

# INHALTSVERZEICHNIS

<b>1. ARITHMETIK</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1. Natürliche Zahlen . . . . .	1
1.1.1. Zahlen und das Unendliche . . . . .	1
1.1.2. Gleichheit und Verschiedenheit von Zahlen . . . . .	2
1.1.3. Die Addition . . . . .	3
1.1.4. Die Multiplikation . . . . .	4
1.2. Subtraktion und Division . . . . .	6
1.2.1. Die Subtraktion . . . . .	6
1.2.2. Die Division . . . . .	7
1.2.3. Die Kettendivision . . . . .	8
1.2.4. Der größte gemeinsame Teiler . . . . .	9
1.3. Algorithmen . . . . .	12
1.3.1. Kennzeichnung von Algorithmen . . . . .	12
1.3.2. Die elementaren Algorithmen . . . . .	13
1.3.3. Die Substitution . . . . .	14
1.3.4. Die Rekursion . . . . .	15
1.3.5. Die Selektion . . . . .	16
1.4. Mengen in der Arithmetik . . . . .	17
1.4.1. Mengen und Eigenschaften . . . . .	17
1.4.2. Mengenoperationen . . . . .	18
1.4.3. Das Induktionsprinzip . . . . .	19
1.5. Elementare Zahlentheorie . . . . .	20
1.5.1. Eine Folgerung aus der Kettendivision . . . . .	20
1.5.2. Kongruenzen . . . . .	24
1.5.3. Die multiplikative Struktur von Restklassen . . . . .	27
1.5.4. Primzahlen . . . . .	29
1.6. Elementare Kombinatorik . . . . .	31

1.6.1. Der Hauptsatz der elementaren Kombinatorik . . . . .	31
1.6.2. Geordnete Stichproben . . . . .	32
1.6.3. Ungeordnete Stichproben . . . . .	33
1.6.4. Die Primfaktorenzerlegung von Fakultäten . . . . .	34
1.7. Beispiele und Ergänzungen . . . . .	36
1.7.1. Dreieckszahlen, Quadratzahlen und Polygonalzahlen . . . . .	36
1.7.2. Römische Zahlzeichen . . . . .	37
1.7.3. Division und Teilbarkeit . . . . .	38
1.7.4. Julianischer und gregorianischer Kalender . . . . .	38
1.7.5. Die Polyederformel . . . . .	39
1.7.6. Das spersersche Lemma . . . . .	42
1.7.7. Algorithmen und Induktion . . . . .	43
1.7.8. Übungen zu Induktionsbeweisen . . . . .	44
1.7.9. Rechnen mit Mengen . . . . .	45
1.7.10. Verbandsstrukturen . . . . .	45
1.7.11. Die lineare diophantische Gleichung . . . . .	48
1.7.12. Primzahlen und Primfaktoren . . . . .	48
1.7.13. Befreundete und vollkommene Zahlen . . . . .	50
1.7.14. Kongruenzen . . . . .	52
1.7.15. Wilsonscher Satz, fermatscher Satz und die Wurzel aus $-1$ . . . . .	54
1.7.16. Teilbarkeitsregeln . . . . .	55
1.7.17. Kombinatorische Relationen . . . . .	56
1.7.18. Beispiele aus der Kombinatorik . . . . .	57
<b>2. GEOMETRIE . . . . .</b>	<b>58</b>
2.1. Die Anfänge der Geometrie . . . . .	58
2.1.1. Der Lehrsatz des Pythagoras . . . . .	58
2.1.2. Das Pentagramm . . . . .	61
2.1.3. Die axiomatisch-deduktive Methode . . . . .	63
2.2. Punkte, Vektoren und Skalare . . . . .	66
2.2.1. Punkte . . . . .	66
2.2.2. Vektoren . . . . .	67
2.2.3. Skalare . . . . .	68
2.2.4. Skalare und Vektoren . . . . .	70
2.3. Die geometrischen Axiome . . . . .	71
2.3.1. Die Axiome der Identität . . . . .	71
2.3.2. Die Körperaxiome . . . . .	72
2.3.3. Die Vektorraumaxiome . . . . .	73
2.3.4. Die Axiome der affinen Geometrie . . . . .	75
2.3.5. Eine anschauliche Deutung der Axiome . . . . .	75
2.3.6. Die Schließungssätze . . . . .	78
2.4. Die affine Geometrie der Ebene . . . . .	81
2.4.1. Basisvektoren . . . . .	81
2.4.2. Parallelkoordinaten . . . . .	82
2.4.3. Geraden in der affinen Ebene . . . . .	83
2.4.4. Das Teilverhältnis . . . . .	86

2.5. Flächeninhalt und Orientierung . . . . .	86
2.5.1. Anschauliche Deutung . . . . .	86
2.5.2. Die Axiome für Flächeninhalt und Orientierung . . . . .	89
2.5.3. Ungleichungen . . . . .	90
2.5.4. Die zweizeilige Determinante . . . . .	91
2.6. Länge und Winkel . . . . .	93
2.6.1. Anschauliche Deutung . . . . .	93
2.6.2. Die Axiome für Länge und Winkel . . . . .	95
2.6.3. Die metrischen Fundamentalgrößen . . . . .	96
2.6.4. Orthonormalbasen . . . . .	98
2.6.5. Winkel und Winkelfunktionen . . . . .	100
2.6.6. Summensätze und Vorzeichenregel . . . . .	101
2.6.7. Winkelhalbierung . . . . .	102
2.7. Die euklidische Geometrie der Ebene . . . . .	104
2.7.1. Geraden in der euklidischen Ebene . . . . .	104
2.7.2. Dreiecksgeometrie . . . . .	106
2.7.3. Kreisgeometrie . . . . .	109
2.7.4. Kreis und Gerade . . . . .	110
2.7.5. Der Abstand von einer Geraden . . . . .	112
2.8. Beispiele und Ergänzungen . . . . .	113
2.8.1. Folgerungen aus den Körperaxiomen . . . . .	113
2.8.2. Verschiedenheit und Körperaxiome . . . . .	115
2.8.3. Addition und Multiplikation in Körpern . . . . .	116
2.8.4. Bruchrechnen in Körpern . . . . .	118
2.8.5. Rechnen in euklidischen Körpern . . . . .	119
2.8.6. Exotische Körper und Geometrien . . . . .	121
2.8.7. Vektorräume beliebiger Dimensionen . . . . .	122
2.8.8. Veranschaulichung des dreidimensionalen Raumes . . . . .	125
2.8.9. Affine Geometrie . . . . .	127
2.8.10. Euklidische Geometrie . . . . .	131
2.8.11. Dreiecksgeometrie . . . . .	132
2.8.12. Kreisgeometrie . . . . .	134
2.8.13. Sinus- und Cosinustafeln . . . . .	135
2.8.14. Tangens und Cotangens . . . . .	137
2.8.15. Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen . . . . .	137
2.8.16. Ebene Trigonometrie . . . . .	139
<b>3. ANALYSIS DES KONTINUUMS . . . . .</b>	<b>141</b>
3.1. Rationale Zahlen . . . . .	141
3.1.1. Rückführung der Geometrie . . . . .	141
3.1.2. Ganze Zahlen . . . . .	143
3.1.3. Rationale Zahlen . . . . .	145
3.1.4. Kettenbruchdarstellung rationaler Zahlen . . . . .	147
3.1.5. Irrationale Skalare . . . . .	149
3.2. Dezimalzahlen . . . . .	151
3.2.1. Das Stellenwertsystem . . . . .	151

3.2.2. Rechentechnik mit Dezimalzahlen . . . . .	153
3.2.3. Absoluter Fehler von Näherungen . . . . .	153
3.2.4. Relativer Fehler von Näherungen . . . . .	155
3.2.5. Rechnen mit Näherungen . . . . .	157
<b>3.3. Die geometrische Reihe . . . . .</b>	<b>159</b>
3.3.1. Periodische Dezimalzahlen . . . . .	159
3.3.2. Unendliche Dezimalzahlen . . . . .	161
3.3.3. Das Paradoxon des Unendlichen . . . . .	162
3.3.4. Die Summenformel . . . . .	163
3.3.5. Die Korrektur der Summenformel . . . . .	165
<b>3.4. Das Kontinuum . . . . .</b>	<b>167</b>
3.4.1. Reelle Größen . . . . .	167
3.4.2. Beispiele . . . . .	168
3.4.3. Gleichheit reeller Größen . . . . .	170
3.4.4. Elementares Rechnen mit reellen Größen . . . . .	173
3.4.5. Ordnung im Kontinuum . . . . .	175
3.4.6. Die Diskrepanz zwischen rationalen Zahlen und reellen Größen . . . . .	179
<b>3.5. Folgen und Grenzwerte . . . . .</b>	<b>180</b>
3.5.1. Folgen reeller Größen . . . . .	180
3.5.2. Eine fundamentale Konvergenzaussage . . . . .	181
3.5.3. Eigenschaften konvergenter Folgen . . . . .	182
3.5.4. Drei wichtige Sätze über reelle Größen . . . . .	183
3.5.5. Weitere Eigenschaften konvergenter Folgen . . . . .	184
3.5.6. Das cauchysche Konvergenzkriterium . . . . .	184
3.5.7. Anwendung im Rechnen mit reellen Größen . . . . .	186
3.5.8. Anwendung bei unendlichen Reihen . . . . .	189
3.5.9. Der Quotiententest . . . . .	191
<b>3.6. Funktionen über dem Kontinuum . . . . .</b>	<b>193</b>
3.6.1. Funktionsschemata . . . . .	193
3.6.2. Präzisierung des Funktionsbegriffs . . . . .	194
3.6.3. Die dirichletsche Funktion . . . . .	196
3.6.4. Der Satz von Cantor . . . . .	198
<b>3.7. Stetige Funktionen . . . . .</b>	<b>200</b>
3.7.1. Verhalten von Funktionen an Häufungswerten . . . . .	200
3.7.2. Definition und Haupteigenschaft der Stetigkeit . . . . .	202
3.7.3. Die Exponentialfunktion . . . . .	203
3.7.4. Die Stetigkeit der Exponentialfunktion . . . . .	206
3.7.5. Graphische Darstellung stetiger Funktionen . . . . .	208
3.7.6. Stetigkeit im Unendlichen . . . . .	210
3.7.7. Divergenz von Funktionswerten . . . . .	211
<b>3.8. Mengen im Kontinuum . . . . .</b>	<b>212</b>
3.8.1. Mengen im Sinne Cantors . . . . .	212
3.8.2. Das Paradoxon des Lügners . . . . .	213
3.8.3. Mengen und Eigenschaften . . . . .	215
3.8.4. Beispiele von Mengen im Kontinuum . . . . .	217

3.8.5. Offene und abgeschlossene Mengen	218
3.8.6. Das Stetigkeitskriterium	219
3.9. Gleichmäßig stetige Funktionen	221
3.9.1. Ein Beispiel	221
3.9.2. Definition und Eigenschaften gleichmäßig stetiger Funktionen	222
3.9.3. Supremum und Infimum von Mengen	224
3.9.4. Totalbeschränkte Mengen	226
3.9.5. Der Zwischenwertsatz	228
3.9.6. Eine Bedingung für gleichmäßige Stetigkeit	228
3.9.7. Barrieren einer stetigen Funktion	231
3.9.8. Das Reduktionsprinzip	234
3.9.9. Gerundete Näherungen	235
3.10. Funktionen und Mengen in der Ebene	237
3.10.1. Funktionen über Teilmengen der Ebene	237
3.10.2. Mengen in der Ebene	238
3.10.3. Rechtecke und Kreise	240
3.10.4. Schaubild einer Funktion	242
3.10.5. Offene und abgeschlossene Mengen	243
3.11. Beispiele und Ergänzungen	244
3.11.1. Division mit absolut kleinstem Rest	244
3.11.2. Vorzeichenfreies Rechnen mit ganzen Zahlen	244
3.11.3. Rechnen mit Zahlen in der Dezimaldarstellung	246
3.11.4. Fehlerrechnungen	247
3.11.5. Fermirechnungen	247
3.11.6. Rechnungen mit der geometrischen Reihe	248
3.11.7. Ein mathematischer Treppenwitz	249
3.11.8. Die Schneeflockenkurve	250
3.11.9. Rechnen mit reellen Größen	250
3.11.10. Rechnen mit Grenzwerten	252
3.11.11. Fast die cauchysche Konvergenzbedingung	253
3.11.12. Arithmetisches, geometrisches und harmonisches Mittel	253
3.11.13. Kettenbruchentwicklungen	257
3.11.14. Fibonaccizahlen und Kettenwurzeln	260
3.11.15. Die stetige Verzinsung	263
3.11.16. Cauchyscher Verdichtungssatz	265
3.11.17. Partialbruchzerlegung bei unendlichen Reihen	266
3.11.18. Konvergenztests unendlicher Reihen	267
3.11.19. Abelsche Umformung	270
3.11.20. Die Methode von Poisson	273
3.11.21. Die Methode von Cesàro	275
3.11.22. Absolute Konvergenz	277
3.11.23. Reihenaddition und Reihenmultiplikation	279
3.11.24. Funktionen und ihre Schaubilder	281
3.11.25. Eindimensionale Punktmengen	282
3.11.26. Antinomien in der Mengenlehre	282
3.11.27. Der innere Kern einer Menge	283
3.11.28. Stetige Funktionen in Teilmengen der Ebene	284
3.11.29. Eine geometrische Deutung von unendlich	284
3.11.30. Eine entgegengesetzte Deutung von unendlich	286

3.11.31. Zweidimensionale Punktmenge . . . . .	288
3.11.32. Cantorsches Diskontinuum . . . . .	288
3.11.33. Nullstellen stetiger Funktionen . . . . .	289
3.11.34. Das positive Infimum . . . . .	290
3.11.35. Das Häufungsstellenprinzip von Bolzano . . . . .	291
3.11.36. Das Lemma von König . . . . .	292
3.11.37. Der Fixpunktsatz von Brouwer . . . . .	293
<b>4. INTEGRALRECHNUNG . . . . .</b>	<b>295</b>
<b>4.1. Die Definition des Integrals . . . . .</b>	<b>295</b>
4.1.1. Zerlegung eines Intervalls . . . . .	295
4.1.2. Unter- und Obersummen . . . . .	296
4.1.3. Kennzeichnung der Integrierbarkeit . . . . .	299
4.1.4. Integrierbarkeit monotoner Funktionen . . . . .	301
4.1.5. Integrierbarkeit stetiger Funktionen . . . . .	302
<b>4.2. Eigenschaften des Integrals . . . . .</b>	<b>304</b>
4.2.1. Linearität, Beschränktheit, Positivität . . . . .	304
4.2.2. Additivität . . . . .	305
4.2.3. Stetigkeit in den Grenzen . . . . .	306
4.2.4. Uneigentliche Integrale . . . . .	308
4.2.5. Der Majorantensatz . . . . .	309
4.2.6. Translationsinvarianz . . . . .	311
<b>4.3. Die Integration von Polynomen . . . . .</b>	<b>312</b>
4.3.1. Die Integration der Potenzfunktion . . . . .	312
4.3.2. Polynomintegration . . . . .	313
<b>4.4. Die Integration der Exponentialfunktion . . . . .</b>	<b>314</b>
4.4.1. Definition des Logarithmus . . . . .	314
4.4.2. Die fundamentale Logarithmusformel . . . . .	315
4.4.3. Die Basis des natürlichen Logarithmus . . . . .	316
<b>4.5. Die Integration der Winkelfunktionen . . . . .</b>	<b>318</b>
4.5.1. Winkelfunktionen über dem Kontinuum . . . . .	318
4.5.2. Die Stetigkeit der Winkelfunktionen . . . . .	319
4.5.3. Die Integration des Sinus . . . . .	321
4.5.4. Festlegung des Bogenmaßes . . . . .	322
<b>4.6. Asymptotische Berechnung von Funktionen . . . . .</b>	<b>324</b>
4.6.1. Asymptotische Gleichheit . . . . .	324
4.6.2. Die Landausymbole . . . . .	326
4.6.3. Beispiele . . . . .	328
4.6.4. Zusammenhang mit dem Integral . . . . .	330
<b>4.7. Das Stieltjesintegral monotoner Integratoren . . . . .</b>	<b>332</b>
4.7.1. Unter- und Obersummen . . . . .	332
4.7.2. Integrierbarkeitsbedingungen . . . . .	334
4.7.3. Linearität, Beschränktheit, Positivität und Additivität . . . . .	335

4.7.4. Stetigkeit in den Grenzen . . . . .	336
4.7.5. Uneigentliche Stieltjesintegrale . . . . .	337
4.7.6. Summen und Reihen als Stieltjesintegrale . . . . .	339
4.8. Die Schwankung von Funktionen . . . . .	341
4.8.1. Funktionen beschränkter bzw. begrenzbarer Schwankung . . . . .	341
4.8.2. Eigenschaften der Schwankung . . . . .	342
4.8.3. Die monotonen Summanden . . . . .	344
4.8.4. Eine weitere Eigenschaft der Schwankung . . . . .	345
4.8.5. Die Stetigkeit der Schwankung . . . . .	347
4.9. Das Stieltjesintegral . . . . .	348
4.9.1. Definition und Eigenschaften . . . . .	348
4.9.2. Reziprozität zwischen Stieltjesintegralen . . . . .	350
4.9.3. Monotone Stammfunktionen . . . . .	351
4.9.4. Stammfunktionen . . . . .	352
4.9.5. Ein Anwendungsbeispiel . . . . .	356
4.10. Beispiele und Ergänzungen . . . . .	357
4.10.1. Summen von Quadraten und Kuben . . . . .	357
4.10.2. Die Integrationsmethode von Fermat . . . . .	359
4.10.3. Die Integration der Kehrwertfunktion . . . . .	361
4.10.4. Die Integration von Potenzen der Kehrwertfunktion . . . . .	362
4.10.5. Der Arcustangens als Integral . . . . .	363
4.10.6. Integrierbare und nichtintegrierbare Funktionen . . . . .	364
4.10.7. Flächeninhalt von Punktmengen . . . . .	364
4.10.8. Integration von Punktmengen . . . . .	367
4.10.9. Kreisfläche und Winkelmessung . . . . .	371
4.10.10. Gaußsches Kreisproblem . . . . .	373
4.10.11. Rechenbeispiele für Grenzwerte . . . . .	375
4.10.12. Rechnen mit asymptotischen Formeln . . . . .	376
4.10.13. Uneigentliche Integrale . . . . .	377
4.10.14. Die Schwankung von Funktionen . . . . .	378
4.10.15. Die höldersche Ungleichung . . . . .	380
4.10.16. Die monotonen Summanden . . . . .	381
4.10.17. Beispiele von Stieltjesintegralen . . . . .	383
4.10.18. Die eulersche Summenformel . . . . .	384
4.10.19. Dirichletsches Teilerproblem . . . . .	386
<b>LITERATURVERZEICHNIS . . . . .</b>	<b>389</b>
<b>NAMEN- UND SACHVERZEICHNIS . . . . .</b>	<b>395</b>