbare Mengen 23
8. Familien 29
9. Vereinigung und Durchschnitt einer Mengenfamilie 32
10. Kartesisches Produkt einer Mengenfamilie 39
11. Spezielle Mengensysteme 43

Geordnete Mengen

12. Halbordnung und Ordnung 49
13. Wohlordnung 53
14. Ähnlichkeit von geordneten Mengen 57
15. Der Wohlordnungssatz und das Lemma von Zorn 61

Kardinalzahlen und Ordinalzahlen

16. Die Kardinalzahlen und ihre Vergleichung 65
17. Das Rechnen mit Kardinalzahlen 71
18. Ordnungstypen 79
19. Ordinalzahlen 81
20. Zahlklassen 90

Zweiter Abschnitt

Das Lebesguesche Maß

Vorbemerkungen über den Riemannschen Inhalt

21. Endliche Intervallsysteme. Figuren 93
22. Elementarinhalt einer Figur 97
23. Äußerer und innerer Inhalt einer beschränkten Punktmenge 99
24. Riemannscher Inhalt einer beschränkten Punktmenge 105

Das Lebesguesche Maß

25. Abzählbare Intervallsysteme. Borelsche Mengen 110
26. Äußeres und inneres Maß einer Punktmenge 113
27. Lebesguesches Maß einer Punktmenge 123
28. Eigenschaften des Lebesgueschen Maßes 128
29. Weitere Eigenschaften des Lebesgueschen Maßes 133

Allgemeine Theorie des Maßes

30. Allgemeiner Inhaltsbegriff 139
31. Allgemeiner Maßbegriff 141
32. Äußeres Maß und Maß 145
33. Prämaß und Maß 146

Dritter Abschnitt

Das Lebesguesche Integral

Meßbare Funktionen

34. Begriff der meßbaren Funktion 155
35. Sätze über meßbare Funktionen 157
36. Folgen meßbarer Funktionen 161
37. Die Struktur meßbarer Funktionen 171

Definition des Lebesgueschen Integrals

38. Das obere und untere Lebesguesche Integral einer beschränkten Funktion . . 176
39. Das Lebesguesche Integral einer beschränkten Funktion 178
40. Das Lebesguesche Integral einer meßbaren Funktion 183

Eigenschaften des Lebesgueschen Integrals

41. Integrationsregeln für Treppenfunktionen 190
42. Integrationsregeln für beliebige meßbare Funktionen 195
43. Folgen integrabler Funktionen 204

Quadratisch integrable Funktionen

44. Definition und Eigenschaften der quadratisch integrablen Funktionen 212
45. Konvergenz im Mittel 214
46. Approximation quadratisch integrabler Funktionen durch Treppenfunktionen . 218

Das Lebesguesche Integral auf abstrakten Maßräumen. Maß und Integral auf Produkträumen

47. Meßbare Funktionen auf abstrakten Maßräumen 221
48. Lebesguesche Integrale auf abstrakten Maßräumen 224
49. Produktmaße 228
50. Der Satz von Fubini 235

Das Lebesguesche Integral für Funktionen einer reellen Veränderlichen

51. Definition und Grundregeln 243
52. Totalstetige Funktionen 244
53. Differenzierbare Funktionen 247
54. Das unbestimmte Integral 256
55. Das Lebesgue-Stieltjessche Integral 265

Vierter Abschnitt

Allgemeine topologische Räume

Vorbemerkungen über metrische Räume

56. Definition des metrischen Raums. Beispiele 271
57. Der Umgebungsbegriff in metrischen Räumen 275

Definition und einfachste Eigenschaften topologischer Räume

58. Definition des topologischen Raums durch Umgebungssysteme 278
59. Häufungspunkte und Berührungspunkte 281
60. Offene und abgeschlossene Mengen 282
61. Kern und Hülle einer Menge 287
62. U-Topologie und O-Topologie 291
63. Basis einer Topologie 294

Stetige und homöomorphe Abbildungen

64. Limites und Häufungspunkte von Punktfolgen 298
65. Stetige Abbildungen 300
66. Homöomorphie 303

Vergleich und Erzeugung von Topologien

67. Vergleich von Topologien . . . 306
68. Topologie zu gegebener Subbasis . . . 308
69. Untere und obere Grenze einer Familie von Topologien . . . 309
70. Teilräume . . . 310
71. Topologische Summen . . . 316
72. Topologische Produkte . . . 318

Zusammenhang und Dichte

73. Zusammenhängende Mengen . . . 322
74. Zusammenhangskomponenten . . . 328
75. Überall dichte und nirgends dichte Mengen. Separable Räume . . . 329

Fünfter Abschnitt

Hausdorffsche Räume

Filter

76. Definition des Filters . . . 333
77. Vergleich von Filtern . . . 335
78. Abbildung von Filtern . . . 337
79. Ultrafilter . . . 339

Definition des Hausdorffschen Raums. Konvergenztheorie

80. Definition des Hausdorffschen Raums . . . 341
81. Konvergenz von Filtern . . . 344
82. Häufungspunkte von Filtern . . . 346
83. Häufungspunkte von Mengen . . . 348
84. Stetigkeit von Abbildungen . . . 349
85. Konvergenz in Räumen mit abzählbaren Umgebungsbasen . . . 350

Kompakte Räume

86. Definition des kompakten Raums . . . 353
87. Abzählbar kompakte und folgenkompakte Räume . . . 356
88. Kompakte Mengen . . . 359
89. Abbildungen kompakter Mengen . . . 363
90. Kompakte Produkte . . . 364
91. Lokalkompakte Räume. Kompaktifizierung . . . 365

Reguläre und normale Räume

92. Reguläre Räume . . . 369
93. Normale Räume . . . 371
94. Der Erweiterungssatz von Tietze . . . 373

Sechster Abschnitt

Metrische Räume

Allgemeine Eigenschaften. Vollständige metrische Räume

95. Abstand und Durchmesser 380
96. Gleichmäßige Stetigkeit 384
97. Konvergenz. Vollständige metrische Räume 387
98. Vervollständigung eines metrischen Raums 393

Kompakten

99. Totalbeschränkte Mengen 397
100. Definition des Kompaktums. Kompaktheitskriterien 400
101. Einige Eigenschaften der Kompakten 404
102. Relativ kompakte Mengen 408
103. Der Satz von Arzelà-Ascoli 410

Metrisierung

104. Das Metrisierungsproblem 416
105. Die Urysohnschen Metrisierungssätze 416

Siebenter Abschnitt

Vektorräume

Vorbemerkungen über die Euklidischen Vektorräume

106. Der n-dimensionale Zahlenvektorraum 421
107. Der n-dimensionale Euklidische Vektorraum 423

Allgemeine Vektorräume

108. Definition des Vektorraums 425
109. Unterräume eines Vektorraums 431
110. Basis eines Vektorraums 432
111. Endlichdimensionale Vektorräume 436

Normierte Vektorräume

112. Definition des normierten Vektorraums 441
113. Separable normierte Vektorräume 446
114. Banachräume 449
115. Endlichdimensionale normierte Vektorräume 452

Hilberträume

116. Vektorräume mit Skalarprodukt 456
117. Definition des Hilbertraums 460
118. Orthogonale Zerlegungen von Hilberträumen 462
119. Orthonormalsysteme in separablen Hilberträumen 467
120. Orthogonalreihen in separablen Hilberträumen 472
121. Der Hilbertsche Folgenraum l_2 480
122. Der Hilbertsche Funktionenraum $L_2[a, b]$ 482
123. Isomorphismus separabler Hilberträume 484
124. Trigonometrische Fourierreihen 487

Achter Abschnitt

Funktionalanalysis

Operatoren in metrischen Räumen

125. Allgemeines über Operatoren 491
126. Der Banachsche Fixpunktsatz 492
127. Anwendungen des Banachschen Fixpunktsatzes 495

Operatoren in normierten Vektorräumen

128. Lineare Operatoren. Stetigkeit und Beschränktheit 500
129. Der Raum der beschränkten linearen Operatoren 507
130. Der Umkehroperator eines linearen Operators 513
131. Lineare Funktionale 519
132. Schwache Konvergenz 527

Selbstadjungierte Operatoren in Hilberträumen

133. Adjungierte Operatoren 533
134. Selbstadjungierte Operatoren 537
135. Operatorgleichungen mit selbstadjungierten Operatoren 541
136. Die Lösung für Punkte der Resolventenmenge 543
137. Die Lösung für Punkte des Spektrums 545
138. Das Spektrum eines selbstadjungierten Operators 549

Vollstetige Operatoren in Hilberträumen

139. Vollstetige Operatoren 555
140. Das Spektrum eines vollstetigen, selbstadjungierten Operators 558
141. Die Lösungen der Operatorgleichung $(T - \lambda E)\,x = y$ 563

Neunter Abschnitt

Integralgleichungen

Vorbereitungen

142. Definitionen und Beispiele 567
143. Die Fredholmsche Integralgleichung 571
144. Der Satz von Stone-Weierstraß 574

Die Fredholmschen Sätze

145. Die Neumannsche Reihe 577
146. Integralgleichungen mit ausgeartetem Kern 579
147. Integralgleichungen mit beliebigem Kern 584

Die Fredholmsche Integralgleichung mit symmetrischem Kern

148. Eigenwerte und Eigenfunktionen der Integralgleichung mit symmetrischem Kern 590
149. Entwicklungssätze 593

Literaturverzeichnis 599
Namen- und Sachverzeichnis 602